ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2023, том 514, с. 65–68

МАТЕМАТИКА

УДК 517.911.5,517.988.5

СУЩЕСТВОВАНИЕ И РЕЛАКСАЦИЯ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ С МАКСИМАЛЬНО МОНОТОННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ И ВОЗМУЩЕНИЯМИ

© 2023 г. Член-корреспондент РАН А. А. Толстоногов[1,*]

Поступило 03.03.2023 г.
После доработки 26.07.2023 г.
Принято к публикации 02.11.2023 г.

В сепарабельном гильбертовом пространстве изучается дифференциальное включение с зависящим от времени максимально монотонным оператором и возмущением. Возмущение представляет сумму зависящего от времени однозначного оператора и многозначного отображения с замкнутыми невыпуклыми значениями. Особенностью однозначного оператора является то, что сумма его с тождественным оператором, умноженным на положительную интегрируемую с квадратом функцию, является монотонным оператором. Многозначное отображение обладает свойством липшицевости по фазовой переменной. Доказываются теоремы существования и плотности в соответствующей топологии множества решений исходного включения в множестве решений с овыпукленным многозначным отображением. Для этих целей введены новые расстояния между максимально монотонными операторами.

Ключевые слова: максимально монотонный оператор, ρ-полуотклонение операторов, релаксация

DOI: 10.31857/S268695432360012X, **EDN:** DAUBQA

Пусть $T = [0,a]$, $a > 0$ – отрезок числовой полупрямой R^+, H – сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$, нормой $\|\cdot\|$, нулевым элементом Θ и единичным замкнутым шаром $\overline{B}$ с центром в Θ.

Расстояние от точки x до множества $C \subset H$ мы обозначаем $d(x,C)$.

Рассмотрим дифференциальные включения

$$-\dot{x}(t) \in A(t)x(t) + F(t)x(t) + U(t,x(t)), \tag{1}$$

$$-\dot{x}(t) \in A(t)x(t) + F(t)x(t) + \overline{\operatorname{co}}\,U(t,x(t)), \tag{2}$$

$$x(0) = x_0 \in D(A(0)),$$

где символ $\overline{\operatorname{co}}$ означает замкнутую выпуклую оболочку множества.

Здесь $A(t) : D(A(t)) \subset H \rightrightarrows H$, $t \in T$ – семейство максимально монотонных операторов с областью определения $D(A(t))$, $F(t) \subset D(F(t)) \subset H \to H$ – семейство однозначных операторов с областью определения $D(F(t))$, $U : T \times H \rightrightarrows H$ – многозначное отображение с замкнутыми невыпуклыми значениями.

Под решением включения (1) понимается пара $(x(\cdot),u(\cdot))$, состоящая из абсолютно непрерывной функции $x : T \to H$, $x(0) = x_0, x(t) \in D(A(t))$, $t \in T$ и $u(\cdot) \in L^1(T,H)$, удовлетворяющих включениям

$$-\dot{x}(t) \in A(t)x(t) + F(t)x(t) + u(t) \text{ п.в.}, \tag{3}$$

$$u(t) \in U(t,x(t)) \text{ п.в.} \tag{4}$$

Решение включения (2) понимается аналогично с заменой включения (4) на включение

$$u(t) \in \overline{\operatorname{co}}\,U(t,x(t)) \text{ п.в.}$$

Множества решений включений (1) и (2) мы обозначаем $\mathcal{R}_U(x_0)$ и $\mathcal{R}_{\overline{\operatorname{co}}U}(x_0)$ соответственно.

Целью работы являются нахождение условий непустоты множества $\mathcal{R}_U(x_0)$ и описание взаимосвязи между множествами $\mathcal{R}_U(x_0)$ и $\mathcal{R}_{\overline{\operatorname{co}}U}(x_0)$.

Обозначим через $\operatorname{gr}A(t)$ график оператора $A(t)$

$$\operatorname{gr}A(t) = \{(x,y) \in H \times H;\ x \in D(A(t)), y \in A(t)x\}.$$

[1]*Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова Сибирского отделения Российской академии наук (ИДСТУ СО РАН), Иркутск, Россия*

**E-mail: alexander.tolstonogov@gmail.com*

Через $C(T,H)$ мы обозначаем пространство всех непрерывных функций $x: T \to H$ с sup-нормой, а пространства H и $L^1(T,H)$, наделенные слабыми топологиями, обозначаются ω-H и ω-$L^1(T,H)$.

Так как значениями максимально монотонного оператора являются замкнутые выпуклые множества, то для любого $x \in D(A(t))$ существует элемент $A^0(t)x \in A(t)x$ минимальной нормы.

Предположения.

$H(A)$:

(1) семейство $A(t), t \in T$ измеримо, т.е. измеримо многозначное отображение $t \to \mathrm{gr}A(t)$;

(2) существует функция $m_A(\cdot) \in L^2(T,R^+)$ и неубывающая функция $l_A: R^+ \to R^+$ такие, что

$$\|A^0(t)x\| \le m(t)(1 + l_A(\|x\|), \quad x \in D(A(t));$$

(3) для любого $f(\cdot) \in L^1(T,H)$ дифференциальное включение

$$\begin{aligned} -\dot{x}(t) &\in A(t)x(t) + f(t), \\ x(0) &= x_0 \in D(A(0)), \end{aligned} \tag{5}$$

имеет решение.

$H(F)$:

(1) имеет место включение $D(F(t)) \supset D(A(t))$, $t \in T$;

(2) для почти каждого $t \in T$ оператор $F(t)$ является деминепрерывным, т.е. если $x_n \to x$ в H, то $F(t)x_n \to F(t)x$ в ω-H;

(3) для любой измеримой функции $x: T \to H$, $x(t) \in D(A(t))$ функция $t \to F(t)x(t)$ измерима;

(4) существует функция $\omega(\cdot) \in L^2(T,R^+)$ такая, что

$$\langle F(t)x - F(t)y, x - y\rangle + \omega(t)\|x - y\|^2 \ge 0 \text{ п.в.};$$

(5) имеет место неравенство $\|F(t)x\| \le m_F(t)(1 + l_F(\|x\|)$, $x \in D(F(t))$,

где $m_F(\cdot) \in L^2(T,R^+)$ и $l_F: R^+ \to R^+$ – неубывающая функция.

$H(U)$:

(1) отображение $t \to U(t,x)$ измеримо $\forall x \in H$;

(2) $\sup_{z\in H}|d(z,U(t,x)) - d(z,U(t,y))| < k(t)\|x - y\|$,

$$k(\cdot) \in L^1(T,R^+), \quad k(t) > 0, \quad t \in T,$$
$$x \ne y,\ x, y \in H;$$

справедливы неравенства

(3) $\inf\{\|u\|\ u \in U(t,\Theta)\} < m_U(t)$ п.в.;

(3*) $\sup\{\|u\|;\ u \in U(t,\Theta)\} \le m_U(t)$ п.в.;

$$m_U(\cdot) \in L^1(T,R^+), \quad m_U(t) > 0, \quad t \in T.$$

Основные результаты:

Теорема 1. *Пусть выполняются предположения* $H(A)$, $H(U)$ (1)–(3). *Тогда множество* $\mathcal{R}_U(x_0)$ *не пусто.*

Теорема 2. *Пусть выполняются предположения* $H(A)$, $H(F)$, (1), (2), (3*). *Тогда* $\mathcal{R}_{\overline{\mathrm{co}}U}(u_0)$ *является замкнутым подмножеством пространства* $C(T,H) \times \omega$-$L^1(T,H)$ *и справедливо равенство*

$$\mathcal{R}_{\overline{\mathrm{co}}U}(x_0) = \overline{\mathcal{R}_U(x_0)},$$

где черта сверху означает замыкание в пространстве $C(T,H) \times \omega$-$L^1(T,H)$.

Дадим конкретизацию предположения $H(A)$ (3).

Пусть X – нормированное пространство с метрикой $d_X(\cdot,\cdot)$ и единичным замкнутым шаром $\overline{B}_X$. Расстояние от точки $x \in X$ до множества $C \subset H$ мы обозначаем $d_X(x,C)$.

Для $\rho \in [0,+\infty]$ число

$$\mathrm{exc}_\rho(C,D) = \sup\{d_X(x,D);\ x \in C \cap \rho\overline{B}_X\}$$

называется ρ-полуотклонением множества C от множества D. Если $C \cap \rho\overline{B}_X = \varnothing$, то считается $\mathrm{exc}_\rho(C,D) = 0$.

Так как при $\rho = +\infty$ имеет место равенство $\rho\overline{B}_X = X$, то мы получаем полуотклонение $\mathrm{exc}(C,D) = \mathrm{exc}_\infty(C,D)$ множества C от множества D.

Теорема 3. *Пусть выполняются предположения* $H(A)(1),(2)$ *и для любого* $\rho \in [0,+\infty)$ *существует абсолютно непрерывная функция* $b_\rho: T \to R$ *такая, что*

$$\mathrm{exc}_\rho(D(A(s)), D(A(t)) \le |b_\rho(t) - b_\rho(s)|, \tag{6}$$
$$s \le t,\ s, t \in T.$$

Тогда имеет место предположение $H(A)(3)$, т.е. для любого $f(\cdot) \in L^1(T,H)$ включение (5) имеет решение.

Следствие 1. Пусть выполняются предположения $H(A)(1),(2)$ и для любого $\rho \in [0,+\infty)$ существует абсолютно непрерывная функция $b: T \to R$ такая, что

$$\mathrm{exc}(D(A(s)), D(A(t)) \le |b(t) - b(s)|, \tag{7}$$
$$s \le t,\ s, t \in T.$$

Тогда справедливо утверждение теоремы 3.

Пусть $A_i: D(A_i) \subset H \rightrightarrows H$, $i = 1,2$, – максимально монотонные операторы и $\rho \in [0,+\infty)$. Число

$$\operatorname{exc}\operatorname{dis}_\rho(A_1,A_2)=\sup\left\{\frac{\langle x_1-x_2,y_2-y_1\rangle}{1+\|y_1\|+\|y_2\|};\ \begin{array}{l} x_1\in D(A_1)\cap\rho\overline{B},\ y_1\in A_1x_1,\\ x_2\in D(A_2),\ y_2\in A_2x_2\end{array}\right\} \tag{8}$$

мы назовем ρ-псевдополуотклонением оператора A_1 от A_2. Если $D(A_1\cap\rho\overline{B})=\varnothing$, то считается $\operatorname{exc}\operatorname{dis}_\rho(A_1,A_2)=0$.

Число

$$\operatorname{dis}_\rho(A_1,A_2)=\max\{\operatorname{exc}\operatorname{dis}_\rho(A_1,A_2),\operatorname{exc}\operatorname{dis}_\rho(A_2,A_1)\}$$

назовем ρ-псевдорасстоянием между операторами A_1 и A_2. При $\rho=+\infty$ мы получаем псевдорасстояние $\operatorname{dis}(A_1,A_2)=\operatorname{dis}_\infty(A_1,A_2)$, введенное в работе [1].

Лемма 1. Пусть выполняется предположение $H(A)(2)$ и для любого $\rho\in[0,+\infty)$ существует абсолютно непрерывная функция $b_\rho:T\to R$ такая, что

$$\operatorname{exc}\operatorname{dis}_\rho(A(s),A(t))\le|b_\rho(t)-b_\rho(s)|,\quad s\le t,\quad s,t\in T.$$

Тогда выполняется предположение $H(A)(1)$ и имеют место неравенства (6). Поэтому справедливо утверждение теоремы 3.

Следствие 2. Пусть выполняется предположение $H(A)(2)$ и существует абсолютно непрерывная функция $b:T\to R$ такая, что

$$\operatorname{dis}(A(s),A(t))\le|b(t)-b(s)|,\quad s\le t,\quad s,t\in T. \tag{9}$$

Тогда выполняется предположение $H(A)(1)$ и имеет место неравенство (7). Следовательно, включение (5) имеет решение.

Так как для любого $x\in D(A)$ у максимально монотонного оператора $A:D(A)\subset H\rightrightarrows H$ существует единственный элемент A^0x минимальной нормы, то будет определен однозначный оператор $A^0:D(A)\subset H\to H$. Через

$$\operatorname{gr}A^0=\{(x,y)\in H\times H;\ x\in D(A),y=A^0x\}$$

обозначим график оператора A^0.

Пусть $A_i:D(A)\subset H\rightrightarrows H$, $i=1,2$ – максимально монотонные операторы и $\rho\in[0,+\infty)$.

Число

$$\operatorname{exc}_\rho(A_1^0,A_2^0)=\operatorname{exc}_\rho(\operatorname{gr}A_1^0,\operatorname{gr}A_2^0) \tag{10}$$

мы будем называть ρ-минимальным полуотклонением оператора A_1 от оператора A_2. При $\rho=+\infty$ мы получим минимальное полуотклонение оператора A_1 от A_2

$$\operatorname{exc}(A_1^0,A_2^0)=\operatorname{exc}_{+\infty}(\operatorname{gr}A_1^0,\operatorname{gr}A_2^0).$$

Число

$$\operatorname{haus}_\rho^0(A_1^0,A_2^0)=\max\{\operatorname{exc}_\rho(A_1^0,A_2^0),\operatorname{exc}_\rho(A_2^0,A_1^0)\} \tag{11}$$

называется ρ-минимальным расстоянием между операторами A_1 и A_2.

Лемма 2. Пусть $A(t):D(A(t))\subset H\rightrightarrows H$ – семейство максимально монотонных операторов и выполняется предположение $H(A)(2)$, в котором функция $m(t)$ является константой. Предположим, что для $\rho\in[0,+\infty)$ существует абсолютно непрерывная функция $c_\rho:T\to R$ такая, что

$$\operatorname{exc}_\rho(A^0(s),A^0(t))\le|c_\rho(s)-c_\rho(t)|,\quad s\le t,\quad s,t\in T.$$

Тогда выполняется предположение $H(A)(1)$ и существуют абсолютно непрерывные функции $b_\rho:T\to R$ такие, что будет иметь место неравенство (6). Поэтому справедливо утверждение теоремы 3.

При $\rho=+\infty$ лемма 2 допускает уточнения.

Следствие 3. Пусть выполняется предположение $H(A)(2)$ и существует абсолютно непрерывная функция $b:T\to R$ такая, что

$$\operatorname{exc}(A^0(s),A^0(t))\le|b(t)-b(s)|,\quad s\le t,\quad s,t\in T.$$

Тогда выполняется предположение $H(A)(1)$ и имеет место неравенство (7). Следовательно, включение (4) имеет решение.

Комментарии.

Впервые корректное доказательство существования абсолютно непрерывного решения включения (5) было дано в работе [2]. В этой работе предполагалось, что $f(\cdot)\in L^2(T,H)$, выполняются неравенство $\|A^0(t)x\|\le c(1+\|x\|)$, $t\in T$, $x\in D(A(t))$, $c>0$ и неравенство (9), в котором $b:T\to R$ – абсолютно непрерывная функция с производной $\dot b(\cdot)\in L^2(T,R)$.

С тех пор появился ряд работ [2–4], в которых рассматривалось включение (5) как с однозначными, так и многозначными возмущениями. Во всех этих работах семейство операторов $A(t),t\in T$ обладает теми же свойствами, что и в работе [2], а значениями возмущений являются выпуклые множества.

Теорема существования и релаксации для эволюционного включения (1) при отсутствии оператора $F(t)$ была доказана в работе [5]. В этой работе отображение $U(t,x)$ обладало свойствами $H(U)$ (1)–(3), (3*) с функциями $k(\cdot)$, $m_U(\cdot)\in L^2(T,R)$. Схема доказательства этих теорем была позаимствована из работы [6].

Отметим, что даже на уровне существования решения включения (5) наши результаты являются принципиально новыми.

Следует указать на нетрадиционное условие роста в предположении $H(A)$ (2), где функция l_A может иметь вид $l(r) = r^{\alpha}$, $\alpha > 0$ в отличие от традиционных условий роста в теории дифференциальных уравнений $l(r) = r$.

Необходимость введения полуотклонений $\operatorname{exc}\operatorname{dis}_{\rho}(A_1, A_2)$ и $\operatorname{exc}_{\rho}(A_1^0, A_2^0)$ была обусловлена следующим фактом. В работе автора [7] был указан класс максимально монотонных операторов $A(t) : D(A(t)) \subset H \rightrightarrows H$, для которых

$$\operatorname{exc}(D(A(s)), D(A(t)) = \infty, \quad s \neq t,$$

но существовало семейство абсолютно непрерывных функций $b_{\rho} : T \to R$, для которых выполнялось неравенство (6). Поэтому подход, связанный с использованием полуотклонений (8), (10), позволяет расширить класс максимально монотонных операторов, для которых справедлива теорема 3 и, следовательно, теоремы 1 и 2. С другой стороны, если $\operatorname{dis}_{\rho}(A_1, A_2) = 0$ для любого $\rho \in [0, +\infty)$, то $A_1 = A_2$. Аналогично, если $\operatorname{haus}_{\rho}^0(A_1^0, A_2^0) = 0$ для любого $\rho \in [0, +\infty)$, то $A_1 = A_2$. Поэтому числа $\operatorname{dis}_{\rho}(\cdot,\cdot)$ и $\operatorname{haus}_{\rho}^0(\cdot,\cdot)$ являются важными характеристиками максимально монотонных операторов.

Если в (11) заменить операторы A_1^0 и A_2^0 на операторы A_1 и A_2, то мы получим ρ-расстояние между максимально монотонными операторами, которое было введено в работе [8] и использовалось для изучения максимально монотонных операторов.

Исходя из определения решения включения (1), его можно рассматривать как управляемую систему (3), (4). Поэтому результаты работы могут использоваться при изучении невыпуклых задач оптимального управления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Vladimirov A.A.* Nonstationary dissipative evolution equations in a Hilbert space // Nonlinear Anal. 1991. V. 17. P. 499–518. https://doi.org/10.1016/0362-546X(91)90061-5
2. *Azzam-Laouir D., Belhoula W., Castaing C., Monteiro Marques M.D.P.* Perturbed evolution problems with absolutely continuous variation in time and applications // J. Fixed Point Theory. Appl. 2019. V. 21. 40. https://doi.org/10.1007/s11784-019-0666-2
3. *Azzam-Laouir D., Boutana Harid I.* Mixed semicontinuous perturbation to an evolution problem with time-dependent maximal monotone operator // J. Nonlinear Convex Anal. 2019. V. 20. № 1. P. 35–92.
4. *Azzam-Laouir D., Belhoula W., Castaing C., Monteiro Marques M.D.P.* Multivalued perturbation to evolution problems involving time dependent maximal monotone operators // Evolution Equations and Control Theory. 2019. V. 9. № 1. P. 219–254. https://doi.org/10.3934/eect.2020004
5. *Castaing Ch., Saidi S.* Lipschitz perturbation to evolution inclusions driven by time-dependent maximal monotone operators // Topol. Math. Nonlinear Anal. 2021. V. 58. № 2. P. 677–712. https://doi.org/10.12775/TMNA.2021.012
6. *Tolstonogov A.A.* Existence and relaxation of solutions for a subdifferential inclusion with unbounded perturbation // J. Math. Anal. Appl. 2017. V. 447. P. 269–288. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2016.09.061
7. *Tolstonogov A.A.* Sweeping process with unbounded nonconvex perturbation // Nonlinear Analysis. 2014. V. 108. P. 291–301. https://doi.org/10.1016/j.na.2014.06.002
8. *Attouch H., Wets R.J.-B.* Quantitative stability of variational systems. I: The epigraphical distance // Trans. Amer. Math. Soc. 1991. V. 328. № 2. P. 695–729. https://doi.org/10.2307/2001800

EXISTENCE AND RELAXATION OF SOLUTIONS FOR A DIFFERENTIAL INCLUSION WITH MAXIMAL MONOTONE OPERATORS AND PERTURBATIONS

Corresponding Member of the RAS **A. A. Tolstonogov**[a]

[a] *Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Irkutsk, Russian Federation*

A differential inclusion with a time-dependent maximal monotone operator and a perturbation is studied in a separable Hilbert space. The perturbation is the sum of a time-dependent single-valued operator and a multivalued mapping with closed nonconvex values. A particular feature of the single-valued operator is that its sum its with the identity operator multiplied by a positive square-integrable function is a monotone operator. The multivalued mapping is Lipschitz continuous with respect to the phase variable. We prove the existence of a solution and the density in the corresponding topology of the solution set of the initial inclusion in the solution set of the inclusion with the convexified multivalued mapping. For these purposes, new distances between maximal monotone operators are introduced.

Keywords: maximal monotone operator, ρ-excess of operators, relaxation