ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2023, том 513, с. 99–107

МАТЕМАТИКА

ПОЛУПРОИЗВЕДЕНИЯ, ПРОИЗВЕДЕНИЯ И ПРЕДИКАТНЫЕ МОДАЛЬНЫЕ ЛОГИКИ: НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ

 В. Б. Шехтман[1,*], Д. П. Шкатов[2]

Представлено академиком РАН Л.Д. Беклемишевым
Поступило 12.05.2023 г.
После доработки 03.10.2023 г.
Принято к публикации 18.10.2023 г.

В работе изучаются полупроизведения и произведения пропозициональных модальных логик с **S5** и их связь с предикатными модальными логиками. Приводятся примеры пропозициональных модальных логик, полупроизведения и произведения которых с **S5** аксиоматизируются минимальным образом (т.е. эти логики согласованы с **S5** по полупроизведению и по произведению), а также примеры логик, не обладающих этими свойствами. Финитная аппроксимируемость и согласованность по полупроизведению с **S5** обеспечивают разрешимость соответствующих предикатных модальных логик.

Ключевые слова: полупроизведения модальных логик, произведения модальных логик, предикатные модальные логики

DOI: 10.31857/S2686954323600325, **EDN:** CJIYVH

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматриваются два типа полимодальных логик: полупроизведения и произведения. Произведения возникли в 1970-х гг. [1, 2] для формализации рассуждений с несколькими независимыми модальностями. Всестороннее исследование полупроизведений и произведений было предпринято в [3]; дальнейшие результаты приведены в [4].

До сих пор изучение полупроизведений отставало от изучения произведений. Например, общая теорема об аксиоматизации полупроизведений [3, теорема 9.10] намного слабее аналогичной теоремы о произведениях [3, теорема 5.9]. Во многих случаях свойства полупроизведений неизвестны.

В настоящей работе изучаются полупроизведения и произведения с логикой **S5**. Интерес к ним объясняется аналогией с модальными предикатными логиками, замеченной Ж. Фишер-Серви [5]. Она обобщает интерпретацию **S5** в виде классической логики предикатов с одной переменной, предложенную М. Вайсбергом (см. [3, раздел 1.3]).

Для исследования полупроизведений и произведений и соответствующих предикатных модальных логик предлагается классификация пропозициональных модальных логик по 4 типам; приводятся примеры логик различных типов.

В частности, изучаются логики конечной глубины (в терминологии [6]), с дополнительной “аксиомой густоты”, соответствующей хорнову условию

$$\forall x, y, z, t(xRy \wedge xRz \wedge yRt \to zRt).$$

Доказывается, что полупроизведения и произведения этих логик с **S5** аксиоматизируются минимальным образом и разрешимы. Более того, они финитно аппроксимируемы (полу)произведениями. Отсюда следуют разрешимость и финитная аппроксимируемость соответствующих предикатных модальных логик.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

2.1. Пропозициональные модальные логики

N-модальные пропозициональные формулы строятся из счетного множества пропозициональных букв $PL = \{p_1, p_2, p_3, \ldots\}$, константы $\bot$, связки $\to$, и унарных модальностей $\Box_1$, ..., $\Box_N$; в данной работе $N \in \{1, 2\}$.

Мы используем $p, q, r, \ldots$ как имена пропозициональных букв и $A, B, C, \ldots$ как имена формул; также используем стандартные сокращения $\top$,

[1] *Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия*
[2] *School of Computer Science and Applied Mathematics, University of the Witwatersrand, Johannesburg, South Africa*
******E-mail: vshehtman@gmail.com*

$\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \leftrightarrow B$, $\Diamond_i A$ и итерированные модальности $\Box_i^n$, $\Diamond_i^n$. Модальность 1-модального языка обозначается $\Box$.

Формула, содержащая пропозициональные буквы из множества $\{p_1, p_2, \dots, p_k\}$, называется *k-формулой*. 0-формулы (т.е. формулы без пропозициональных букв) называются *замкнутыми*.

N-модальной пропозициональной логикой называется множество N-модальных формул, содержащее булевы тавтологии, формулы вида $\Box_i(p \to q) \to (\Box_i p \to \Box_i q)$ и замкнутое относительно правил подстановки, Modus ponens, и добавления $\Box_i$. Наименьшая такая логика обозначается $\mathbf{K}_N$; $\mathbf{K} := \mathbf{K}_1$.

Для модальной логики $\mathbf{\Lambda}$ и формулы A, $\mathbf{\Lambda} \vdash A$ означает $A \in \mathbf{\Lambda}$. Наименьшая логика, содержащая логику $\mathbf{\Lambda}$ и множество формул Γ, обозначается $\mathbf{\Lambda} + \Gamma$; для формулы A пишем $\mathbf{\Lambda} + A$ вместо $\mathbf{\Lambda} + \{A\}$.

Соединением $\mathbf{\Lambda}_1 * \mathbf{\Lambda}_2$ 1-модальных логик $\mathbf{\Lambda}_1$ и $\mathbf{\Lambda}_2$ называется логика $\mathbf{K}_2 + \mathbf{\Lambda}_1 \cup \mathbf{\Lambda}_2^{+1}$, где $\mathbf{\Lambda}_2^{+1}$ получается из $\mathbf{\Lambda}_2$ заменой вхождений $\Box_1$ на $\Box_2$.

Мы используем стандартные определения из семантики Крипке. *N-шкала* — это кортеж вида $F = (W, R_1, \dots, R_N)$, где $W \neq \varnothing$, и $R_1, \dots, R_N \subseteq W^2$ (элементы W называются *точками*). *Модель Крипке над* F — это пара вида $M = (F, \theta)$, где $\theta : PL \to 2^W$. Отношение истинности между точками модели M и N-модальными формулами определяется по рекурсии; в частности,

- $M, w \vDash p_i$, если $w \in \theta(p_i)$;
- $M, w \vDash \Box_i A$, если $M, w' \vDash A$ для всех $w' \in R_i(w)$.

Формула A (глобально) *истинна в* M $(M \vDash A)$ если $M, w \vDash A$, для каждой $w \in W$. A *общезначима в* F $(F \vDash A)$ если $M \vDash A$ для каждой модели M над F.

Если Γ — множество формул, то $\mathbf{V}(\Gamma)$ обозначает класс шкал, где общезначимы все формулы из Γ; для формулы A полагаем $\mathbf{V}(A) := \mathbf{V}(\{A\})$. Если $\mathbf{\Lambda}$—логика, то шкалы из $\mathbf{V}(\mathbf{\Lambda})$ называются *$\mathbf{\Lambda}$-шкалами*.

По теореме корректности $\mathbf{V}(\Gamma) = \mathbf{V}(\mathbf{K}_N + \Gamma)$. Также, если F — шкала, то $\mathbf{L}(F) := \{A \mid F \vDash A\}$ — модальная логика. Для класса N-шкал $\mathscr{C}$ имеем логику $\mathbf{L}(\mathscr{C}) := \bigcap\{\mathbf{L}(F) \mid \mathbf{F} \in \mathscr{C}\}$, которая *задается классом* $\mathscr{C}$.

Логика *полна по Крипке*, если она задается каким-нибудь классом шкал. Логика *финитно аппроксимируема*, если она задается некоторым классом конечных шкал.

Лемма 2.1. *Если $\mathbf{\Lambda}_1$, $\mathbf{\Lambda}_2$ — 1-модальные логики и $F = (W, R_1, R_2)$—шкала Крипке, то*

$$F \vDash \mathbf{\Lambda}_1 * \mathbf{\Lambda}_2 \Leftrightarrow (W, R_1) \vDash \mathbf{\Lambda}_1 \;\&\; (W, R_2) \vDash \mathbf{\Lambda}_2.$$

Шкалу $(W, R_1, \dots, R_N)$ можно также рассматривать как классическую модель в сигнатуре $\{R_1, \dots, R_N, =\}$.

Определение 2.2. *Модальная логика $\mathbf{\Lambda}$ элементарна если класс шкал $\mathbf{V}(\mathbf{\Lambda})$ определим классическим предложением первого порядка. N-модальная формула A и классическое предложение Φ в сигнатуре $\{R_1, \dots, R_N, =\}$ соответствуют друг другу, если класс шкал $\mathbf{V}(A)$ определим предложением Φ.*

Определение 2.3. *Универсальное хорново предложение в сигнатуре* $\{R_1, \dots, R_N, =\}$ имеет вид

$$\forall x \forall y \forall \overline{z} (\Phi(x, y, \overline{z}) \to R_i(x, y)),$$

где $\Phi(x, y, \overline{z})$ — конъюнкция атомарных формул.

N-модальная формула называется *хорновой*, если она соответствует универсальному хорнову предложению.

Определение 2.4. *1-модальная логика $\mathbf{\Lambda}$ называется хорновски аксиоматизируемой, если она имеет вид $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{K} + \Gamma$, где каждая формула из Γ хорнова или замкнута.*

Определение 2.5. *Конусом шкалы $F = (W, R_1, \dots, R_N)$ с корнем w (обозначение: $F \uparrow w$) называется ограничение F на множество $(R_1 \cup \ldots \cup R_N)^*(u)$, где S^* — рефлексивное транзитивное замыкание бинарного отношения S.*

Точка w называется *корнем* F, если $F = F \uparrow w$.

Лемма 2.6. *Пусть F — шкала Крипке на множестве W. Тогда*

$$\mathbf{L}(F) = \bigcap_{w \in W} \mathbf{L}(F \uparrow w).$$

Определение 2.7. *1-шкала (W, R) n-транзитивна, если $R^{n+1} \subseteq \bigcup_{m \leqslant n} R^m$.*

N-шкала $(W, R_1, \dots, R_N)$ *n-транзитивна* если шкала $(W, R_1 \cup \ldots \cup R_N)$ n-транзитивна.

Отметим, что точки из множества $R^*(w)$ (где $R = R_1 \cup \ldots \cup R_N$) достижимы по путям из w. В n-транзитивной шкале они достижимы из w не более, чем за n шагов, т.е. $R^*(w) = \bigcup_{m \leqslant n} R^m(w)$.

Определение 2.8. *p-морфизмом шкалы* $(W, R_1, \dots, R_N)$ *на шкалу* $(W', R'_1, \dots, R'_N)$ *называется сюръективное отображение* $f : W \to W'$ *такое, что*

- $x R_i y \Rightarrow f(x) R'_i f(y)$;
- $f(x) R'_i z \Rightarrow \exists y (f(y) = z \;\&\; x R_i y)$.

Будем рассматривать следующие 1-модальные формулы и логики (здесь $n \geqslant 1$):

$$det := \Diamond p \leftrightarrow \Box p; \quad ref := \Box p \to p;$$
$$sym := \Diamond\Box p \to p; \quad 4 := \Box p \to \Box\Box p;$$
$$5 := \Diamond\Box p \to \Box p; \quad alt_n := \neg \bigwedge_{0 \leqslant i \leqslant n} \Diamond(p_i \wedge \bigwedge_{j \neq i} \neg p_j);$$
$$Ath := \Diamond\Diamond p \to \Box\Diamond p.$$
$$\mathbf{T} := \mathbf{K} + ref; \quad \mathbf{K4} := \mathbf{K} + 4;$$
$$\Box \cdot \mathbf{T} := \mathbf{K} + \Box ref; \quad \mathbf{SL4} := \mathbf{K4} + det;$$
$$\mathbf{K5} := K + 5; \quad \mathbf{K45} := \mathbf{K4} + 5;$$
$$\mathbf{S5} := \mathbf{K4} + ref + sym; \quad \mathbf{Alt}_n := \mathbf{K} + alt_n;$$
$$\mathbf{K05} := K + Ath.$$

Кратко опишем семантику Крипке для менее известных из этих логик. Логика $\Box \cdot \mathbf{T}$ задается шкалами с условием $\forall x \forall y (xRy \to yRy)$. Логика $\mathbf{SL4}$ задается классом транзитивных функциональных шкал; следовательно, $\mathbf{SL4}$ задается шкалой, в которой иррефлексивная точка видит рефлексивную точку (рис. 1). Логика $\mathbf{Alt}_n$ задается шкалами (W, R), где $|R(w)| \leqslant n$, для всех $w \in W$.

Определение 2.9. *1-шкала (W, R) называется густой если $R^{-1} \circ R^2 \subseteq R$ или, что эквивалентно, $\forall x, y, z, u \in W \ (xRy \& xRz \& yRu \Rightarrow zRu)$.*

Лемма 2.10. $\mathbf{V}(Ath) = \mathbf{V}(\mathbf{K05})$ *состоит из всех густых шкал. Логика* $\mathbf{K05}$ *полна по Крипке, и потому задается классом густых шкал.*

2.2. Произведения и полупроизведения

Определение 2.11. *Произведением 1-шкал $F_1 = (W_1, R_1)$ и $F_2 = (W_2, R_2)$ называется 2-шкала $F_1 \times F_2 = (W_1 \times W_2, R_h, R_v)$, где*

$$(x, y) R_h (x', y') \Leftrightarrow x R_1 x' \ \& \ y = y';$$
$$(x, y) R_v (x', y') \Leftrightarrow x = x' \ \& \ y R_2 y'.$$

Полупроизведением F_1 и F_2 называется ограничение $F_1 \times F_2$ на множество $W \subseteq W_1 \times W_2$ такое, что $R_h(W) \subseteq W$ (т.е. *W горизонтально замкнуто*).

Лемма 2.12. *Если F – полупроизведение F_1 и F_2, а x_i – точка из F_i $(i = 1, 2)$, то $F \uparrow (x_1, x_2)$ – полупроизведение $F_1 \uparrow x_1$ и $F_2 \uparrow x_2$.*

Если $\mathscr{C}_1$ и $\mathscr{C}_2$ – классы 1-шкал, то положим

$$\mathscr{C}_1 \times \mathscr{C}_2 := \{F_1 \times F_2 \mid F_1 \in \mathscr{C}_1 \text{ и } F_2 \in \mathscr{C}_2\},$$
$$\mathscr{C}_1 \leftthreetimes \mathscr{C}_2 := \{F \mid F - \text{полупроизведение некоторых шкал } F_1 \in \mathscr{C}_1 \text{ и } F_2 \in \mathscr{C}_2\}.$$

Определение 2.13. *Для 1-модальных пропозициональных логик Λ_1, Λ_2 определим произведение $\Lambda_1 \times \Lambda$ и полупроизведение $\Lambda_1 \leftthreetimes \Lambda_2$:*

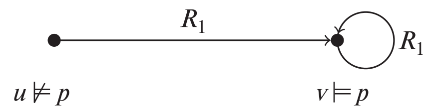

Рис. 1. Модель M_0 над шкалой F_0 (с универсальным R_2).

$$\Lambda_1 \times \Lambda_2 := \mathbf{L}(\mathbf{V}(\Lambda_1) \times \mathbf{V}(\Lambda_2)),$$
$$\Lambda_1 \leftthreetimes \Lambda_2 := \mathbf{L}(\mathbf{V}(\Lambda_1) \leftthreetimes \mathbf{V}(\Lambda_2)).$$

В дальнейшем понадобятся следующие 2-модальные формулы и соответствующие условия на шкалы:

$$(chr) \quad \Diamond_2 \Box_1 p \to \Box_1 \Diamond_2 p \quad R_1^{-1} \circ R_2 \subseteq R_2 \circ R_1^{-1};$$
$$(lcom) \quad \Box_1 \Box_2 p \to \Box_2 \Box_1 p \quad R_2 \circ R_1 \subseteq R_1 \circ R_2;$$
$$(rcom) \quad \Box_2 \Box_1 p \to \Box_1 \Box_2 p \quad R_1 \circ R_2 \subseteq R_2 \circ R_1.$$

Определение 2.14. *Определим полукоммутатор $\Lambda_1 \rfloor \Lambda_2$ и коммутатор $[\Lambda_1, \Lambda_2]$ 1-модальных логик Λ_1 и Λ_2:*

$$\Lambda_1 \rfloor \Lambda_2 := \Lambda_1 * \Lambda_2 + chr + lcom,$$
$$[\Lambda_1, \Lambda_2] := \Lambda_1 \rfloor \Lambda_2 + rcom.$$

Лемма 2.15. *(1)* $\Lambda_1 \rfloor \Lambda_2 \subseteq [\Lambda_1, \Lambda_2] \subseteq \Lambda_1 \times \Lambda_2$.

(2) $\Lambda_1 \leftthreetimes \Lambda_2 \subseteq \Lambda_1 \times \Lambda_2$.

(3) $\Lambda \rfloor \mathbf{S5} \subseteq \Lambda \leftthreetimes \mathbf{S5}$.

(4) $\Lambda \rfloor \mathbf{S5} = \Lambda * \mathbf{S5} + lcom = \Lambda * \mathbf{S5} + chr$.

Определение 2.16. *Логика $\Lambda_1 \leftthreetimes \Lambda_2$ финитно аппроксимируема полупроизведениями, если она задается классом полупроизведений конечных шкал. Аналогично определяется финитная аппроксимируемость произведениями для логик вида $\Lambda_1 \times \Lambda_2$.*

Замечание 2.17. Из финитной аппроксимируемости полупроизведениями следует финитная аппроксимируемость, но не наоборот.

Определение 2.18. *1-модальные логики Λ_1 и Λ_2 согласованы по произведению, если $\Lambda_1 \times \Lambda_2 = [\Lambda_1, \Lambda_2]$, и согласованы по полупроизведению, если $\Lambda_1 \leftthreetimes \Lambda_2 = \Lambda_1 \rfloor \Lambda_2$.*

Теорема 2.19. ([3], теорема 5.9). *Если логика Λ полна по Крипке и хорновски аксиоматизируема, то Λ и* $\mathbf{S5}$ *согласованы по произведению.*

Теорема 2.20. ([3], теорема 9.10). *Если $\Lambda \in \{\mathbf{K}, \mathbf{T}, \mathbf{K4}, \mathbf{S4}\}$, то Λ и* $\mathbf{S5}$ *согласованы по полупроизведению.*

Отметим, что теорема 2.19 дает бесконечно много примеров согласованных по произведению логик, а теорема 2.20 – всего четыре примера согласованности по полупроизведению.

2.3. Монадические модальные предикатные логики

Монадические фрагменты 1-модальных предикатных логик будем называть *монадическими модальными предикатными логиками*. Это логики в языке со счетными множествами индивидных переменных $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$, одноместных предикатных букв $\{P_1^1, P_2^1, P_3^1, \ldots\}$, нульместных предикатных (т.е. пропозициональных) букв $\{P_1^0, P_2^0, P_3^0, \ldots\}$, логическими символами $\bot$, $\to$, $\Box$, и $\forall$. Формулы определяются обычным образом.

Монадической модальной предикатной логикой называется множество монадических модальных предикатных формул, содержащее $\mathbf{K}$, классически общезначимые предикатные формулы, и замкнутое по правилам предикатной подстановки, Modus ponens, обобщения, и добавления $\Box$. Минимальная такая логика обозначается $\mathbf{QK}$. Если $\mathbf{\Lambda}$—пропозициональная 1-модальная логика, то $\mathbf{Q\Lambda} := \mathbf{QK} + \mathbf{\Lambda}$ и $\mathbf{Q\Lambda C} := \mathbf{Q\Lambda} + Ba$, где $Ba :=$ $:= \forall x \Box P(x) \to \Box \forall x P(x)$ – формула Баркан.[1]

Предикатной шкалой Крипке над шкалой Крипке $F = (W, R)$ называется пара $\mathbf{F} = (F, D)$, где $D = (D_w)_{w\in W}$, $D_w \neq \varnothing$ для всех w, и $D_w \subseteq D_v$, если wRv.

Оценкой в $\mathbf{F}$ называется семейство $\xi = (\xi_u)_{u\in W}$ локальных оценок: $\xi_u(P_k^1) \subseteq D_u$ и $\xi_u(P_k^0) \in \{0,1\}$. *Предикатная модель Крипке* над $\mathbf{F}$ – это пара $M = (\mathbf{F}, \xi)$, где ξ – оценка в $\mathbf{F}$.

Для модели M отношение истинности $\vDash$ между точками w и D_w-предложениями (полученными из формул заменой параметров на элементы D_w) определяется по рекурсии:

- $M, w \vDash P_k^0$, если $\xi_w(P_k^0) = 1$;
- $M, w \vDash P_k^1(a)$, если $a \in \xi_w(P_k^1)$;
- $M, w \vDash \forall x A(x)$, если $M, w \vDash A(a)$ для каждого $a \in D_w$;
- определения для $\bot$, $\to$, $\Box$ совпадают с пропозициональными.

Модальная предикатная формула A *общезначима* в предикатной шкале $\mathbf{F}$ (обозначение: $\mathbf{F} \vDash A$), если ее универсальное замыкание истинно во всех точках каждой модели Крипке над $\mathbf{F}$. Если L – предикатная логика, то L*-шкалой* называется предикатная шкала $\mathbf{F}$, в которой все формулы из L общезначимы; обозначение: $\mathbf{F} \vDash L$.

По теореме корректности [14, теорема 3.2.29], $ML(\mathbf{F}) := \{A \mid \mathbf{F} \vDash A\}$ – это модальная предикатная логика (*логика шкалы* $\mathbf{F}$). *Модальной предикатной логикой класса шкал* $\mathscr{C}$ (или логикой, *заданной* классом $\mathscr{C}$) называется

$$ML(\mathscr{C}) := \bigcap \{ML(\mathbf{F}) \mid \mathbf{F} \in \mathscr{C}\};$$

такие логики называются *полными по Крипке*. У каждой предикатной логики L имеется наименьшее полное по Крипке расширение (*Крипке-пополнение*): логика $\widehat{L}$ класса всех L-шкал.

3. ПРЕДИКАТНЫЕ МОДАЛЬНЫЕ ЛОГИКИ С 1 ПЕРЕМЕННОЙ, ПОЛУПРОИЗВЕДЕНИЯ, И ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Напомним определения некоторых видов предикатных модальных формул:

- *1-параметрические* формулы содержат не более одного параметра;
- формулы с *1 переменной* – монадические формулы с не более чем одной (фиксированной) переменной x;
- *чистые формулы с 1 переменной* – формулы с 1 переменной без пропозициональных букв;
- в *монодических* формулах [3, 7] все подформулы вида $\Box A$ – 1-параметрические.

Монадические монодические (mm-)фрагменты логик $\mathbf{QK}$, $\mathbf{QT}$, $\mathbf{QK4}$, и $\mathbf{QS4}$ разрешимы [7, теорема 5.1].[2] Несмотря на синтаксическую ограниченность, фрагменты с 1 переменной не менее выразительны, чем mm-фрагменты:

Лемма 3.1. (1) *Каждая mm-формула* $\mathbf{QK}$*-эквивалентна булевой комбинации формул с* 1 *переменной*;

(2) *Каждая* 1*-параметрическая mm-формула* $\mathbf{QK}$*-эквивалентна формуле с* 1 *переменной*.

Далее, каждая формула A с 1 переменной с пропозициональными буквами $q_1, q_2, \ldots, q_n$ переводится в чистую формулу с 1 переменной $A_0 := [\forall x Q_1(x), \ldots, \forall x Q_n(x)/q_1, \ldots, q_n]A$, где Q_i – одноместные буквы, не входящие в A. Заметим, что $L \vdash A \Leftrightarrow L \vdash A_0$, для любой модальной предикатной логики L, поэтому можно считать, что все формулы с 1 переменной – чистые.

Кроме того, существует сохраняющая общезначимость биекция $A \mapsto A_*$ между чистыми формулами с 1 переменной и 2-модальными пропозициональными формулами:

$$P_i(x)_* := p_i; \quad \bot_* := \bot;$$
$$(A \to B)_* := A_* \to B_*;$$
$$(\Box A)_* := \Box_1 A_*; \quad (\forall x A)_* := \Box_2 A_*.$$

[1] Обычно $\mathbf{QK}$, $\mathbf{Q\Lambda}$, $\mathbf{Q\Lambda C}$ обозначают логики с предикатными буквами всех валентностей, но мы используем эти обозначения для монадических фрагментов.

[2] Эти фрагменты, в известной мере, – максимальные разрешимые для модальных предикатных логик: для большинства логик фрагменты с 2 переменными, даже в сигнатуре с одной одноместной предикатной буквой, неразрешимы [8].

Фрагментом модальной предикатной логики L с 1 переменной называется

$$(L-1)^* := \{A \in L \mid A - \text{чистая формула с 1 переменной}\}.$$

Его *пропозициональным напарником* называется

$$L-1 := \{A_* \mid A \in L, A - \text{чистая формула с 1 переменной}\}.$$

Иногда называем и $L-1$ фрагментом логики L с 1 переменной.

Замечание 3.2. Понятие полноты по Крипке применимо к фрагментам с 1 переменной: $(L-1)^*$ полна по Крипке, если существует класс $\mathscr{C}$ шкал такой, что $(ML(\mathscr{C})-1)^* = (L-1)^*$ или, что эквивалентно, $ML(\mathscr{C})-1 = L-1$. Очевидно, что полнота L влечет полноту $(L-1)^*$.

Лемма 3.3. *Пусть L — модальная предикатная логика. Тогда*

(1) *$L-1$ — 2-модальная пропозициональная логика, содержащая $\mathbf{K} \rfloor \mathbf{S5}$.*

(2) *Если $L \vdash Ba$*, то $[\mathbf{K}, \mathbf{S5}] \subseteq L-1$.

Предложение 3.4. *Пусть Λ — пропозициональная 1-модальная логика. Тогда*

(1) $\Lambda \rfloor \mathbf{S5} \subseteq \mathbf{Q}\Lambda - 1 \subseteq \widehat{\mathbf{Q}\Lambda} - 1 = \Lambda \leftthreetimes \mathbf{S5}$.

Следовательно, $\Lambda \rfloor \mathbf{S5} \subseteq \mathbf{Q}\Lambda - 1 = \Lambda \leftthreetimes \mathbf{S5}$ *для полных по Крипке логик* $\mathbf{Q}\Lambda$.

(2) $[\Lambda, \mathbf{S5}] \subseteq \mathbf{Q}\Lambda\mathbf{C} - 1 \subseteq \widehat{\mathbf{Q}\Lambda\mathbf{C}} - 1 = \Lambda \times \mathbf{S5}$.

Следовательно, $[\Lambda, \mathbf{S5}] \subseteq \mathbf{Q}\Lambda\mathbf{C} - 1 = \Lambda \times \mathbf{S5}$ *для полных по Крипке логик* $\mathbf{Q}\Lambda\mathbf{C}$.

Определение 3.5. *1-модальная пропозициональная логика Λ согласована с кванторами, если* $\mathbf{Q}\Lambda - 1 = \Lambda \rfloor \mathbf{S5}$ *и согласована с формулой Баркан, если* $\mathbf{Q}\Lambda\mathbf{C}{-}1 = [\Lambda, \mathbf{S5}]$.

Предложение 3.4 (1) означает, что гипотетически возможны следующие соотношения:

(1S) $\Lambda \rfloor \mathbf{S5} = \mathbf{Q}\Lambda - 1 = \Lambda \leftthreetimes \mathbf{S5}$,

(2S) $\Lambda \rfloor \mathbf{S5} = \mathbf{Q}\Lambda - 1 = \Lambda \leftthreetimes \mathbf{S5}$,

(3S) $\Lambda \rfloor \mathbf{S5} \subset \mathbf{Q}\Lambda - 1\Lambda \leftthreetimes \mathbf{S5}$.

(4S) $\Lambda \rfloor \mathbf{S5} \subset \mathbf{Q}\Lambda{-}1 \subset \Lambda \leftthreetimes \mathbf{S5}$.

В случае (1S) Λ и $\mathbf{S5}$ согласованы по полупроизведению. Некоторые логики Λ этого типа описаны в теореме 2.19. Другие примеры построены в разделе 6.

В случае (2S) Λ и $\mathbf{S5}$ не согласованы по полупроизведению, но Λ согласована с кванторами. Примеры приведены в разделе 4.

Примерами случая (3S) служат логики $\mathbf{Alt}_n$ (см. раздел 4). Примеры (4S) неизвестны.

Предложение 3.4 (2) означает, что гипотетически возможны следующие соотношения:

(1P) $[\Lambda, \mathbf{S5}] = \mathbf{Q}\Lambda\mathbf{C} - 1 = \Lambda \times \mathbf{S5}$,

(2P) $[\Lambda, \mathbf{S5}] = \mathbf{Q}\Lambda\mathbf{C} - 1 \subset \Lambda \times \mathbf{S5}$,

(3P) $[\Lambda, \mathbf{S5}] \subset \mathbf{Q}\Lambda\mathbf{C} - 1 = \Lambda \times \mathbf{S5}$.

(4P) $[\Lambda, \mathbf{S5}] \subset \mathbf{Q}\Lambda\mathbf{C} - 1 \subset \Lambda \times \mathbf{S5}$.

В случае (1P) Λ и $\mathbf{S5}$ согласованы по произведению. Примеры хорошо известны (теорема 2.19). (3P) выполняется для логик $\mathbf{Alt}_n$ (раздел 4).

В случае (2P) Λ и $\mathbf{S5}$ не согласованы по произведению, но Λ согласована с формулой Баркан; примеры таких логик неизвестны. Примеры логик типа (4P) тоже неизвестны.

4. ЛОГИКИ, НЕ СОГЛАСОВАННЫЕ ПО ПОЛУПРОИЗВЕДЕНИЮ С S5

Следующий результат был впервые сформулирован в работе [9] (без доказательства).

Теорема 4.1. *Пусть Λ — пропозициональная 1-модальная логика такая, что $\Box \cdot \mathbf{T} \subseteq \Lambda \subseteq \mathbf{SL4}$. Тогда*

$$\Lambda \rfloor \mathbf{S5} \subset \Lambda \rfloor \mathbf{S5} + \Box_1\Box_2 ref_1 \subseteq \Lambda \leftthreetimes \mathbf{S5}$$

(*где* $ref_1 = \Box_1 p \to p$). *Следовательно, Λ и $\mathbf{S5}$ не согласованы по полупроизведению.*

Доказательство. Первое включение — строгое, поскольку $\Box_1\Box_2 ref_1 \notin \mathbf{SL4} \rfloor \mathbf{S5}$. Это видно из модели M_0 на рис. 1; здесь $M_0, u \vDash \Diamond_1\Diamond_2\neg ref_1$, и при этом $F_0 \vDash \mathbf{SL4} \rfloor \mathbf{S5}$.

Для обоснования второго включения, ввиду леммы 2.15 (2), достаточно показать, что $\Box_1\Box_2 ref_1 \in (\Box \cdot \mathbf{T}) \leftthreetimes \mathbf{S5}$. Это следует из общезначимости формулы $\Box_1\Box_2\, ref_1$ в каждом полупроизведении $(\Box \cdot \mathbf{T})$-шкалы с $\mathbf{S5}$-шкалой. ■

Из теоремы 4.1 следует, что теорема 2.19 не переносится на полупроизведения (см. также теорему 2.20):

Следствие 4.2. *Хорновски аксиоматизируемые логики* $\Box \cdot \mathbf{T}$, $\mathbf{K5}$, *и* $\mathbf{K45}$ *не согласованы по полупроизведению с S5.*

Более того, имеет место следующий нетривиальный факт (анонсирован в [10]; полное доказательство готовится к публикации):

Теорема 4.3. *Каждая полная по Крипке хорновски аксиоматизируемая логика согласована с кванторами.*

Следствие 4.4. *Логики* $\Box \cdot \mathbf{T}$, $\mathbf{K5}$, *и* $\mathbf{K45}$ — *типа (2S).*

Замечание 4.5. Стандартное рассуждение показывает, что существует континуум логик между $\Box \cdot \mathbf{T}$ и $\mathbf{SL4}$, что дает, по теореме 2.20, континуум логик, не удовлетворяющих (1S).

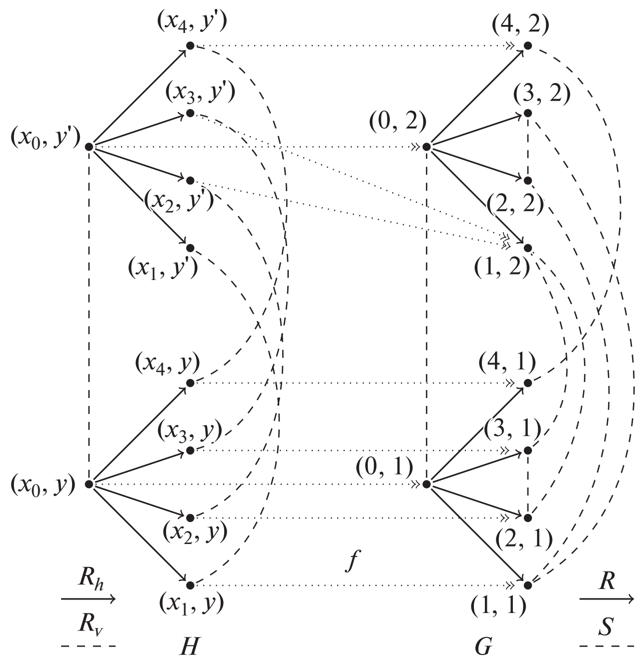

Рис. 2. Шкала G не является p-морфным образом полупроизведения $\mathbf{Alt}_4$-конуса и сгустка.

Замечание 4.6. Если $\mathbf{\Lambda}$ – логика из утверждения теоремы 4.1, то $\mathbf{Q\Lambda}$ неполна по Крипке [11], теорема 5.11.

Напомним хорошо известное свойство формул Янкова–Файна X_G. В несколько другой форме это свойство приведено в [12].

Предложение 4.7. *Пусть G – n-транзитивная N-шкала с корнем. Тогда существует N-модальная формула X_G такая, что для всякой n-транзитивной N-шкалы F*

$$F \not\models X_G \Leftrightarrow \text{существует } p\text{-морфизм некоторого конуса шкалы } F \text{ на } G.$$

Теорема 4.8. *Если $\mathbf{Alt}_n \subseteq \mathbf{\Lambda} \subseteq \mathbf{Alt}_n + \Box^2\bot$, где $n \geqslant 3$, то $\mathbf{\Lambda}$ и $\mathbf{S5}$ не согласованы ни по полупроизведению, ни по произведению.*

Доказательство. Приведем набросок доказательства для $n = 4$; рассуждение в общем случае аналогично. Пусть $G = (W, R, S)$ – шкала на рис. 2 справа (петли по S не изображены).

Нетрудно видеть, что $G \models [\mathbf{Alt}_4 + \Box^2\bot, \mathbf{S5}]$. Следовательно, G 3-транзитивна.[3] Пусть X_G – формула Янкова–Файна шкалы G и $A := \Box_1^2\bot \to X_G$. Очевидно, что $G \models \Box_1^2\bot$ и, по предложению 4.7, $G \not\models X_G$. Поэтому $G \not\models A$, и значит, $A \notin [\mathbf{Alt}_4 + \Box^2\bot, \mathbf{S5}]$.

[3] Это также видно на рис. 2.

С другой стороны, $A \in \mathbf{Alt}_4 \leftthreetimes \mathbf{S5}$, ибо в противном случае, по предложению 4.7, G – p-морфный образ конуса $F \uparrow (x_1, x_2)$, где F – полупроизведение шкал $F_1 \models \mathbf{Alt}_4$ и $F_2 \models \mathbf{S5}$. По лемме 2.12, этот конус является полупроизведением шкал $F \uparrow x_1$ и $F \uparrow x_2$. По лемме 2.6, первая них – $\mathbf{Alt}_4$-шкала. Вторая – конус в $\mathbf{S5}$-шкале, и значит, это – *сгусток* (шкала с универсальным отношением).

Однако покажем, что G не может быть p-морфным образом такого полупроизведения. Предположим, что требуемый p-морфизм f существует и $f(x_0, y) = (0,1)$. Тогда существуют точки (x_i, y) $(i = 1,\ldots,4)$ и (x_0, y') такие, что $f(x_i, y) = (i, 1)$ и $f(x_0, y') = (0,2)$ (рис. 2). Тогда $f(x_0, y')Rf(x_2, y')$ и $f(x_2, y)Sf(x_2, y')$, откуда получаем $f(x_2, y') = (1, 2)$. Аналогично имеем $f(x_3, y') = (1,2)$ и $f(x_4, y') = (4, 2)$. Следовательно, (x_1, y') отображается в одну из точек $(2,2)$, $(3,2)$, а другая из них не является значением f. ■

Напомним, что модальная предикатная логика L *сильно полна по Крипке,* если каждая L-непротиворечивая теория выполнима в точке модели над L-шкалой. Методом селективных подмоделей канонической модели (описан в [11]) доказывается (подробное доказательство см. в [13]).

Теорема 4.9. *Каждая логика $\mathbf{QAlt}_n$ сильно полна по Крипке.*

Поскольку добавление замкнутых пропозициональных аксиом сохраняет сильную полноту по Крипке, получаем:

Следствие 4.10. *Каждая логика $\mathbf{QAlt}_n + \Box^m\bot$, где $m \geqslant 2$, сильно полна по Крипке.*

Пропозициональная формула alt_n соответствует первопорядковой универсальной формуле. Следовательно, по теореме Танаки–Оно [14, теорема 7.4.7], получаем:

Теорема 4.11. *Пусть*

$$\mathbf{\Lambda} \in \{\mathbf{Alt}_n \mid n \geqslant 1\} \cup \{\mathbf{Alt}_n + \Box^m\bot \mid n \geqslant 1,\ m \geqslant 2\}.$$

Тогда логика $\mathbf{Q\Lambda C}$ сильно полна по Крипке.

Отсюда имеем:

Теорема 4.12. *Если $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{Alt}_n$ или $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{Alt}_n + \Box^m\bot$, где $n \geqslant 3$ и $m \geqslant 2$, то логика $\mathbf{\Lambda} \rfloor \mathbf{S5}$ удовлетворяет (3S), а $\mathbf{\Lambda} \times \mathbf{S5}$ удовлетворяет (3P).*

Доказательство. По теореме 4.8, $\mathbf{\Lambda} \leftthreetimes \mathbf{S5} \neq \mathbf{\Lambda} \rfloor \mathbf{S5}$ и $[\mathbf{\Lambda}, \mathbf{S5}] \neq \mathbf{\Lambda} \times \mathbf{S5}$. По теореме 4.9, следствию 4.10 и предложению 3.4(1) $\mathbf{Q\Lambda} - 1 = \mathbf{\Lambda} \rfloor \mathbf{S5}$. Следовательно, $\mathbf{\Lambda}_1 \leftthreetimes \mathbf{S5} \neq \mathbf{Q\Lambda} - 1$. Аналогично, по теореме 4.11 и предложению

3.4(2), $\mathbf{Q\Lambda C} - 1 = \mathbf{\Lambda} \times \mathbf{S5}$. Следовательно, $\mathbf{Q\Lambda C} - 1 \neq [\mathbf{\Lambda}, \mathbf{S5}]$. ■

Проблема 4.13. *Найти аксиоматику логик вида* $\mathbf{Q\Lambda} - 1$ $(= \mathbf{\Lambda} \leftthreetimes \mathbf{S5})$ *и* $\mathbf{Q\Lambda C} - 1$ $(= \mathbf{\Lambda} \times \mathbf{S5})$, *где* $\mathbf{\Lambda}$ *— логика из теоремы 4.11.*

5. ЛОКАЛЬНАЯ ТАБЛИЧНОСТЬ И МОДАЛЬНАЯ ГЛУБИНА

Сначала напомним некоторые определения и факты из [15]. Рассматриваем N-модальные пропозициональные формулы и логики.

Определение 5.1. *Для формулы A модальной глубиной $md(A)$ называется максимальное число вложенных вхождений модальностей:*

$$md(\bot) = md(p_j) = 0;$$
$$md(A \to B) = \max(md(A), md(B));$$
$$md(\Box_i A) = md(A) + 1.$$

Определение 5.2. *Модальная глубина $md_{\mathbf{\Lambda}}(A)$ формулы A в модальной логике $\mathbf{\Lambda}$ определяется следующим образом*:

$$md_{\mathbf{\Lambda}}(A) := \min\{md(B) \,|\, \mathbf{\Lambda} \vdash A \leftrightarrow B\}.$$

Определим *модальную глубину $md(\mathbf{\Lambda})$ логики $\mathbf{\Lambda}$*:

$$md(\mathbf{\Lambda}) := \begin{cases} \max\{md_{\mathbf{\Lambda}}(B) \,|\, B - \text{пропозициональная} \\ \text{формула}\}, \quad \text{если существует;} \\ \infty \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Определение 5.3. *Логика $\mathbf{\Lambda}$ локально таблична, если для любого конечного k существует лишь конечное число k-формул, попарно не эквивалентных в $\mathbf{\Lambda}$.*

Предложение 5.4.

(1) Каждая локально табличная логика финитно аппроксимируема.

(2) Каждая логика конечной модальной глубины локально таблична.

6. ЛОГИКИ, СОГЛАСОВАННЫЕ ПО ПОЛУПРОИЗВЕДЕНИЮ С S5

В этом разделе мы покажем, что логики $\mathbf{K05} + \Box^n \bot$ согласованы по полупроизведению с $\mathbf{S5}$ и что соответствующие полупроизведения логик финитно аппроксимируемы полупроизведениями. Введем обозначения:

$$\mathbf{\Lambda}_{0n} := \mathbf{K05} + \Box^n \bot, \quad \mathbf{\Lambda}_n := \mathbf{\Lambda}_{0n} \rfloor \mathbf{S5},$$

$$\mathbf{\Lambda}'_n := [\mathbf{\Lambda}_{0n}, \mathbf{S5}].$$

Теорема 6.1. $md(\mathbf{\Lambda}_n) \leqslant 2n - 1$.

Доказательство использует бисимуляционные игры (см. [15, 16]).

Отсюда, по предложению 5.4, получаем:

Следствие 6.2. *Логики $\mathbf{\Lambda}_n$, $\mathbf{\Lambda}'_n$ финитно аппроксимируемы.*

Для доказательства согласованности по полупроизведению с $\mathbf{S5}$ и финитной аппроксимируемости полупроизведениями достаточно постоить p-морфизм полупроизведения конечной $\mathbf{\Lambda}_{0n}$-шкалы и конечного сгустка на конечный $\mathbf{\Lambda}_n$-конус. Мы строим его за несколько шагов (леммы 6.6—6.10).

Определение 6.3. *Пусть* $F = (W, R_1, \ldots, R_N)$ *и* $F' = (W', R'_1, \ldots, R'_N)$ *— шкалы. Отображение* $g : W \to W'$ *называется сильным гомоморфизмом* F *в* F' *если для всех* $w, v \in W$ *и каждого* i,

$$wR_i v \Leftrightarrow g(w) R'_i g(v).$$

Лемма 6.4. *Всякий сюръективный сильный гомоморфизм является p-морфизмом и элементарной эквивалентностью для формул без равенства.*

Таким образом, если $\mathbf{\Lambda}$ элементарна (в сигнатуре без равенства), то класс шкал $\mathbf{V}(\mathbf{\Lambda})$ устойчив относительно сильных гомоморфных прообразов.

Определение 6.5. *Пусть* $F = (W, R_1, R_2)$ — $\mathbf{K} \rfloor \mathbf{S5}$*-шкала.*

- *Строкой* в F называется класс эквивалентности по отношению $(R_1 \cup R_1^{-1})^*$.
- *Столбцом* в F называется класс эквивалентности по отношению R_2.
- *Блоком* в F называется непустое пересечение строки и столбца.
- F *организована*, если для любой ее строки U шкала $(W, R_1) \upharpoonright U$ — с корнем.
- F — *ровная*, если каждый ее столбец состоит из блоков одного размера.
- F — *прямая*, если все ее блоки одноэлементны.

Лемма 6.6 (об организации). *Каждая конечная $\mathbf{\Lambda}_n$-шкала с корнем — сильный гомоморфный образ конечной организованной $\mathbf{\Lambda}_n$-шкалы с корнем; аналогично для $\mathbf{\Lambda}'_n$-шкал.*

Доказательство. Пусть $F = (W, R_1, R_2)$ — $\mathbf{\Lambda}_n$-шкала с корнем. Точка $a \in W$ называется R_1*-минимальной*, если $R_1^{-1}(a) = \varnothing$. Положим

$$V := \{(a, x) \,|\, aR_1 - \text{минимальна}, \ aR_1^* x\}$$

и определим отношения на V:

$$(a, x) S_1 (b, y) \Leftrightarrow a = b \;\&\; xR_1 y,$$

$$(a, x) S_2 (b, y) \Leftrightarrow xR_2 y.$$

Тогда (V, S_1, S_2) – организованная шкала с корнем, а отображение $(a, x) \mapsto x$ – искомый сильный гомоморфизм на F. ■

Лемма 6.7 (о выравнивании). *Каждая конечная организованная $\mathbf{\Lambda}_n$-шкала с корнем – сильный гомоморфный образ конечной ровной $\mathbf{\Lambda}_n$-шкалы с корнем; аналогично для $\mathbf{\Lambda}'_n$-шкал.*

Доказательство. Для выравнивания шкалы $F = (W, R_1, R_2)$ добавляем точки к блокам так, чтобы все блоки одного столбца были одного размера. При этом пользуемся тем, что, для любых блоков β и γ в F и $k \in \{1,2\}$,

$$\exists x \in \beta \exists y \in \gamma x R_k y \Leftrightarrow \forall x \in \beta \forall y \in \gamma x R_k y. \qquad (1)$$

Поэтому пишем $\beta R_k \gamma$, если $\exists x \in \beta \exists y \in \gamma x R_k y$. Заменяем каждый блок β в F блоком β', размер которого – максимальный в столбце, содержащем β. Пусть $W' := \{\beta' | \beta - \text{блок в } F\}$. В силу (1), можем корректно определить для $x \in \beta'$, $y \in \gamma'$ и $k \in \{1,2\}$,

$$x R'_k y \Leftrightarrow \beta R_k \gamma.$$

Тогда шкала $F' := (W', R'_1, R'_2)$ – ровная. Сюръективное отображение, переводящее каждую точку каждого блока β' из F' в точку блока β из F – сильный гомоморфизм. ■

Лемма 6.8 (о выпрямлении). *Каждая конечная ровная $\mathbf{\Lambda}_n$-шкала с корнем – сильный гомоморфный образ конечной прямой $\mathbf{\Lambda}_n$-шкалы с корнем; аналогично для $\mathbf{\Lambda}'_n$-шкал.*

Доказательство. Для выпрямления шкалы $F = (W, R_1, R_2)$ сначала строим шкалу, где все столбцы имеют размер n, равный размеру наибольшего столбца в F. Для этого положим $W' = W \times n$,

$$(x,i) R'_1 (y,j) \Leftrightarrow x R_1 y \,\&\, i = j,$$

и определим R'_2 так, что если β и γ – блоки из одного столбца в F, $x \in \beta$, и $y \in \gamma$, то, для фиксированных нумераций N_β блока β и N_γ блока γ,

$$(x,i) R'_2 (y,j) \Leftrightarrow N_\beta(x) + i \equiv N_\gamma(y) + j \,(mod\, |\beta|). \quad (2)$$

Тогда отображение $(x,i) \mapsto x$ – сильный гомоморфизм шкалы $F' = (W', R'_1, R'_2)$ на F. ■

Из лемм 6.6, 6.7, 6.8 и 6.4 непосредственно получаем:

Лемма 6.9. *Каждая конечная $\mathbf{\Lambda}_n$-шкала с корнем – p-морфный образ конечной прямой $\mathbf{\Lambda}_n$-шкалы с корнем; аналогично для $\mathbf{\Lambda}'_n$-шкал.*

Лемма 6.10. *Каждая конечная прямая $\mathbf{\Lambda}_n$-шкала с корнем изоморфна полупроизведению $\mathbf{\Lambda}_{0n}$-шкалы и сгустка; аналогично для $\mathbf{\Lambda}'_n$-шкал и произведений.*

Доказательство. Если $F = (W, R_1, R_2)$ – конечная прямая шкала с корнем x_0, то она изоморфна (полу)произведению шкалы $(R_1^*(x_0), R_1 \restriction R_1^*(x_0))$ и сгустка, точки которого – это строки F. ■

Теорема 6.11.

(1) Логики $\mathbf{K05} + \Box^n\bot$ *и* $\mathbf{S5}$ *согласованы по полупроизведению и по произведению.*

(2) Логики $(\mathbf{K05} + \Box^n\bot) \leftthreetimes \mathbf{S5}$ *финитно аппроксимируемы полупроизведениями, а* $(\mathbf{K05} + \Box^n\bot) \times \mathbf{S5}$ – *произведениями.*

Доказательство. Пусть опять $\mathbf{\Lambda}_{0n} := \mathbf{K05} + \Box^n\bot$, $\mathbf{\Lambda}_n := \mathbf{\Lambda}_{0n} \rfloor \mathbf{S5}$, $\mathbf{\Lambda}'_n := \mathbf{\Lambda}_{0n} \times \mathbf{S5}$.

(1) Пусть $A \notin \mathbf{\Lambda}_n$. По следствию 6.2, $\mathbf{\Lambda}_n$ финитно аппроксимируема. Следовательно, A опровергается в конечной $\mathbf{\Lambda}_n$-шкале F с корнем. По леммам 6.9 и 6.10, F – p-морфный образ полупроизведения G конечной $\mathbf{\Lambda}_{0n}$-шкалы и конечного сгустка. Поскольку p-морфизмы сохраняют общезначимость модальных формул, $A \notin \mathbf{\Lambda}_{0n} \leftthreetimes \mathbf{S5}$.

Следовательно, $\mathbf{\Lambda}_{0n} \leftthreetimes \mathbf{S5} \subseteq \mathbf{\Lambda}_n$. Обратное утверждение следует из леммы 2.15(3).

Доказательство для $\mathbf{\Lambda}'_n$ аналогично.

(2) Так как G конечна, $\mathbf{\Lambda}_{0n} \leftthreetimes \mathbf{S5}$ финитно аппроксимируема полупроизведениями, а $\mathbf{\Lambda}_{0n} \times \mathbf{S5}$ – произведениями. ■

Результаты разделов 2, 4, 6 получены В.Б. Шехтманом, разделов 1, 3, 5 – Д.П. Шкатовым.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа первого автора выполнена в Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН при поддержке Российского научного фонда в рамках проекта 21-11-00318.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Segerberg K.* “Two-dimensional modal logic,” *Journal of Philosophical Logic*. 1973. V. 2. № 1. P. 77–96.
2. *Шехтман В.Б.* “Двумерные модальные логики,” *Математические заметки*. 1978. Т. 23. С. 759–772.
3. *Gabbay D., Kurucz A., Wolter F., Zakharyaschev M. Many-Dimensional Modal Logics: Theory and Applications.* Elsevier, 2003.
4. *Kurucz A.* “Combining modal logics,” In: *P. Blackburn*, eds, *Handbook of Modal Logic* (Elsevier, 2008), p. 869–924.
5. *Fischer-Servi G.* “On modal logic with an intuitionistic base,” *Studia Logica*. 1977. V. 36. P. 141–149.

6. *Gabbay D., Shehtman V.* “Products of modal logics, Part 1,” *Logic Journal of the IGPL*. 1998. V. 6. № 1. P. 73–146.
7. *Wolter F., Zakharyaschev M.* “Decidable fragments of first-order modal logics,” *The Journal of Symbolic Logic*. 1999. V. 66. № 3. P. 1415–1438.
8. *Rybakov M., Shkatov D.* Undecidability of first-order modal and intuitionistic logics with two variables and one monadic predicate letter. Studia Logica. 2019. V. 107. № 4. P. 695–717.
9. *Shehtman V., Shkatov D.* “On one-variable fragments of modal predicate logics,” *Proceedings of SYSMICS 2019* (University of Amsterdam, 2019), p. 129–132.
10. *Shehtman V.* “Simplicial semantics and one-variable fragments of modal predicate logics,” *Topology, Algebra, and Categories in Logic, 2019*, the book of abstracts (Nice, 2019), p. 172–173.
11. *Shehtman V.* “On Kripke completeness of modal predicate logics around quantified K5,” *Annals of Pure and Applied Logic*. 2023. V. 174. № 2. P. 103202.
12. *Kracht M. Tools and Techniques in Modal Logic.* Elsevier, 1999.
13. *Shehtman V., Shkatov D.* “Kripke (in)completeness of predicate modal logics with axioms of bounded alternativity,” *Proceedings of FOMTL 2023* (ESSLLI, 2023), p. 26–29.
14. *Gabbay D., Shehtman V., Skvortsov D. Quantification in Nonclassical Logic, Volume 1.* Elsevier, 2009.
15. *Shehtman V.* “Segerberg squares of modal logics and theories of relation algebras,” In: *S. Odintsov*, ed., *Larisa Maksimova on Implication, Interpolation, and Definability* (Springer, 2018), p. 245–296.
16. *Шехтман В.Б.* “Бисимуляционные игры и локально табличные логики”. *Успехи математических наук*. 2016. Т. 71. С. 185–186.

SEMIPRODUCTS, PRODUCTS, AND MODAL PREDICATE LOGICS: SOME EXAMPLES

V. Shehtman[a] and D. Shkatov[b]

[a]*Steklov Mathematical Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*
[b]*University of the Witwatersrand, Johannesburg, South Africa*
Presented by Academician of the RAS L.D. Beklemishev

We study two kinds of combined modal logics, semiproducts and products with S5, and their correlation with modal predicate logics. We obtain examples of propositional modal logics when these semiproducts or products are axiomatized in the minimal way (semiproduct- or product-matching with S5), as well as counterexamples for these properties. The fmp for (semi)products together with (semi)product-matching allow us to show decidability of corresponding 1-variable modal predicate logics.

Keywords: semiproducts of modal logics, products of modal logics, predicate modal logic