ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2023, том 513, с. 5–8

МАТЕМАТИКА

УДК 510.67

СЧЕТНЫЕ МОДЕЛИ ПОЛНЫХ УПОРЯДОЧЕННЫХ ТЕОРИЙ

© 2023 г. Т. С. Замбарная[1,*], Б. С. Байжанов[1,2]

Поступило 13.09.2023 г.
После доработки 04.10.2023 г.
Принято к публикации 19.10.2023 г.

Статья содержит наблюдения о полных теориях счетных сигнатур и их счетных моделях. Мы приводим построение счетной линейно упорядоченной теории, имеющей то же число счетных неизоморфных моделей, что и данная счетная, не обязательно линейно упорядоченная теория.

Ключевые слова: линейный порядок, число счетных моделей, гипотеза Воота

DOI: 10.31857/S268695432370025X, **EDN:** CMFRBD

1. ВВЕДЕНИЕ

Известная проблема теории моделей, гипотеза Воота, говорит, что полная теория первого порядка счетной сигнатуры может иметь либо конечное число, $\aleph_0$, либо $2^{\aleph_0}$ счетных моделей с точностью до изоморфизма. В [1] М. Морли доказал, что если такая теория имеет более чем $\aleph_1$ счетных неизоморфных моделей, то она имеет ровно $2^{\aleph_0}$ счетных моделей. Гипотеза Воота была подтверждена для различных классов теорий. С точки зрения числа счетных неизоморфных моделей рассматривались следующие классы линейно упорядоченных теорий: гипотеза Воота была подтверждена для линейных порядков обогащенных конечным либо счетным семейством унарных предикатов [2], для о-минимальных теорий [3], были приведены примеры слабо о-минимальных теорий со счетным числом счетных моделей [4], гипотеза Воота была доказана для почти о-минимальных теорий [5], слабо о-минимальных теорий ранга выпуклости один [6], бинарных стационарно упорядоченных теорий [7] и слабо о-минимальных теорий конечного ранга выпуклости [8]. В целом вопрос об истинности гипотезы Воота для теорий с отношением линейного порядка остается открытым, результаты в этом направлении предоставляют ценную информацию о структуре и моделях таких теорий. Мы показываем что изучение линейно упорядоченных теорий в общем не дает преимуществ по отношению к счетному спектру таких теорий — оно эквивалентно изучению счетных теорий в целом.

Далее мы используем символы фрактуры, к примеру, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}^*$, $\mathfrak{N}^*$, для обозначения структур, и заглавные буквы, M, N, M^*, N^* — для множеств носителей соответствующих структур. Запись $I(T,\lambda)$ означает число счетных неизоморфных моделей мощности λ теории T. Тогда гипотеза Воота предполагает, что $I(T,\aleph_0) \neq \aleph_1$.

2. ПЕРЕХОД К ЛИНЕЙНОМУ ПОРЯДКУ

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{M} = \langle M;\Sigma\rangle$ — счетная структура счетной реляционной сигнатуры Σ. Тогда существует счетная линейно упорядоченная структура $\mathfrak{M}^*$ в сигнатуре Σ обогащенной бинарными отношениями $<$ и E, такая что $I(Th(\mathfrak{M}),\aleph_0) = I(Th(\mathfrak{M}^*),\aleph_0)$.*

Доказательство теоремы 1. Для каждого элемента $a \in M$ обозначим через $C_a \subset \mathbb{R}$ счетное множество такое, что C_a и C_b не пересекаются, плотные и взаимно плотные для различных $a, b \in M$. Обозначим $M^* := \bigcup_{a\in M} C_a$. Пусть $\mathfrak{M}^* := \langle M^*;\Sigma\cup\{<,E\}\rangle$. Здесь $<$ — стандартное отношение линейного порядка на $\mathbb{R} \supseteq M^*$, и E — бинарное отношение эквивалентности такое, что для всех $a \in M$ и всех $a' \in C_a$, $E(M^*,a') = C_a$. Интерпретируем символы Σ так, чтобы они “уважали” отношение E: для каждого $n < \omega$, каждого n-местного отношения $R \in \Sigma$ и всех $a_1,a_2,\ldots,a_n \in M$, $b_1 \in C_{a_1}, b_2 \in C_{a_2},\ldots,b_n \in C_{a_n}$ пусть

$$\mathfrak{M}^* \vDash R(b_1,b_2,\ldots,b_n) \text{ тогда и только тогда, когда } \mathfrak{M} \vDash R(a_1,a_2,\ldots,a_n). \quad (1)$$

[1]*Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*

[2]*Университет имени Сулеймана Демиреля, Каскелен, Казахстан*

**E-mail: zambarnaya@math.kz*

Заметим, что

$$\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \forall y_1 \forall y_2 \ldots \forall y_n \left(\bigwedge_{i=1}^{n} E(x_i, y_i) \rightarrow \right. \\ \left. \rightarrow (R(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leftrightarrow R(y_1, y_2, \ldots, y_n)) \right) \in Th(\mathfrak{M}^*). \quad (2)$$

Мы утверждаем что $\mathfrak{M}^*$ – искомая структура.

Структуры $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}^E := \langle M^*/E; \Sigma \rangle$ изоморфны. Здесь $M^*/E := \{E(M^*, a) | a \in M^*\} = \{C_a | a \in M\}$; и для всех $n \in \mathbb{N}$ и всех n-местных отношений $R \in \Sigma$ $\mathfrak{M}^E \models R(C_{a_1}, C_{a_2}, \ldots, C_{a_n})$ тогда и только гогда, когда $M^* \models R(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ для всех $b_1 \in C_{a_1}, b_2 \in C_{a_2}, \ldots, b_n \in C_{a_n}$. Изоморфизм между $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}^E$ задается функцией $g : M \rightarrow M^E$, $g : a \mapsto C_a$.

Теперь мы доказываем, что элементарные теории структур $\mathfrak{M}^*$ и $\mathfrak{M}$ ($\mathfrak{M}^E$) имеют одинаковое число счетных неизоморфных моделей, доказывая, что функция *: $Mod_{\aleph_0}(Th(\mathfrak{M})) \rightarrow Mod_{\aleph_0}(Th(\mathfrak{M}^*))$ является биекцией. Здесь и далее мы используем запись $\mathfrak{N}^*$ для обозначения структуры получаемой из структуры $\mathfrak{N}$ путем построения приведенного выше. Также мы используем обозначения $C_a^{\mathfrak{M}^*}$ и $C_b^{\mathfrak{N}^*}$ для классов эквивалентности, определяемых элементами $a \in M$ и $b \in N$ в структурах $\mathfrak{M}^*$ и $\mathfrak{N}^*$ соответственно.

Утверждение 1. *Пусть дана произвольная счетная модель $\mathfrak{N}$ теории $Th(\mathfrak{M})$. Тогда $\mathfrak{N}^*$ – модель теории $Th(\mathfrak{M}^*)$.*

Доказательство утверждения 1. Доказательство проводится индукцией посредством игры Эренфойхта–Фраиса в форме записанной в [9].

Зафиксируем произвольное конечное подмножество $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$. Так как $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$, Консерватор выигрывает каждую игру Эренфойхта–Фраиса $G_s(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ на структурах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, как структурах сигнатуры Σ_0. Мы показываем что Консерватор также выигрывает игру $G_s(\mathfrak{M}^*, \mathfrak{N}^*)$ на $\mathfrak{M}^*$ и $\mathfrak{N}^*$ в сигнатуре $\Sigma_0 \cup \{<, E\}$ для произвольного числа раундов s. Выигрышная стратегия для Консерватора основана на соответствующей стратегии для $G_s(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ и на том факте, что E-классы плотны и взаимно плотны в N^*.

Далее мы используем верхние индексы для элементов M^* и N^*, а нижние индексы – для элементов M и N.

Шаг 1. Новатор выбирает элемент $a^1 \in M^*$, либо $b^1 \in N^*$, без потери общности предположим первое. Тогда $a^1 \in C_{a_1}^{\mathfrak{M}}$ для некоторого $a_1 \in M$. Пусть $b_2 \in N$ – элемент, сопоставленный к a_1 в выигрышной стратегии Консерватора в игре $G_s(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$. Возьмем произвольный $b^1 \in C_{b_1}^{\mathfrak{N}^*}$. По (1) и поскольку $\mathfrak{M} \equiv_{\Sigma_0} \mathfrak{N}$, элементы a^1, a_1, b^1 и b_1 удовлетворяют одним и тем же одноместным отношениям из Σ_0.

Шаг k. Предположим, что к завершению этого шага Новатор и Консерватор построили две последовательности $a^1, a^2, \ldots, a^k \in M^*$ и b^1, b^2, ..., $b^k \in N^*$ такие, что для каждого i, $1 \le i \le k$, $a^i \in C_{a_i}^{\mathfrak{M}^*}$, $b^i \in C_{b_i}^{\mathfrak{N}^*}$, где $a_1, a_2, \ldots, a_k \in M$ и b_1, b_2, ..., $b_k \in N$. Также предположим, что кортежи с одинаковыми индексами из $\{a^i\}_{1 \le i \le k}$ и $\{b^i\}_{1 \le i \le k}$ удовлетворяют одним и тем же отношениям из $\Sigma_0 \cup \{<, E\}$, и кортежи с одинаковыми индексами из $\{a_i\}_{1 \le i \le k}$ и $\{b_i\}_{1 \le i \le k}$ удовлетворяют одним и тем же отношениям из Σ_0.

Шаг $k+1$. Новатор выбирает элемент $a^{k+1} \in M^*$ либо элемент $b^{k+1} \in N^*$, без потери общности предположим первое. Тогда $a^{k+1} \in C_{a_{k+1}}^{M^*}$ для некоторого $a_{k+1} \in M$. Возможны три случая:

Случай 1. Для некоторого i, $1 \le i \le k$, $a^{k+1} = a^i$. Тогда $a_{k+1} = a_i$, и пусть $b_{k+1} := b_i$ и $b^{k+1} := b^i$.

Случай 2. Случай 1 не выполняется, а также для некоторого i, $1 \le i \le k$, $\mathfrak{M}^* \models E(a^{k+1}, a^i)$. Следовательно, $a^{k+1} \in C_{a_{k+1}}^{\mathfrak{M}^*} = C_{a_i}^{\mathfrak{M}^*}$, и элементы $a_{k+1} = a_i$ и $b_{k+1} := b_i$ продолжают соответствующую игру $G_s(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$. Пусть $R \in \Sigma_0$ – произвольное n-местное отношение и пусть $i_1, i_2, \ldots, i_{n-1} \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Тогда из (2) и индукционного предположения следует, что

$$\mathfrak{M}^* \models R(a^{i_1}, a^{i_2}, \ldots, a^{i_{n-1}}, a^{k+1})$$
тогда и только тогда, когда
$$\mathfrak{M}^* \models R(a^{i_1}, a^{i_2}, \ldots, a^{i_{n-1}}, a^i) \quad (3)$$
тогда и только тогда, когда
$$\mathfrak{N}^* \models R(b^{i_1}, b^{i_2}, \ldots, b^{i_{n-1}}, b^i).$$

Так как все различные E-классы в N^* плотны и взаимно плотны, существует элемент $b^{k+1} \in E(N^*, b^i) = C_{b_i}^{\mathfrak{N}^*}$ такой что последовательности $a^1, a^2, \ldots, a^{k+1}$ и $b^1, b^2, \ldots, b^{k+1}$ имеют одинаковый порядковый тип. Следовательно, поскольку (2) выполняется и для $\mathfrak{N}^*$, мы можем продолжить (3) добавлением

$$\mathfrak{N}^* \models R(b^{i_1}, b^{i_2}, \ldots, b^{i_{n-1}}, b^i) \text{ тогда и только тогда, когда } \mathfrak{N}^* \models R(b^{i_1}, b^{i_2}, \ldots, b^{i_{n-1}}, b^{k+1}),$$

т.е., b_{k+1} и есть желаемый выбор для Консерватора.

Случай 3. Для каждого i, $1 \le i \le k$, $\mathfrak{M}^* \models \neg E(a^{k+1}, a^i)$. Тогда $a_{k+1} \neq a_i$ для каждого i, $1 \le i \le k$.

Пусть b_{k+1} есть элемент, который выбирает Консерватор в ответ на a_{k+1} в игре $G_s(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$. Тогда $b_{k+1} \neq b_i$ для каждого i, $1 \le i \le k$. По построению $\mathfrak{N}^*$, для всякого $b^{k+1} \in C^{\mathfrak{N}^*}_{b_{k+1}}$, $\mathfrak{N}^* \models \neg E(b^i, b^{k+1})$. И поскольку E-классы взаимно плотны в N^*, b^{k+1} может быть выбран таким образом, что порядковые типы последовательностей $a^1, a^2, \ldots, a^{k+1}$ и $b^1, b^2, \ldots, b^{k+1}$ одинаковы.

Пускай $R \in \Sigma_0$ – произвольное n-местное отношение, и пусть $i_1, i_2, \ldots, i_{n-1} \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Тогда в силу (1) и так как Консерватор выигрывает игру $G_s(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$,

$$\mathfrak{M}^* \models R(a^{i_1}, a^{i_2}, \ldots, a^{i_{n-1}}, a^{k+1})$$

тогда и только тогда, когда

$$\mathfrak{M} \models R(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_{n-1}}, a_{k+1})$$

тогда и только тогда, когда

$$\mathfrak{N} \models R(b_{i1}, b_{i_2}, \ldots, b_{i_{n-1}}, b_{k+1})$$

тогда и только тогда, когда

$$\mathfrak{N}^* \models R(b^{i_1}, b^{i_2}, \ldots, b^{i_{n-1}}, b^{k+1}).$$

Полученные после s раундов последовательности $a^1, a^2, \ldots, a^s \in M^*$ и $b^1, b^2, \ldots, b^s \in N^*$ гарантируют элементарную эквивалентность структур $\mathfrak{M}^*$ и $\mathfrak{N}^*$ в произвольной конечной сигнатуре Σ_0.

Пусть $\varphi \in Th(Mod(\mathfrak{M}^*))$ – произвольное предложение. Благодаря финитарному характеру формул, φ включает в себя лишь конечное число символов из $\Sigma \cup \{<, E\}$. Также структуры $\mathfrak{M}^*$ и $\mathfrak{N}^*$ элементарно эквиваленты в любой произвольной конечной сигнатуре, в том числе, в сигнатуре, содержащей все символы из φ. Таким образом, $\varphi \in Th(Mod(\mathfrak{N}^*))$, и, следовательно, $\mathfrak{M}^* \equiv \mathfrak{N}^*$.

Если $\mathfrak{N}'$ – счетная модель теории $Th(\mathfrak{M}^*)$, тогда $\mathfrak{N} := \langle N'/E; \Sigma \rangle$ – модель теории $Th(\mathfrak{M}^E)$. Более того, $\mathfrak{N}^* \cong \mathfrak{N}'$.

Предложим, $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ – счетные модели $Th(\mathfrak{M})$, такие что модели $\mathfrak{M}_1^*$ и $\mathfrak{M}_2^*$ изоморфны. Если функция $f^* : M_1^* \to M_2^*$ задает изоморфизм между этими моделями, тогда функция $f : C_a \mapsto C_{f^*(a)}$ задает изоморфизм, отображающий $\mathfrak{M}_1^E$ на $\mathfrak{M}_2^E$, и, следовательно, $\mathfrak{M}_1 \cong \mathfrak{M}_2$. Что, учитывая предыдущие факты, гарантирует, что функция * действительно является биекцией из класса счетных моделей теории $Th(\mathfrak{M})$ на класс счетных моделей $Th(\mathfrak{M}^*)$, и завершает доказательство теоремы.

Теорема 2. *Пусть дана счетная структура $\mathfrak{M} = \langle M; \Sigma \rangle$ счетной сигнатуры Σ. Тогда существует счетная линейно упорядоченная структура $\mathfrak{M}^*$ в сигнатуре Σ, обогащенной бинарными отношениями $<$ и E, такая, что $I(Th(\mathfrak{M}), \aleph_0) = I(Th(\mathfrak{M}^*), \aleph_0)$.*

Доказательство теоремы 2. Далее задается соответствующая реляционная структура $\mathfrak{M}' = \langle M; \Sigma' \rangle$, такая, что $I(Th(\mathfrak{M}, \aleph_0)) = I(Th(\mathfrak{M}'), \aleph_0)$. Тогда применение теоремы 1 к $\mathfrak{M}'$ доказывает текущую теорему.

Обозначим $\Sigma' := \{R_c \mid c \in \Sigma$ – константа$\} \cup \{R_f \in \Sigma \mid f$ – функция$\} \cup \{R \in \Sigma \mid R \in \Sigma$ – отношение$\}$. Для каждой константы $c \in \Sigma$ и каждого $a \in M$ пусть $\mathfrak{M}' \models R_c(a)$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M} \models c = a$. Для каждого $n < \omega$ и всякой n-местной функции $f \in \Sigma$ пусть R_f будет $(n+1)$-местным отношением таким, что для всех $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b \in M$ $\mathfrak{M}' \models R_f(a_1, a_2, \ldots, a_n, b)$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M} \models f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = b$. И, в заключение, для каждого $n < \omega$, каждого n-местного отношения $R \in \Sigma$ и всех $a_1, a_2, \ldots, a_n \in M$ пусть $\mathfrak{M}' \models R(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M} \models R(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Следствие 1. *Если существует теория T счетной сигнатуры, такая что $I(T, \aleph_0) = \aleph_1$, тогда существует линейно упорядоченная теория T^* счетной сигнатуры, для которой $I(T^*, \aleph_0) = \aleph_1$.*

Следствие 1 демонстрирует, что, при попытках решить гипотезу Воота, мы можем упустить из рассмотрения не линейно упорядоченные теории, но, в то же время, данное ограничение не является существенным. Поэтому целесообразно изучать счетные модели теорий без искусственного линейного порядка, описанного теоремой 1, т.е. теории без равномерно определимого отношения эквивалентности со счетным числом взаимно плотных классов.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (Грант № AP09058169).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Morley M.* The number of countable models // The Journal of Symbolic Logic. 1970. V. 35. №1. P. 14–18.

2. *Rubin M.* Theories of linear order // Israel Journal of Mathematics. 1974. V. 17. P. 392–443.

3. *Mayer L.* Vaught's conjecture for o-minimal theories // Journal of Symbolic Logic. 1988. V. 53. № 1. P. 146–159.

4. *Alibek A., Baizhanov B.S.* Examples of countable models of a weakly o-minimal theory // Int. J. Math. Phys. 2012. V. 3. № 2. P. 1–8.

5. *Kulpeshov B.Sh., Sudoplatov S.V.* Vaught's conjecture for quite o-minimal theories // Annals of Pure and Applied Logic. 2017. V. 168. № 1. P. 129–149.

6. *Alibek A., Baizhanov B.S., Kulpeshov B.Sh., Zambarnaya T.S.* Vaught's conjecture for weakly o-minimal theories of convexity rank 1 // Annals of Pure and Applied Logic. 2018. V. 169. № 11. P. 1190–1209.

7. *Moconja S., Tanovic P.* Stationarily ordered types and the number of countable models // Annals of Pure and Applied Logic. 2019. V. 171. № 3. P. 102765.

8. *Kulpeshov B.Sh.* Vaught's conjecture for weakly o-minimal theories of finite convexity rank // Izvestiya: Mathematics. 2020. V. 84. № 2. P. 324–347.

9. *Верещагин Н.К., Шень А.* Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 2. Языки и исчисления. М.: МЦНМО, 2002.

COUNTABLE MODELS OF COMPLETE ORDERED THEORIES

T. S. Zambarnaya[a] and B. S. Baizhanov[a,b]

[a] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*

[b] *Suleyman Demirel University, Kaskelen, Kazakhstan*

The article consists of observations regarding complete theories of countable signatures and their countable models. We provide a construction of a countable linearly ordered theory which has the same number of countable non-isomorphic models as the given countable, not necessarily linearly ordered, theory.

Keywords: linear order, number of countable models, Vaught's conjecture