ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2023, том 514, с. 69–73

МАТЕМАТИКА

УДК 517.958

О ВЫВОДЕ УРАВНЕНИЙ ГРАВИТАЦИИ ИЗ ПРИНЦИПА НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ, РЕЛЯТИВИСТСКИХ РЕШЕНИЯХ МИЛНА-МАККРИ И О ТОЧКАХ ЛАГРАНЖА

© 2023 г. В. В. Веденяпин[1,*], А. А. Бай[1], А. Г. Петров[2]

Представлено академиком РАН В.В. Козловым
Поступило 22.06.2023 г.
После доработки 08.09.2023 г.
Принято к публикации 01.11.2023 г.

Мы предлагаем вывод уравнений гравитации из классического принципа наименьшего действия в форме уравнений Власова-Пуассона с лямбда-членом и применяем следствия типа Гамильтона-Якоби для получения космологических решений, а также исследуем свойства точек Лагранжа.

Ключевые слова: уравнение Власова, решения Милна-Маккри, уравнение Власова-Пуассона, точки Лагранжа

DOI: 10.31857/S2686954323600532, **EDN:** DBZLSR

Мы предлагаем вывод уравнений гравитации из классического принципа наименьшего действия в форме уравнений Власова-Пуассона с лямбда-членом и применяем следствия типа Гамильтона-Якоби для получения космологических решений, а также исследуем свойства точек Лагранжа.

1. МЕТРИКА ЛОРЕНЦА И ЛЯМБДА ЭЙНШТЕЙНА

Рассмотрим следующее действие (ср. [1–15]):

$$S = -c\int m\left[\sqrt{g_{\mu\nu}u^{\mu}u^{\nu}} + \frac{U}{c}\right] f(t,\mathbf{x},\mathbf{v},m)\,d\mathbf{x}d\mathbf{v}dmdt - \\ -\frac{1}{8\pi\gamma}\int (\nabla U)^2 d\mathbf{x}dt + \frac{c^2\Lambda}{8\pi\gamma}\int U dxdt$$

при $g_{\mu\nu} = \operatorname{diag}(1,-1,-1,-1)$.

Варьируя по U, получим уравнения для полей:

$$\Delta U = 4\pi\gamma\int mf(t,\mathbf{x},\mathbf{v},m)\,d\mathbf{v}dm - \frac{1}{2}c^2\Lambda.$$

Перейдем к действию для одной частицы, подставив $f(t,x,v,m) = \delta(x-X)\delta(v-V)\delta(m-M)$

$$S = -cm\int\left[\sqrt{c^2-u^2} + \frac{U}{c}\right]dt - \\ -\frac{1}{8\pi\gamma}\int (\nabla U)^2 d\mathbf{x}dt + \frac{c^2\Lambda}{8\pi\gamma}\int U dxdt.$$

Для данного действия Лагранжиан и Гамильтониан выглядят следующим образом:

$$L(x,v) = -mc\sqrt{c^2-u^2} - mU,$$

$$H(x,p) = mc^2\sqrt{1+\frac{p^2}{(mc)^2}} + mU.$$

Таким образом, можем получить уравнение Лиувилля для гамильтоновой системы

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \left(\frac{\partial H}{\partial p},\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial H}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial p}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{p^2}{(mc)^2}}}\left(\frac{p}{m},\frac{\partial f}{\partial x}\right) - m\left(\frac{\partial U}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial p}\right) = 0.$$

Мы вывели систему Власова-Пуассона для метрики Лоренца по схеме работ [5–7, 18–22]

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{p^2}{(mc)^2}}}\left(\frac{p}{m},\frac{\partial f}{\partial x}\right) - m\left(\frac{\partial U}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial p}\right) = 0,$$

$$\Delta U = 4\pi\gamma\int mf(t,\mathbf{x},\mathbf{v},m)\,d\mathbf{v}dm - \frac{1}{2}c^2\Lambda.$$

[1] *ФИЦ Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия*
[2] *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*
* *E-mail: vicveden@yahoo.com*

Перейдем к гидродинамическим следствиям этой системы по схеме тех же работ. Для этого выполним подстановку $f(t, x, p, m) = \rho(t,x,m)\delta(p - Q(t,x))$, где Q — макроскопический импульс. Для Гамильтоновых систем проходит и дальнейшая градиентная подстановка $Q = \nabla W$. Получим гидродинамическое Гамильтон-Якобиево следствие уравнений Власова-Пуассона (см. [5–7, 16–22]) для общих гамильтоновых систем):

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i(x,\nabla W))}{\partial x^i} = 0,$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + c\sqrt{(mc)^2 + (\nabla W)^2} + mU(x) = 0,$$

$$\Delta U = 4\pi\gamma\int m\rho dm - \frac{1}{2}c^2\Lambda,$$

где $v = \dfrac{p}{m\sqrt{1 + \dfrac{p^2}{(mc)^2}}}$

Теперь рассмотрим уравнения в изотропном случае, т.е. при $U = U(r, t)$, $W = W(t,r,m)$, $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\rho c W' x_i}{r\sqrt{(mc)^2 + (W')^2}}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + c\sqrt{(mc)^2 + (W')^2} + mU(x) = 0,$$

$$3\left(\frac{U'}{r}\right) + r\left(\frac{U'}{r}\right)' = 4\pi\gamma\int m\rho dm - \frac{1}{2}c^2\Lambda.$$

Из третьего уравнения в космологическом случае, т.е. когда плотность не зависит от координаты $\rho(x,m,t) = \rho(m,t)$ следует вид потенциала $U = \dfrac{r^2 B(t)}{6} - \dfrac{D(t)}{r}$, где $B(t) = 4\pi\gamma\int m\rho dm - \dfrac{1}{2}c^2\Lambda$. Рассматривая космологический случай, можно также преобразовать первые два уравнения:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{cW' x_i}{r\sqrt{(mc)^2 + (W')^2}}\right) = \frac{\partial\rho}{\partial t} + 3H\rho = 0$$

H — постоянная Хаббла, из определения которой следует уравнение:

$$H = \varphi + \frac{r}{3}\varphi', \quad \text{где} \quad \varphi = \frac{cW'}{r\sqrt{(mc)^2 + (W')^2}},$$

решением которого является функция $\varphi = H + \dfrac{A(t)}{r^3}$.

Таким образом, мы получили систему уравнений Гурса

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + 3H\rho = 0,$$

$$\frac{W'}{\sqrt{(mc)^2 + (W')^2}} = \frac{1}{c}\left(rH + \frac{A(t)}{r^2}\right),$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + c\sqrt{(mc)^2 + (W')^2} + mU(x) = 0.$$

Обозначим $\alpha(r,t) = \dfrac{1}{c}\left(rH + \dfrac{A(t)}{r^2}\right)$, $S = W'$. Тогда $S = \dfrac{mc\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}$, $\dot{S} = \dfrac{mc\dot{\alpha}}{(1-\alpha^2)^{3/2}}$, $S' = \dfrac{mc\alpha'}{(1-\alpha^2)^{3/2}}$. Продифференцируем последнее уравнение по r.

$$\frac{\partial S}{\partial t} + c\frac{SS'}{\sqrt{(mc)^2 + S^2}} + mU'(x) = 0,$$

$$\frac{mc\dot{\alpha}}{(1-\alpha^2)^{3/2}} + c\frac{mc\alpha'\alpha}{(1-\alpha^2)^{3/2}} + mU'(x) = 0,$$

$$(c\dot{\alpha} + c^2\alpha\alpha')^2 - (U'(x))^2(1-\alpha^2)^3 = 0.$$

Таким образом, если подставить в это уравнение $\alpha(r,t) = \dfrac{1}{c}\left(rH(m,t) + \dfrac{A(t)}{r^2}\right)$, $\dot{\alpha}(r,t) = \dfrac{1}{c}\left(rH(\dot{m},t) + \dfrac{\dot{A}(t)}{r^2}\right)$, $\alpha'(r,t) = \dfrac{1}{c}\left(H(m,t) - \dfrac{2A(t)}{r^3}\right)$, то получим следующее выражение

$$\left(r\dot{H} + \frac{\dot{A}}{r^2} + \left(rH + \frac{A}{r^2}\right)\left(H - \frac{2A}{r^3}\right)\right)^2 - \\ - \left(\frac{rB}{3} + \frac{D}{r^2}\right)^2\left(1 - \left(rH + \frac{A}{r^2}\right)^2\right)^3 = 0.$$

Если раскрыть скобки в этом уравнении, то в левой части получим выражение полиномиального вида относительно r. Следовательно, коэффициенты при всех степенях r в этом выражении должны будут равняться нулю. Рассмотрим коэффициент при r^8, как можно заметить при раскрытии первого слагаемого степень r будет не больше 2, при раскрытии второго получим единственный член с этой степенью $\dfrac{r^8 H^6 B^2}{3}$, следовательно, $H^6 B^2 = 0$. Если предположить, что $B(t) = 4\pi\gamma\int m\rho(m,t)dm - \dfrac{1}{2}c^2\Lambda \neq 0$, то получаем, что $H = 0$.

$$\left(\frac{\dot{A}}{r^2} - \frac{2A^2}{r^5}\right)^2 - \left(\frac{rB}{3} + \frac{D}{r^2}\right)^2\left(1 - \left(\frac{A}{r^2}\right)^2\right)^3 = 0$$

Аналогично можно получить, что $B = 0$ из коэффициента при r^2.

Если предположить, что $B(t) = 4\pi\gamma\int m\rho(m,t)dm - \frac{1}{2}c^2\Lambda = 0$, то

$$\left(r\dot{H} + \frac{\dot{A}}{r^2} + \left(rH + \frac{A}{r^2}\right)\left(H - \frac{2A}{r^3}\right)\right)^2 - \\ -\left(\frac{D}{r^2}\right)^2\left(1 - \left(rH + \frac{A}{r^2}\right)^2\right)^3 = 0$$

Тогда коэффициент при r^{-16} равен $\frac{A^6D^2}{3}$. Следовательно, либо $D = 0$, $U(x) = 0$, либо $A = 0$, $(r\dot{H} + rH^2)^2 - \left(\frac{D}{r^2}\right)^2(1-(rH)^2)^3 = 0$, из чего сразу следует, что $D = 0$, $U(x) = 0$.

Таким образом, космологическое решение для релятивистского действия в метрике Лоренца существует только при $U(x) = 0$. Мы видим, что нам несколько раз пришлось решить уравнение Пуассона $\Delta u = \mathrm{const}$, что показывает не только эквивалентность введения лямбда члена с какой-то субстанцией типа заряда е, удовлетворяющей этому уравнению, но и обосновывает потенциал Гурзадяна $U(r) = -\frac{\gamma}{r} + ar^2$ как альтернативное объяснение темной энергии [25]. Было бы хорошо объяснить расширенное ускорение без введения дополнительных предположений типа лямбда-члена или квадратичного потенциала, и насколько уравнение Эйнштейна (2) предоставляет такую возможность обоими слагаемыми в правой части — это предмет дальнейших рассмотрений.

4. Точки Лагранжа в потенциале $U(r) = -\frac{\gamma}{r} + \lambda r^2$ и особенности движения.

Ускоренное расширение Вселенной, отмеченное Нобелевской премией по физике в 2011 г., вызывает пристальное внимание. Общепринятым объяснением сейчас является добавление лямбда-члена Эйнштейна в релятивистское действие. И хорошо известно, что в нерелятивистской теории это соответствует добавлению отталкивающего квадратичного потенциала [18–25]. Рассмотрим круговую задачу двух тел. Две массы m_1 и m_2, находящиеся в точках A и B на расстоянии r друг от друга, притягиваются центральной силой по закону $F = m_1m_2f(r)$ и вращаются с угловой скоростью ω относительно точки C (рис. 1). Из уравнения баланса сил притяжения и центробежных сил следует

$$m_2f(a) = \omega^2r_1, \quad m_1f(a) = \omega^2r_2, \quad a = r_1 + r_2. \quad (1)$$

Известно, что для Ньютоновского притяжения малая масса m в треугольной точке либрации D,

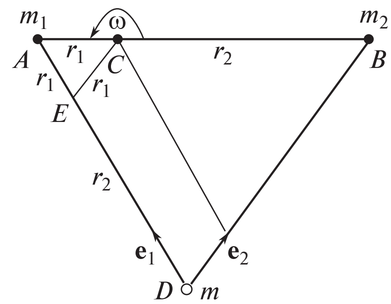

Рис. 1

расположенной в вершине равностороннего треугольника ABD, находится в равновесии. Покажем, что справедлива следующая теорема.

Теорема. Треугольная точка является точкой либрации при любой центральной силе $F = m_1m_2f(r)$.

Доказательство. На малую массу m со стороны масс m_1 и m_2 действуют силы притяжения $mm_1f(a)$ и $mm_2f(a)$, направленные по единичным векторам $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$. Их сумма с помощью (1) равна

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = m(m_1f(a)\mathbf{e}_1 + m_2f(a)\mathbf{e}_2) = \\ = m(\omega^2r_2\mathbf{e}_1 + \omega^2r_1\mathbf{e}_2) = m\omega^2(r_2\mathbf{e}_1 + r_1\mathbf{e}_2).$$

Из правила параллелограмма (рис. 1) получим $r_2\mathbf{e}_1 + r_1\mathbf{e}_2 = \overrightarrow{DC} \Rightarrow \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = m\omega^2\overrightarrow{DC}$. Таким образом, сумма сил притяжений, действующих на массу, направлена в сторону, противоположную вектору центробежной силы, а по величине в точности равна ей. Сумма центробежной силы и сил притяжения равна нулю, т.е. масса m, расположенная в вершине правильного треугольника, находится в равновесии, что и требовалось показать.

Рассмотрим случай взаимодействия масс, в котором сила взаимодействия имеет вид

$$F = m_1m_2f(r), \quad f(r) = -\frac{\gamma}{r^2} + Cr.$$

Этот закон отличается от классического наличием линейной по расстоянию силы отталкивания с коэффициентом C.

Построим функцию Лагранжа. Равносторонний треугольник AM_0B со сторонами длины a. По доказанной теореме в вершине M_0 равностороннего треугольника AM_0B малая масса находится в равновесии. В окрестности точки равновесия в точке $M(x, y)$ движение малой массы описывается уравнениями Лагранжа, с функцией Лагранжа

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \omega(x\dot{y} - y\dot{x}) + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) - V,$$

$$\omega^2 = \frac{m_1 + m_2}{a}\left(\frac{\gamma}{a^2} - Ca\right),$$

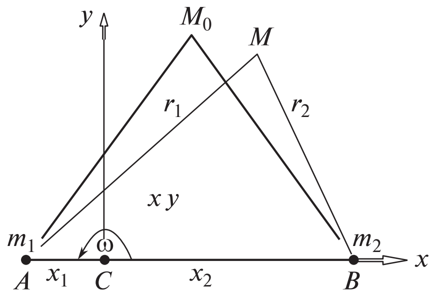

Рис. 2

$$V = -m_1\left(\frac{\gamma}{r_1} + \frac{1}{2}Cr_1^2\right) - m_2\left(\frac{\gamma}{r_2} + \frac{1}{2}Cr_2^2\right).$$

При $C = 0$ получаем классический случай. Безразмерная форма уравнений получается заменами координат точки $M(x,y)$

$$x = aX,\quad y = aY,\quad \dot{x} = a\dot{X}\omega,\quad \dot{y} = a\dot{Y}\omega,$$

$$C = \frac{\gamma}{a^3}c,\quad r_1 = aR_1,\quad r_2 = aR_2.$$

При этом преобразовании равносторонний треугольник AM_0B переходит в треугольник с единичными сторонами. Безразмерная функция Лагранжа имеет вид

$$L = \frac{1}{2}(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) + (X\dot{Y} - Y\dot{X}) + \frac{1}{2}(X^2 + Y^2) - V_1,$$

$$V_1 = -\left(\frac{1-\mu}{R_1} + \frac{\mu}{R_2}\right) -$$

$$- K\left[\left(\frac{1-\mu}{R_1} + \frac{\mu}{R_2}\right) + \frac{1}{2}(1-\mu)R_1^2 + \frac{1}{2}\mu R_2^2\right],$$

$$K = \frac{c}{1-c},$$

$$\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

Координаты вершины равностороннего треугольника $X = \frac{1}{2} - \mu$, $Y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ определяют точку равновесия системы. Делаем замену $X = \frac{1}{2} - \mu + q_1$, $Y = \frac{\sqrt{3}}{2} + q_2$ и находим гамильтониан движения системы в окрестности точки равновесия. Функция Гамильтона линейного приближения

$$H = \frac{1}{8}\Big(4p_1^2 + 8p_1q_2 + 4p_2^2 - 8p_2q_1 +$$

$$+ q_1^2 + 6\sqrt{3}(2\mu - 1)q_1q_2 - 5q_2^2\Big) +$$

$$+ \frac{1}{8}K(-3q_1^2 + 6\sqrt{3}(2\mu - 1)q_1q_2 - 9q_2^2).$$

Линейные уравнения Гамильтона имеют две пары собственных значений $\lambda_2 = -\lambda_1$, $\lambda_4 = -\lambda_3$, отличающихся знаком. Квадраты их можно привести к следующему удобному для анализа виду

$$\lambda_1^2 = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{(1-3K)^2 - 27m(1+K)^2} - (1-3K)\right),$$

$$\lambda_3^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{(1-3K)^2 - 27m(1+K)^2} - (1-3K)\right),$$

$$K = \frac{c}{1-c},\quad m = \mu - \mu^2.$$

При выполнении условия $m < m_*(K) = \frac{1}{27}\left(\frac{1-3K}{1+K}\right)^2$, $K < 1/3$ собственные числа являются чисто мнимыми и равновесие устойчиво в линейном приближении.

Выраженные через исходные параметры условия устойчивости принимают вид

$$\mu < \mu_*(c) = \frac{1}{18}(9 - \sqrt{-192c^2 + 96c + 69}) = \\ = \frac{2(1-4c)^2}{3(\sqrt{-192c^2 + 96c + 69} + 9)},\quad c < \frac{1}{4}. \tag{2}$$

Функция $\mu_*(c)$ монотонно убывает от значения $\mu_*(0) = \frac{9-\sqrt{69}}{18}$, соответствующего классическому случаю до нуля при $c = 1/4$. Таковы особенности треугольной точки Лагранжа.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы получили Лоренц-релятивистский аналог уравнений Фридмана, обобщающий решение Милна—МакКри [23, 24] в различных направлениях: ввели лямбда-член, обосновали их модель, выведя из системы Власова-Пуассона, ввели отталкивание субстанции по аналогии с кулоновским, перешли к уравнению Гамильтона-Якоби, поставили вопрос о зависимости постоянной Хаббла от массы и заряда субстанции [25]. Полученное решение отличается от решения Милна—МакКри [23, 24] и от обобщения его добавкой Лямбда члена [20, 21] Лоренцевой метрикой и показывает несколько другое поведение: здесь лямбда член в точности компенсирует тяготение, а в [20, 21] приводит к ускоренному расширению. В рамках моделей Милна—Маккри с Лямбда-членом исследованы треугольные точки Лагранжа: оказалось, что они остаются точками Лагранжа для любого центрального закона взаимодействия. Они исследованы на устойчивость в зависимости от величины Лямбды Эйнштейна.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена по теме государственного задания 123021700055-6.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фок В.А.* Теория пространства, времени и тяготения. М.: ЛКИ, 2007.
2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. М.: Наука, 1988.
3. *Вейнберг С.* Гравитация и космология. М.: Мир, 1975, 696 с.
4. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия. Методы и приложения. М.: Наука. 1986.
5. *Веденяпин В.В., Негматов М.А.* О выводе и классификации уравнений типа Власова и МГД. Тождество Лагранжа и форма Годунова // Теоретическая и математическая физика. 2012. Т. 170. № 3. С. 468–480.
6. *Веденяпин В.В., Негматов М.-Б. А., Фимин Н.Н.* Уравнения типа Власова и Лиувилля, их микроскопические, энергетические и гидродинамические следствия. Изв. РАН. Сер. матем. 2017. Т. 81. № 3. С. 45–82.
7. *Веденяпин В.В., Негматов М.А.* О выводе и классификации уравнений типа Власова и магнитной гидродинамики. Тождество Лагранжа, форма Годунова и критическая масса. СМФН. 2013. Т. 47. С. 5–17.
8. *Choquet-Bruhat Y.* General relativity and Einstein's Equations. New York: Oxford University Press. 2009.
9. *Orlov Yu.N., Pavlotsky I.P.* BBGKY hierarchies and Vlasov's equations in postgalilean aproximation // Physica A. 1988. V. 151. P. 318.
10. *Okabe T., Morrison P.J., Friedrichsen J.E. III, Shepley L.C.* "Hamiltonian Dynamics of Spatially-Homogeneous Vlasov-Einstein Systems," Physical Review D. 2011. V. 84, 024011 (11 p.).
11. *Pegoraro F., Califano F., Manfredi G., Morrison P.J.* "Theory and Applications of the Vlasov Equation," European Journal of Physics D. 2015. V. 69. P. 68 (3 p.).
12. *Cercigniani C., Kremer G.M.* The relativistic Boltzmann Equation: theory and applications. Boston, Basel, Berlin: Birghause, 2002.
13. *Choquet-Bruhat Y.*, Introduction to general relativity, black holes and cosmology. New York: Oxford University Press. 2015.
14. *Rein G., Rendall A.D.* Global existence of solutions of the spherically symmetric Vlasov-Einstein system with small initial data, Commun. Math.Phys. 1992. V. 150. P. 561–583.
15. *Kandrup H.E., Morrison P.J.* Hamiltonian structure of the Vlasov–Einstein system and the problem of stability for spherical relativistic star clusters // Ann. Phys. 1993. V. 225. P. 114–166.
16. *Козлов В.В.*, Общая теория вихрей, Изд-во Удмуртского ун-та, Ижевск, 1998, 239 с.
17. *Козлов В.В.* Гидродинамика гамильтоновых систем//Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1 Матем. Мех. 1983. № 6. С. 10–22.
18. *Веденяпин В.В., Парёнкина В.И., Свирщевский С.Р.* Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2022. V. 62. № 6. С. 1016–1029.
19. *Веденяпин В.В., Негматов М.А.* О топологии стационарных решений гидродинамических и вихревых следствий уравнения Власова и метод Гамильтона–Якоби. Докл. РАН. 2013. V. 449. № 5. С. 521–526;
20. *Веденяпин В.В., Воронина М.Ю., Русскoв А.А.* О выводе уравнений электродинамики и гравитации из принципа наименьшего действия. Доклады РАН. 2020. Т. 495. С. 9–13.
21. *Vedenyapin V.V., Fimin N.N., Chechetkin V.M.* The generalized Friedman model as a self–similar solution of Vlasov–Poisson equations system // European Physical Journal Plus. 2021. V. 136. № 670.
22. *Веденяпин В.В.* "О выводе уравнений электродинамики и гравитации из принципа наименьшего действия, методе Гамильтона–Якоби и космологических решениях", Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр. 2022. V. 504. P. 51–55.
23. *Milne E.A.* Relativity, Gravitation and World–Structure. Oxford Univ. Press, 1935.
24. *McCrea W.H., Milne E.A.* Quart. J. Math. 1934. V. 5. P. 73.
25. *Gurzadyan V.G.* The cosmological constant in the McCree-Miln Cosmological Scheme. Observatory. 1985. V. 105. P. 42.

ON DERIVATION OF EQUATIONS OF GRAVITATION FROM THE PRINCIPLE OF LEAST ACTION, RELATIVISTIC MILNE-MCCREE SOLUTIONS AND LAGRANGE POINTS

V. V. Vedenyapin[a], A. A. Bay[a], and A. G. Petrov[b]

[a] *Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

[b] *A.Yu. Ishlinskii Institute of Mechanic Problems, Moscow, Russian Federation*

We suggest the derivation of gravitation equations in the framework of Vlasov-Poisson relativistic equations with Lambda-term from the classical least action and use Hamilton-Jacobi consequence for cosmological solutions and investigate Lagrange points.

Keywords: Vlasov equation, Miln-McCree solutions, Vlasov-Poisson equation, Lagrange points