ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2023, том 513, с. 44–50

МАТЕМАТИКА

УДК 51.71

АНТИКОММУТАТОР СВОБОДНОГО ПОЛЯ ЭЛЕКТРОНОВ ДИРАКА И ЕГО НУЛИ НА ВРЕМЕННЫХ ИНТЕРВАЛАХ

© 2023 г. Е. А. Карацуба[1,*]

Представлено академиком РАН И.А. Соколовым
Поступило 20.06.2023 г.
После доработки 21.07.2023 г.
Принято к публикации 17.08.2023 г.

Получены оценки временных интервалов, содержащих нуль антикоммутатора Паули–Йордана–Дирака в дискретном представлении в пространственно одномерном и трехмерном случаях.

Ключевые слова: теория свободного поля электронов Дирака, антикоммутатор, нули, временные интервалы, комптоновская длина волны электрона

DOI: 10.31857/S2686954323600519, **EDN:** GYUDEU

ВВЕДЕНИЕ

Перестановочные функции занимают важное место в современной квантовой теории поля, поскольку связаны с немногими наблюдаемыми величинами этой теории. Первые перестановочные соотношения были построены Дираком для фотонов, подчиняющихся статистке Бозе-Эйнштейна в [1]. Затем Паули и Йордан представили в [2] антикоммутатор для фермионов. С более подробным описанием этот антикоммутатор появился в статье Дирака [3] (в современном виде содержится в [4], см. также [5, 6]).

Как отмечено в [7], в ранних работах по квантовой теории поля [1–3, 8–12], функции поля, а вместе с ними и перестановочные функции вводились в соответствии с концепцией квантования в виде сумм по состояниям, определяемым волновыми векторами, и лишь затем они заменялись соответствующими интегралами. Впоследствии перестановочные функции рассматривались в основном в виде интегралов (см., например, [13]; см. также [14, 15]).

В настоящей статье мы рассмотрим антикоммутатор, который появляется в выражении для распределения электронов свободного поля релятивистской теории Дирака (см. [2–4]). Однако, в отличие от изучавшихся до этого интегральных аналогов перестановочной функции, мы будем исследовать эту функцию в том виде, в котором она была введена первоначально, в так называемом дискретном импульсном представлении, т.е. в виде суммы по волновым векторам. При этом мы будем основываться на физических обоснованиях, данных в [4], и будем следовать обозначениям, введенным в [4].

Перестановочная D-функция в трехмерном (по пространству) или, что то же самое, 4-х мерном (по Минковскому) виде определяется выражением:

$$D(\overline{r},t) = \\ = L^{-3}\sum_{k_x=-\infty}^{+\infty}\sum_{k_y=-\infty}^{+\infty}\sum_{k_z=-\infty}^{+\infty}\exp\left(2\pi i\frac{k_x x+k_y y+k_z z}{L}\right)\times \\ \times\frac{\sin c\frac{2\pi}{L}t\sqrt{k_x^2+k_y^2+k_z^2+\tilde{k}^2}}{c\frac{2\pi}{L}\sqrt{k_x^2+k_y^2+k_z^2+\tilde{k}^2}}, \quad (1)$$

где $\tilde{k}=\dfrac{k_0 L}{2\pi}$.

В [4] подробно доказывается следующее свойство антикоммутатора свободного поля релятивистской теории Дирака $D(\overline{r},t)$: если

$$D(\overline{r}''-\overline{r}',t''-t')=0, \quad (2)$$

то измерения плотности электронного заряда в точках $(\overline{r}',t')$ и $(\overline{r}'',t'')$ не влияют друг на друга, и наоборот. Запишем функцию $D(\overline{r},t)$ в виде

$$D(\overline{r},t)=\sum_{\overline{k}}L^{-3}e^{i\overline{k}\overline{r}}\frac{\sin(ct\sqrt{k^2+k_0^2})}{c\sqrt{k^2+k_0^2}}, \quad (3)$$

[1]*Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление" Российской академии наук, Москва, Россия*
**E-mail: ekaratsuba@gmail.com*

где $\bar{k}$ есть волновой вектор длины $|\bar{k}| = k = \frac{2\pi}{L}\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$; k_x, k_y, k_z — любые целые числа,

$$k_0 = 2\pi\frac{mc}{h};$$

m есть масса электрона, c — скорость света, h — постоянная Планка. Здесь L есть нормировочный множитель, представляющий длину ребра куба, в котором заданы собственные функции операторов энергии-импульса, удовлетворяющие условиям периодичности на стенках этого куба. Численные значения этих констант для электрона таковы: $k_0 = \frac{mc}{\hbar} \approx 2.6 \times 10^8$ м, $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, $10^{-10} < L < 10^{-6}$ м, $c \approx 2.9 \times 10^8$ м/сек. Заметим также, что нормированная комптоновская длина волны электрона $\bar{\lambda} = \frac{1}{k_0} \approx 2.4 \times 10^{-12}$ м.

ПРОСТРАНСТВЕННО-ОДНОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

В этом случае $k_y = k_z = 0$, т.е. $k = \frac{2\pi}{L}k_x$, k_x — целые числа, $\overline{kr} = \frac{2\pi}{L}k_x x$, отсюда

$$D(x,t) = \sum_{k_x=-\infty}^{+\infty} L^{-1} e^{i\frac{2\pi}{L}k_x x} \frac{\sin ct\sqrt{\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 k_x^2 + k_0^2}}{c\sqrt{\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 k_x^2 + k_0^2}}.$$

Заменяя в последней формуле k_x на k и вынося за знак радикала множитель $\frac{2\pi}{L}$, получаем

$$D(x,t) = \frac{1}{L}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i\frac{kx}{L}} \frac{\sin c\frac{2\pi}{L}t\sqrt{k^2 + k_1^2}}{c\frac{2\pi}{L}\sqrt{k^2 + k_1^2}}, \tag{4}$$

где

$$k_1 = \frac{k_0 L}{2\pi}. \tag{5}$$

Выделяя в (4) слагаемое при $k = 0$, находим

$$D(x,t) = \frac{1}{L}\frac{\sin ctk_0}{ck_0} + \frac{2}{L}\sum_{k=1}^{\infty}\cos 2\pi\frac{kx}{L}\frac{\sin c\frac{2\pi}{L}t\sqrt{k^2 + k_1^2}}{c\frac{2\pi}{L}\sqrt{k^2 + k_1^2}}. \tag{6}$$

Рассмотрим функцию $D_{4N}(x,t)$, где N — натуральное число, вида

$$D_{4N}(x,t) = \frac{1}{L}\frac{\sin ctk_0}{(ck_0)^{4N+1}} + \frac{2}{L}\sum_{k=1}^{\infty}\cos 2\pi\frac{kx}{L}\frac{\sin c\frac{2\pi}{L}t\sqrt{k^2 + k_1^2}}{\left(c\frac{2\pi}{L}\sqrt{k^2 + k_1^2}\right)^{4N+1}}. \tag{7}$$

Очевидно равенство

$$\frac{d^{4N}}{dt^{4N}} D_{4N}(x,t) = D(x,t).$$

Определим количество нулей функции $D_{4N}(x,t)$ на интервале $t_a < t < t_b$. Представим $D_{4N}(x,t)$ в следующем виде

$$D_{4N}(x,t) = \frac{1}{L(ck_0)^{4N+1}}\left(\sin ctk_0 + F(t)\right), \tag{8}$$

где

$$F(t) = 2\sum_{k=1}^{\infty}\cos 2\pi\frac{kx}{L}\left(\frac{k_0 L}{2\pi\sqrt{k^2 + k_1^2}}\right)^{4N+1} \times \sin c\frac{2\pi}{L}t\sqrt{k^2 + k_1^2} = 2\left(\frac{k_0 L}{2\pi}\right)^{4N+1} \times \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^2 + k_1^2}\right)^{\frac{4N+1}{2}}\cos 2\pi\frac{kx}{L}\sin c\frac{2\pi}{L}t\sqrt{k^2 + k_1^2}. \tag{9}$$

Поскольку в (9) функция $(k^2 + k_1^2)^{-\frac{4N+1}{2}}$ убывает монотонно с возрастанием k, то для $|F(t)|$ с учетом (5) получаем оценку:

$$|F(t)| \leqslant 2\left(\sum_{k=1}^{\infty}(k^2 + k_1^2)^{-\frac{4N+1}{2}}\right)\left(\frac{k_0 L}{2\pi}\right)^{4N+1} \leqslant 2k_1^{4N+1}\left((1 + k_1^2)^{-\frac{4N+1}{2}} + \int_1^{\infty}(u^2 + k_1^2)^{-\frac{4N+1}{2}}du\right). \tag{10}$$

Последний интеграл из (10) оценивается следующим образом:

$$\int_1^{\infty}(u^2 + k_1^2)^{-\frac{4N+1}{2}}\frac{du^2}{2u} \leqslant \frac{1}{2}\int_1^{\infty}(w + k_1^2)^{-\frac{4N+1}{2}}dw = \frac{1}{2}\frac{1}{1 - \frac{4N+1}{2}}(w + k_1^2)^{-\frac{4N+1}{2}+1}\Bigg|_1^{\infty} = \frac{1}{4N-1}(1 + k_1^2)^{-\frac{4N-1}{2}}.$$

Отсюда для $|F(t)|$ имеем:

$$|F(t)| \leqslant 2\left(\frac{k_1^2}{1+k_1^2}\right)^{\frac{4N+1}{2}}\left(1+\frac{1+k_1^2}{4N-1}\right) = \\ = 2\left(1-\frac{1}{1+k_1^2}\right)^{\frac{4N+1}{2}}\left(1+\frac{1+k_1^2}{4N-1}\right). \quad (11)$$

При $N = 2 + \left[k_1^2\right]$ справедливы неравенства $N \geqslant 1 + k_1^2$; $\frac{1+k_1^2}{4N-1} \leqslant \frac{1}{3}$; $4N + 1 \geqslant 4(1 + k_1^2)$; и из (11)

$$|F(t)| < \frac{8}{3}\left(1-\frac{1}{1+k_1^2}\right)^{\frac{4N+1}{2}} \leqslant \frac{8}{3}e^{-\frac{4N+1}{2(1+k_1^2)}} \leqslant \frac{8}{3}e^{-2} < \frac{2}{3},$$

следовательно, функция $\sin ck_0t + F(t)$ из (8), и вместе с ней функция $D_{4N}(x,t)$, имеет на промежутке (t_a, t_b) не меньше, чем

$$\frac{t_b - t_a}{\pi}ck_0 - 1$$

нулей. Отсюда и из (6)–(7) функция $D(x,t)$ имеет на (t_a, t_b) не меньше, чем

$$\frac{t_b - t_a}{\pi}ck_0 - 1 - 4N \geqslant \frac{t_b - t_a}{\pi}ck_0 - 9 - 4\left(\frac{k_0L}{2\pi}\right)^2$$

нулей. В частности, на интервале (t_a, t_b) есть по крайней мере один нуль функции $D(x,t)$, если

$$\frac{t_b - t_a}{\pi}ck_0 > 9 + 4\left(\frac{k_0L}{2\pi}\right)^2.$$

Таким образом, мы доказали теорему

Теорема 1. *Пусть $\bar{\lambda}$ – комптоновская длина волны электрона. Функция $D(x,t)$ имеет на промежутке (t_a, t_b) по крайней мере один нуль, при условии, что*

$$t_b - t_a > \frac{9\pi\bar{\lambda}}{c} + \frac{L^2}{\pi c\bar{\lambda}}. \quad (12)$$

ПРОСТРАНСТВЕННО-ТРЕХМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

Рассмотрим антикоммутатор Дирака в виде (1). Имеет место

Теорема 2. *Пусть $\bar{\lambda}$ – комптоновская длина волны электрона. Функция $D(\bar{r},t)$ имеет на промежутке (t_a, t_b) по крайней мере один нуль, при условии, что*

$$t_b - t_a > \frac{13\pi\bar{\lambda}}{c} + \frac{2L^2}{\pi c\bar{\lambda}}. \quad (13)$$

Доказательство теоремы 2. Выделяя в (1) слагаемое с $k_x = k_y = k_z = 0$, получаем равенство:

$$L^3D(\bar{r},t) = \frac{\sin c\frac{2\pi}{L}\tilde{k}t}{c\frac{2\pi}{L}\tilde{k}} + G(t) = \frac{\sin ctk_0}{ck_0} + G(t), \quad (14)$$

где

$$G(t) = \sum\sum\sum_{k_x^2+k_y^2+k_z^2\neq 0} \exp\left(2\pi i\frac{k_xx + k_yy + k_zz}{L}\right)\times \\ \times\frac{\sin c\frac{2\pi}{L}t\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 + \tilde{k}^2}}{c\frac{2\pi}{L}\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 + \tilde{k}^2}}. \quad (15)$$

Поскольку функция $D(\bar{r},t)$ – вещественная, а комплексно сопряженная к ней функция $\overline{D(\bar{r},t)}$ с ней совпадает:

$$\overline{D(\bar{r},t)} = \\ = L^{-3}\sum_{k_x=-\infty}^{+\infty}\sum_{k_y=-\infty}^{+\infty}\sum_{k_z=-\infty}^{+\infty}\exp\left(-2\pi i\frac{k_xx + k_yy + k_zz}{L}\right)\times \\ \times\frac{\sin c\frac{2\pi}{L}t\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 + \tilde{k}^2}}{c\frac{2\pi}{L}\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 + \tilde{k}^2}} = D(\bar{r},t),$$

из (14)–(15) следует, что функция $G(t)$ – вещественная, т.е. при вещественных t принимает вещественные значения, и к ней применимы подходы предыдущего параграфа. Пусть, для краткости,

$$\Phi(t) = \frac{\sin ctk_0}{ck_0} + G(t), \quad (16)$$

тогда нули $\Phi(t)$ являются нулями $D(\bar{r},t)$. Пусть N – натуральное число, $N \geqslant 2$, и

$$\Phi_{4N}(t) = \frac{\sin ctk_0}{(ck_0)^{4N+1}} + G_{4N}(t), \quad (17)$$

где

$$G_{4N}(t) = \sum\sum\sum_{k_x^2+k_y^2+k_z^2\neq 0}\exp\left(2\pi i\frac{k_xx + k_yy + k_zz}{L}\right)\times \\ \times\frac{\sin c\frac{2\pi}{L}t\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 + \tilde{k}^2}}{\left(c\frac{2\pi}{L}\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 + \tilde{k}^2}\right)^{4N+1}}.$$

Очевидно, что

$$\frac{d^{4N}}{dt^{4N}}\Phi_{4N}(t) = \Phi(t).$$

Оценим снизу количество нулей $\Phi_{4N}(t)$, лежащих на интервале (t_a, t_b). Как и выше, получаем

$$\Phi_{4N}(t) = \frac{1}{(ck_0)^{4N+1}}(\sin ctk_0 + (ck_0)^{4N+1}G_{4N}(t)), \quad (18)$$

причем

$$|(ck_0)^{4N+1}G_{4N}(t)| \leqslant$$
$$\leqslant \sum\sum\sum_{k_x^2+k_y^2+k_z^2\neq 0}\left(\frac{k_0}{\frac{2\pi}{L}\sqrt{k_x^2+k_y^2+k_z^2+\tilde{k}^2}}\right)^{4N+1} = \tilde{k}^{4N+1}W, \quad (19)$$

где

$$W = \sum\sum\sum_{k_x^2+k_y^2+k_z^2\neq 0}(k_x^2+k_y^2+k_z^2+\tilde{k}^2)^{-\frac{4N+1}{2}}.$$

Оценим W сверху. Выделим в W слагаемые с

$$1 \leqslant k_x^2+k_y^2+k_z^2 \leqslant 3,$$

а остальные слагаемые объединим в сумму W_4. Получим

$$W = 6(1+\tilde{k}^2)^{-\frac{4N+1}{2}} + 12(2+\tilde{k}^2)^{-\frac{4N+1}{2}} + \\ + 8(3+\tilde{k}^2)^{-\frac{4N+1}{2}} + W_4, \quad (20)$$

где

$$W_4 = \sum_{k_x^2+k_y^2+k_z^2\geqslant 4}(k_x^2+k_y^2+k_z^2+\tilde{k}^2)^{-\frac{4N+1}{2}}. \quad (21)$$

Оценим сумму из (21). Принимая во внимание, что $k_x^2+k_y^2+k_z^2 \geqslant 4$, и, следовательно, хотя бы одно из чисел $|k_x|$, $|k_y|$, $|k_z|$ больше 1, а также, что k_x, k_y, k_z принимают отрицательные и положительные значения, находим

$$W_4 \leqslant 3\cdot 8\sum_{k_x>1}\sum_{k\geqslant 0}\sum_{k_z\geqslant 0}(k_x^2+k_y^2+k_z^2+\tilde{k}^2)^{-\frac{4N+1}{2}}. \quad (22)$$

В (22) слагаемые по k_x с ростом k_x монотонно убывают, поэтому

$$W_4 \leqslant 24\sum_{k_y\geqslant 0}\sum_{k_z\geqslant 0}\int_1^\infty(u^2+k_y^2+k_z^2+\tilde{k}^2)^{-\frac{4N+1}{2}}du \leqslant$$
$$\leqslant 12\sum_{k_y\geqslant 0}\sum_{k_z\geqslant 0}\int_1^\infty(u^2+k_y^2+k_z^2+\tilde{k}^2)^{-\frac{4N+1}{2}}du^2 =$$
$$= \frac{24}{4N-1}\sum_{k_y\geqslant 0}\sum_{k_z\geqslant 0}(1+k_y^2+k_z^2+\tilde{k}^2)^{-\frac{4N-1}{2}} =$$
$$= \frac{24}{4N-1}\sum_{k_y\geqslant 0}\left((1+k_y^2+\tilde{k}^2)^{-\frac{4N-1}{2}} + \right. \quad (23)$$
$$\left. + \sum_{k_z>0}(1+k_y^2+k_z^2+\tilde{k}^2)^{-\frac{4N-1}{2}}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{24}{4N-1}\sum_{k_y\geqslant 0}\left((1+k_y^2+\tilde{k}^2)^{-\frac{4N-1}{2}} + \right.$$
$$\left. + \int_0^\infty(1+\tilde{k}^2+k_y^2+v^2)^{-\frac{4N-1}{2}}dv\right).$$

Для последнего интеграла из (23) имеем

$$\int_0^\infty(1+\tilde{k}^2+k_y^2+v^2)^{-\frac{4N-1}{2}}dv =$$
$$= \int_0^1(1+\tilde{k}^2+k_y^2+v^2)^{-\frac{4N-1}{2}}dv +$$
$$+ \int_1^\infty(1+\tilde{k}^2+k_y^2+v^2)^{-\frac{4N-1}{2}}\frac{dv^2}{2v} \leqslant$$
$$\leqslant (1+\tilde{k}^2+k_y^2)^{-\frac{4N-1}{2}} + \frac{1}{4N-3}(2+\tilde{k}^2+k_y^2)^{-\frac{4N-3}{2}}.$$

Отсюда

$$W_4 \leqslant \frac{24}{4N-1}\sum_{k_y\geqslant 0}\left(2(1+\tilde{k}^2+k_y^2)^{-\frac{4N-1}{2}} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{4N-3}(2+\tilde{k}^2+k_y^2)^{-\frac{4N-3}{2}}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{24}{4N-1}\left(2(1+\tilde{k}^2)^{-\frac{4N-1}{2}} + \right.$$
$$+ \frac{1}{4N-3}(2+\tilde{k}^2)^{-\frac{4N-3}{2}} +$$
$$+ 2\int_0^\infty(1+\tilde{k}^2+w^2)^{-\frac{4N-1}{2}}dw +$$
$$\left. + \frac{1}{4N-3}\int_0^\infty(2+\tilde{k}^2+w^2)^{-\frac{4N-3}{2}}dw\right).$$

Последние два интеграла оцениваются подобно вышеприведенным:

$$\int_0^\infty(1+\tilde{k}^2+w^2)^{-\frac{4N-1}{2}}dw = \int_0^1(1+\tilde{k}^2+w^2)^{-\frac{4N-1}{2}}dw +$$
$$+ \int_1^\infty(1+\tilde{k}^2+w^2)^{-\frac{4N-1}{2}}\frac{dw^2}{2w} \leqslant$$
$$\leqslant (1+\tilde{k}^2)^{-\frac{4N-1}{2}} + \frac{1}{2}\int_1^\infty(1+\tilde{k}^2+w^2)^{-\frac{4N-1}{2}}dw^2 =$$
$$= (1+\tilde{k}^2)^{-\frac{4N-1}{2}} + \frac{1}{4N-3}(2+\tilde{k}^2)^{-\frac{4N-3}{2}}.$$

Аналогично

$$\int_0^\infty (2+\tilde{k}^2+w^2)^{-\frac{4N-3}{2}}dw \leqslant (2+\tilde{k}^2)^{-\frac{4N-3}{2}} + \frac{1}{4N-5}(3+\tilde{k}^2)^{-\frac{4N-5}{2}}.$$

Таким образом, получаем для W_4 следующую оценку:

$$W_4 \leqslant \frac{24}{4N-1}\left(4(1+\tilde{k}^2)^{-\frac{4N-1}{2}} + \frac{4}{4N-3}(2+\tilde{k}^2)^{-\frac{4N-3}{2}} + \frac{1}{(4N-3)(4N-5)}(3+\tilde{k}^2)^{-\frac{4N-5}{2}}\right). \quad (24)$$

Из (20) и (24) находим

$$W \leqslant 6(1+\tilde{k}^2)^{-\frac{4N+1}{2}} + 12(2+\tilde{k}^2)^{-\frac{4N+1}{2}} + 8(3+\tilde{k}^2)^{-\frac{4N+1}{2}} + \frac{96}{4N-1}(1+\tilde{k}^2)^{-\frac{4N-1}{2}} + \frac{96}{(4N-1)(4N-3)}(2+\tilde{k}^2)^{-\frac{4N-3}{2}} + \frac{24}{(4N-1)(4N-3)(4N-5)}(3+\tilde{k}^2)^{-\frac{4N-5}{2}}. \quad (25)$$

Поскольку $N \geqslant 2$, то показатели скобок в (25) – отрицательные числа, и каждую скобку из (25) можно заменить меньшим числом, а именно числом $1+\tilde{k}^2$. Тогда вместо (25) получаем

$$W \leqslant 26(1+\tilde{k}^2)^{-\frac{4N+1}{2}} + \frac{96}{4N-1}(1+\tilde{k}^2)^{-\frac{4N+1}{2}}(1+\tilde{k}^2) + \frac{96}{(4N-1)(4N-3)}(1+\tilde{k}^2)^{-\frac{4N+1}{2}}(1+\tilde{k}^2)^2 + \frac{24}{(4N-1)(4N-3)(4N-5)}(1+\tilde{k}^2)^{-\frac{4N+1}{2}}(1+\tilde{k}^2)^3.$$

Следовательно, правая часть в (19) удовлетворяет соотношению

$$\tilde{k}^{4N+1}W \leqslant \left(\frac{\tilde{k}^2}{1+\tilde{k}^2}\right)^{\frac{4N+1}{2}} B, \quad (26)$$

где

$$B = 26 + 96\frac{1+\tilde{k}^2}{4N-1} + 96\frac{1+\tilde{k}^2}{4N-1}\cdot\frac{1+\tilde{k}^2}{4N-3} + 24\frac{1+\tilde{k}^2}{4N-1}\cdot\frac{1+\tilde{k}^2}{4N-3}\cdot\frac{1+\tilde{k}^2}{4N-5}. \quad (27)$$

Из (26), (27) легко видеть, что если взять N таким, что

$$N = 3 + [2\tilde{k}^2], \quad (28)$$

где $[a]$ значит целую часть числа a, то $N \geqslant 2 + 2\tilde{k}^2$, $4N+1 \geqslant 8(1+\tilde{k}^2)$, $4N-1 \geqslant 7(1+\tilde{k}^2)$, $4N-3 \geqslant 5(1+\tilde{k}^2)$, $4N-5 \geqslant 3(1+\tilde{k}^2)$, и, следовательно,

$$B \leqslant 26 + 96\frac{1}{7} + 96\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{5} + 24\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3} \leqslant 43.$$

Кроме того, учитывая (28)

$$\left(\frac{\tilde{k}^2}{1+\tilde{k}^2}\right)^{\frac{4N+1}{2}} \leqslant \left(1-\frac{1}{1+\tilde{k}^2}\right)^{4(1+\tilde{k}^2)} = e^{4(1+\tilde{k}^2)\ln\left(1-\frac{1}{1+\tilde{k}^2}\right)} \leqslant e^{-4}.$$

Подставляя эти оценки в (26), находим

$$\tilde{k}^{4N+1}W \leqslant 43e^{-4} < \frac{43}{49}. \quad (29)$$

При N, удовлетворяющем (29), функция $\Phi_{4N}(t)$ из (18) имеет на промежутке (t_a, t_b) не меньше, чем

$$\frac{t_b - t_a}{\pi}ck_0 - 1$$

нулей. Отсюда и из (16)–(17) следует, что функция $D(\overline{r}, t)$ имеет на (t_a, t_b) не меньше, чем

$$\frac{t_b - t_a}{\pi}ck_0 - 1 - 4N \geqslant \frac{t_b - t_a}{\pi}ck_0 - 13 - 8\tilde{k}^2$$

нулей. В частности, если

$$t_b - t_a > \pi\frac{13 + 8\tilde{k}^2}{ck_0} = \frac{13\pi}{ck_0} + \frac{2k_0L^2}{\pi c}, \quad (30)$$

то на интервале (t_a, t_b) есть нуль $D(\overline{r}, t)$. Из (30) следует утверждение теоремы.

Теорема доказана.

Замечание 1. *Сравнение оценок* (12) *и* (13) *показывает, что при использовании примененного метода оценки временного интервала, содержащего нуль перестановочной функции, для трехмерного случая оценка оказывается менее точной. Оценка в трехмерном случае получилась бы несколько лучше, если брать немного меньшее число* N, *чем в* (28).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Существование нулей антикоммутатора Паули–Йордана–Дирака (внутри светового конуса) обсуждалось среди физиков (например, на школе-конференции по математической физике в Белграде "5th Mathematical Physics Meeting: Summer School and Conference on Modern Mathematical Physics (Belgrade, Serbia, July 6–17, 2008)") как аномалия теории Дирака, вследствие которой должна реализовываться ненаблюдаемая анизотропия пространства Минковского. При этом каждое новое слагаемое меняет расположение нулей перестановочной функции.

Следует отметить, что даже если сумма состоит из двух слагаемых вида членов ряда (3), добавление третьего очень осложняет определение нового местоположения нулей такой суммы. Когда же суммируются миллионы слагаемых, процесс определения, как изменилось местоположение нулей суммы с добавлением еще одного слагаемого, становится запредельно сложным.

Как известно, в квантовой теории поля свободных фермионов для того, чтобы провести независимое измерение (скажем, плотности фермионного заряда), необходимо и достаточно выполнение условия (2). Допустим, что имеется компьютер со сверхпамятью, который, зная все данные о Вселенной, подсчитал, что нуль по времени перестановочной функции будет в момент t'. Однако, следующий квант времени меняет расположение нулей, и уже через квант времени в момент t'' (очевидно, что квант времени – это минимальное время любого измерения) функция (3) будет иметь отличное от нуля значение, а значит, независимое измерение невозможно. Так что нули у перестановочной функции есть, а независимые измерения с их использованием произвести невозможно. С другой стороны, само наличие нулей по временной переменной t у антикоммутатора свободного поля фермионов Дирака, должно иметь какой-то дополнительный физический смысл.

Заметим, что исследовать конечную большую сумму со слагаемыми подобными членам бесконечного ряда (1) сложно (см. [16]), и уместно исследовать такую функцию в виде (1) или (3) с любыми целыми, положительными и отрицательными, значениями k_x, k_y, k_z, а сам бесконечный ряд рассматривать как приближение актуальной большой конечной суммы.

В дальнейшем предполагается исследовать антикоммутатор Паули–Йордана–Дирака на нули по пространственным переменным. Здесь возникает интересный вопрос о суммируемости ряда (3). Если суммировать его по кубам (как предполагалось в [4]) или шарам, то это будет расходящийся ряд. Поэтому естественно суммировать его по таким пространственным фигурам, которые будут определять условия сходимости этого ряда.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дирак П.А.М.* К созданию квантовой теории поля. Москва. Наука. 1990. The Quantum Theory of the Emission and Absorption of Radiation // Proceedings of the Royal Society of London. Series A. 1927. V. 114. № 767. P. 243–265.
2. *Дирак П.А.М.* К созданию квантовой теории поля. Москва. Наука. 1990. Discussion of the infinite distribution of electrons in the theory of the positron // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1934. V.30. № 2. P. 150–163.
3. *Jordan P., Pauli W.* Zur Quantenelektrodynamik ladungsfreier Felder // Zeitschrift für Physik. 1928. V. 47. P. 151–173.
4. *Шифф Л.* Квантовая механика. Издание 2-ое. Издательство Иностранной литературы. Москва. 1959.
5. *Karatsuba E.A.* Zeros and points of discontinuity of the commutator function of the free Dirac field // Journal of Physics: Conference Series. 2008. IOP Publ. V.128. Quantum Information and Foundations of Quantum Theory. P. 012015:1–11.
6. *Karatsuba E.A.* The Commutator Function of the Free Dirac Field in the Discrete Representation and its Zeros // Pacific Journal of Applied Mathematics. 2008. V. 1. № 2. P. 37–55.
7. *Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В.* Введение в теорию квантованных полей. Москва: "Наука", 1984.
8. *Дирак П.А.М.* К созданию квантовой теории поля. Москва. Наука. 1990. On the theory of quantum mechanics // Proceedings of the Royal Society of London. Series A. 1926. V. 112. P. 661–677.
9. *Дирак П.А.М.* К созданию квантовой теории поля. Москва. Наука. 1990. On the Annihilation of Electrons and Protons // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1930. V. 26. P. 361–375.
10. *Fermi E.* Quantum Theory of Radiation // Rev. Mod. Phys. 1932. V. 4 P. 87–132.
11. *Pauli W.* The Connection Between Spin and Statistics // Phys. Rev. 1940. V. 58 P. 716–722.
12. *Pauli W.* Relativistic Field Theories of Elementary Particles // Rev. Mod. Phys. 1941. V. 13. P. 203–232.
13. *Schwinger J.* Quantum Electrodynamics. I. A Covariant Formulation // Phys. Rev. 1948. V. 74. P. 1439–1461.
14. *Mercati F., Sergola M.* Pauli-Jordan function and scalar field quantization in κ-Minkowski noncommutative spacetime // Phys. Rev. D. 2018. V. 98. P. 045017.
15. *Daqing Liu, Furui Chen, Shuyue Chen, Ning Ma* Calculating Pauli-Jordan Function // European Journal of Physics. 2020. V. 41. № 3. P. 035406.
16. *Karatsuba A.A., Karatsuba E.A.* Physical mathematics in number theory // Functional Analysis and Other Mathematics. 2011. V. 3. № 2. P. 113–125.

DIRAC ELECTRON FREE FIELD ANTICOMMUTATOR AND ITS ZEROS ON TIME INTERVALS

E. A. Karatsuba[a]

[a] *Federal Research Center "Computer Science and Control" of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS I.A. Sokolov

Estimates are obtained for time intervals containing the zero of the Pauli-Jordan-Dirac anticommutator in a discrete representation in the spatially one-dimensional and three-dimensional cases.

Keywords: Dirac electron free field theory, anticommutator, zeros, time intervals, Compton electron wavelength