

УДК 517.518.86

НЕРАВЕНСТВО БЕРНШТЕЙНА ДЛЯ ПРОИЗВОДНОЙ РИССА ДРОБНОГО ПОРЯДКА, МЕНЬШЕГО ЕДИНИЦЫ, ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА

© 2023 г. А. О. Леонтьева^{1,*}

Представлено академиком В.И. Бердышевым

Поступило 01.07.2023 г.

После доработки 10.10.2023 г.

Принято к публикации 03.11.2023 г.

Рассматривается неравенство Бернштейна для производной Рисса порядка $0 < \alpha < 1$ целых функций экспоненциального типа в равномерной норме на вещественной оси. Для этого оператора получена соответствующая интерполяционная формула; она имеет неравномерные узлы. При помощи этой формулы при всех $0 < \alpha < 1$ найдено точное неравенство Бернштейна, а именно, выписаны экстремальная целая функция и точная константа.

Ключевые слова: целые функции экспоненциального типа, производная Рисса, неравенство Бернштейна, равномерная норма, функции Бесселя

DOI: 10.31857/S2686954323600611, **EDN:** CZIEUW

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ИСТОРИЯ

Неравенства Бернштейна для производных целого и дробного порядка тригонометрических полиномов и целых функций экспоненциального типа играют важную роль в теории приближения функций. Обзор результатов по этой тематике можно найти, например, в статьях [1–3]. В данной статье обсуждается неравенство Бернштейна для производной Рисса порядка $0 < \alpha < 1$ на классе С.Н. Бернштейна \mathbf{B}_σ целых функций экспоненциального типа не выше $\sigma > 0$, ограниченных на вещественной оси. Исторические сведения и подробную информацию о дробных интегралах и производных Рисса можно найти в [4, гл. 25, 26].

Нас будет интересовать производная Рисса для целых функций одной переменной из класса \mathbf{B}_σ . Этот класс содержит подкласс $\mathbf{V}_\sigma \subset \mathbf{B}_\sigma$ целых функций экспоненциального типа, представимых в виде

$$f(z) = \int_{-\sigma}^{\sigma} e^{itz} ds(t),$$

где s – комплекснозначная функция ограниченной вариации. На функциях класса \mathbf{V}_σ производная Рисса порядка $\alpha > 0$ определяется при помощи множителя Фурье $|t|^\alpha$:

$$D^\alpha f(z) = \int_{-\sigma}^{\sigma} |t|^\alpha e^{itz} ds(t). \quad (1)$$

Таким определением пользовались, в частности, П. Сайвин [5] и П.И. Лизоркин [6].

Из (1) видно, что производную Рисса в одномерном случае можно считать дробной степенью второй производной: $D^\alpha = (-D^2)^{\alpha/2}$. Для $m \in \mathbb{N}$ при $\alpha = 2m$ она превращается в классическую производную порядка $2m$: $D^{2m} f = (-1)^m f^{(2m)}$. При $\alpha = 2m - 1$ получается производная порядка $2m - 1$ сопряженной функции: $D^{2m-1} f = (-1)^{m-1} \widetilde{f}^{(2m-1)} = (-1)^{m-1} \widetilde{f^{(2m-1)}}$.

Для целого неотрицательного $\sigma = n$ класс \mathbf{V}_σ содержит пространство \mathcal{T}_n тригонометрических полиномов порядка n с комплексными коэффициентами. Для них, согласно (1), производная Рисса задается при помощи множителя Фурье $|k|^\alpha$:

$$D^\alpha f_n(x) = \sum_{k=-n}^n |k|^\alpha c_k e^{ikx}, \quad f_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}.$$

¹Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия

*E-mail: lao-imm@yandex.ru

Для $0 < \alpha < 1$ определение (1) равносильно определению при помощи сингулярного интеграла

$$D^\alpha f(x) = C(\alpha) \int_0^\infty \frac{f(x+y) - 2f(x) + f(x-y)}{y^{\alpha+1}} dy, \quad (2)$$

$$0 < \alpha < 1; \quad C(\alpha) = -\frac{\Gamma(\alpha+1) \sin \frac{\pi\alpha}{2}}{\pi}.$$

Интеграл (2) был введен Е.М. Стейном [7] при $0 < \alpha < 2$ в связи с изучением потенциала Рисса в многомерном случае. П.И. Лизоркин [8] и С.Г. Самко [9] изучали представление дробных производных в виде сингулярных интегралов для произвольного $\alpha > 0$ в связи с исследованием потенциала Рисса. Будем считать, что производная Рисса порядка $0 < \alpha < 1$ функции $f \in \mathbf{B}_\sigma$ определяется при помощи формулы (2).

В данной статье нас будет интересовать точное неравенство Бернштейна для производной Рисса целых функций из \mathbf{B}_σ :

$$\|D^\alpha f\| \leq \mathcal{B}_\sigma(\alpha) \|f\|, \quad f \in \mathbf{B}_\sigma, \quad (3)$$

в равномерной норме $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in (-\infty, \infty)\}$ на числовой оси.

Неравенство (3) хорошо изучено при $\alpha \geq 1$. А именно, справедливы следующие утверждения.

Теорема А. Для производной Рисса порядка $\alpha > 0$ функции $f \in \mathbf{B}_\sigma$ имеет место интерполяционная формула по равномерным узлам

$$D^\alpha f(x) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \mu_\ell(\alpha) f\left(x + \frac{\pi\ell}{\sigma}\right) \quad (4)$$

со свойствами коэффициентов

$$1. (-1)^\ell \mu_\ell(\alpha) \geq 0, \quad \ell \in \mathbb{Z}, \quad \alpha \geq 1,$$

$$2. \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} (-1)^\ell \mu_\ell(\alpha) = \sigma^\alpha.$$

Как следствие, справедлива

Теорема В. При $\alpha \geq 1$ выполняется точное неравенство Бернштейна

$$\|D^\alpha f\| \leq \sigma^\alpha \|f\|, \quad f \in \mathbf{B}_\sigma, \quad (5)$$

на функции $f(x) = a \cos \sigma x$ оно обращается в равенство.

Н.И. Ахиезер [10] в случае $\alpha = 1$ явно нашел формулу (4) и, как следствие, из нее получил неравенство (5) с константой σ . П. Сайвин [5] показал, что для широкого класса операторов, действующих на множестве \mathbf{V}_σ , в частности, для производной Рисса, возможно представление вида

(4). Из его результатов следует, что коэффициенты формулы (4) для производной Рисса порядка $\alpha > 0$ с точностью до множителя являются коэффициентами Фурье функции, равной $|t|^\alpha$ при $|t| \leq \pi$ и 2π -периодически продолженной на всю ось. П.И. Лизоркин [6] установил их знакопеременность при $\alpha \geq 1$. Пользуясь этим, он обосновал неравенство (5) для всех $\alpha \geq 1$ на множестве \mathbf{B}_σ .

Неравенство (5) выполняется с константой σ^α также в пространствах L_p , $1 \leq p < \infty$, как для полиномов, так и для целых функций. В этом можно убедиться, применив неравенство треугольника к (4). Кроме того, в L_p , $1 \leq p < \infty$, константа σ^α является точной. В случае тригонометрических полиномов оценку снизу дает полином e^{int} . В случае целых функций это доказал П.И. Лизоркин [6], построив последовательность целых функций из $L_p(\mathbb{R})$, сходящуюся к $\cos \sigma x$. Более того, он показал, что неравенство с константой σ^α при $1 \leq p < \infty$ точное, но не обращается в равенство ни на какой функции.

В 1935 г. Г.Т. Соколов [11] исследовал поставленную С.Н. Бернштейном задачу о нахождении точной константы $B_n(\alpha)$ в неравенстве

$$\|D^\alpha f_n\| \leq B_n(\alpha) \|f_n\|, \quad f_n \in \mathcal{T}_n, \quad \alpha \geq 0. \quad (6)$$

Он установил неравенство (6) для полиномов из \mathcal{T}_n с константой n^α при $\alpha \geq 1$. При $\alpha = 1$ такой результат содержится в более ранней работе Г. Сеге [12]. А.И. Козко [13] явно нашел коэффициенты интерполяционной формулы для производных Вейля–Сеге, в частности, для производной Рисса порядка α тригонометрических полиномов. На этом пути он установил справедливость неравенства (6) с константой n^α в $L_p(\mathbb{T})$, $1 \leq p \leq \infty$, для $\alpha \geq 1$.

Случай $0 < \alpha < 1$ представляется малоизученным. В 1935 г. Г.Т. Соколов [11] показал, что при $n = 2$ для $0 < \alpha < 1$ справедливо строгое неравенство $B_2(\alpha) > 2^\alpha$. А.И. Козко [13], обобщил этот результат на все четные n . В.В. Арестов и П.Ю. Глазырина [14], доказали, что $B_n(\alpha) > n^\alpha$ для $0 < \alpha < 1$ при всех $n \geq 2$.

Теорема С. При $0 < \alpha < 1$ выполняется неравенство

$$\|D^\alpha f\| \leq \frac{2\sigma^\alpha}{\alpha+1} \|f\|, \quad f \in \mathbf{V}_\sigma. \quad (7)$$

Это неравенство получил Г.Т. Соколов [11] на множестве \mathcal{T}_n . Он исходил из интерполяционной формулы по равномерным узлам и определял знаки ее коэффициентов, пользуясь выпуклостью вверх функции t^α при $0 < \alpha < 1$. П. Сайвин [5] аналогичными методами перенес неравенство (7) на функции из класса \mathbf{V}_σ .

В работе автора [15] рассматривалось неравенство

$$\|D^\alpha f_n\|_{L_p(\mathbb{T})} \leq B_n(\alpha)_p \|f_n\|_{L_p(\mathbb{T})}, \quad f_n \in \mathcal{T}_n, \quad \alpha \geq 0,$$

в пространствах L_p , $0 \leq p \leq \infty$, на периоде. Было доказано, что $B_n(\alpha)_p = n^\alpha$ при всех $0 \leq p \leq \infty$ тогда и только тогда, когда $\alpha \in \{2, 4, 6, \dots\} \cup [2n - 2, \infty)$.

2. НЕРАВЕНСТВО БЕРНШТЕЙНА ДЛЯ СЛУЧАЯ $0 < \alpha < 1$

Для формулировки результата нам понадобятся некоторые свойства нормированных функций Бесселя $j_\nu(z) = 2^\nu \Gamma(\nu + 1) J_\nu(z)/z^\nu$. Это четные целые функции экспоненциального типа 1. Подробную информацию о них можно найти в книгах [16] и [17, гл. 5, § 23]. Важно, что при $\nu > -1$ функция j_ν имеет счетное множество нулей, все нули вещественные, простые и множество нулей не имеет конечных предельных точек. Обозначим через $\{\lambda_k(\nu)\}_{k=1}^\infty$ положительные нули функции j_ν , занумерованные в порядке возрастания. В случае $\nu = -\alpha/2$ для нулей функции $j_{-\alpha/2}$ ниже используется обозначение $\lambda_k = \lambda_k(-\alpha/2)$. Наконец, обозначим $x_k = 2\lambda_k$ — положительные нули функции $j_{-\alpha/2}(x/2)$.

Теорема 1. При $\sigma > 0$ для производной Рисса порядка α , $0 < \alpha < 1$, на множестве функций $f \in \mathbf{V}_\sigma$ верна интерполяционная формула

$$\begin{aligned} (D^\alpha f)(x) &= \sigma^\alpha \kappa(\alpha) \times \\ &\times \sum_{k=1}^\infty j_{\alpha/2}^2(\lambda_k) \left[f\left(x + \frac{x_k}{\sigma}\right) - 2f(x) + f\left(x - \frac{x_k}{\sigma}\right) \right], \\ \kappa(\alpha) &= -\frac{\pi \Gamma(\alpha + 1)}{2^{2\alpha+1} \sin \frac{\pi \alpha}{2} \Gamma^2\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)}; \\ x_k &= 2\lambda_k = 2\lambda_k\left(-\frac{\alpha}{2}\right). \end{aligned}$$

При помощи теоремы 1 доказывается основной результат данной статьи.

Теорема 2. При $\sigma > 0$, $0 < \alpha < 1$ справедливы следующие утверждения.

1. Экстремальной в неравенстве (3) является функция $f_\alpha^*(\sigma x)$, где

$$f_\alpha^*(x) = 1 - 2j_{-\alpha/2}^2\left(\frac{x}{2}\right).$$

2. Точная константа $\mathfrak{B}_\sigma(\alpha)$ в неравенстве (3) равна

$$\mathfrak{B}_\sigma(\alpha) = \sigma^\alpha \mathfrak{B}(\alpha) = \sigma^\alpha \frac{2\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma^2\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)} \cdot \frac{\pi}{\cos \frac{\pi \alpha}{2}}.$$

3. Для величины $\mathfrak{B}(\alpha)$ справедливо строгое неравенство

$$\mathfrak{B}(\alpha) < \frac{2}{\alpha + 1}, \quad 0 < \alpha < 1;$$

кроме того, она монотонно убывает от 2 до 1, когда α возрастает от 0 до 1.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЙ ФОРМУЛЫ

Для обоснования теоремы 1 использовалась

Теорема D (К. Фрапье, П. Оливье Olivier-1993, Г.Р. Грозев, К.И. Рахман Rahman-1995). Пусть $\nu > -1$, $\{\lambda_k(\nu)\}_{k=1}^\infty$ — положительные нули функции j_ν , расположенные в порядке возрастания. Тогда для любой четной целой функции типа не выше 2τ , удовлетворяющей условию $x^{2\nu+1} f(x) \in L(0, \infty)$, справедлива квадратурная формула

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^{2\nu+1} f(x) dx &= \frac{2}{\tau^{2\nu+2}} \sum_{k=1}^\infty A_k(\nu) f\left(\frac{\lambda_k(\nu)}{\tau}\right); \\ A_k(\nu) &= \frac{(\lambda_k(\nu))^{2\nu}}{(J'_\nu(\lambda_k(\nu)))^2}. \end{aligned} \tag{8}$$

При этом ряд в правой части (8) сходится абсолютно.

Представим производную Рисса порядка $0 < \alpha < 1$ функции $f \in \mathbf{V}_\sigma$ в точке $x \in \mathbb{R}$ при помощи интегральной формулы (2) и применим квадратурную формулу (8) к четной целой функции

$$g(y) = \frac{f(x+y) - 2f(x) + f(x-y)}{y^2}$$

при $2\nu + 1 = 1 - \alpha$, или $\nu = -\alpha/2$. Свойство $g(y)y^{2\nu+1} = g(y)y^{1-\alpha} \in L(0, \infty)$ при $0 < \alpha < 1$, очевидно, выполняется. Экспоненциальный тип функ-

ции g не выше $2\tau = \sigma$. Наконец, с помощью соответствующих свойств функций Бесселя осуществляется преобразование коэффициентов полученной формулы.

Замечание. Квадратурные формулы по нулям функций Бесселя успешно использовал Д.В. Горбачев [20, 21] для решения многомерных экстремальных задач для целых функций экспоненциального сферического типа, а также экстремальных задач для целых функций на полуоси со степенным весом.

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор выражает благодарность В.В. Арестову за постоянное внимание к работе автора и полезное обсуждение данной тематики.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-21-00526, <https://rscf.ru/project/22-21-00526/>) в Уральском федеральном университете.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горбачев Д.В. Точные неравенства Бернштейна – Никольского для полиномов и целых функций экспоненциального типа // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22. № 5. С. 58–110. <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2021-22-5-58-110>
2. Арестов В.В. Об интегральных неравенствах для тригонометрических полиномов и их производных // Изв. АН СССР. Сер. Мат. 1981. Т. 45. № 1. С. 3–22.
3. Арестов В.В., Глазырина П.Ю. Неравенство Бернштейна – Сеге для дробных производных тригонометрических полиномов // Тр. ИММ УрО РАН. 2014. Т. 20. № 1. С. 17–31.
4. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника. 1987.
5. Civin P. Inequalities for trigonometric integrals // Duke Math. J. 1941. V. 8. № 4. P. 656–665. <https://doi.org/10.1215/S0012-7094-41-00855-4>
6. Лизоркин П.И. Оценки тригонометрических интегралов и неравенство Бернштейна для дробных производных // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1965. Т. 4. № 3. С. 109–126.
7. Stein E.M. A characterization of functions arising as potentials. I // Bull. Amer. Math. Soc. 1961. V. 67. № 1. P. 102–104.
8. Лизоркин П.И. Описание пространств $L_p^r(R^n)$ в терминах разностных сингулярных интегралов // Матем. сб. 1970. Т. 81(123). № 1. С. 79–91.
9. Самко С.Г. О пространствах риссовых потенциалов // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1976. Т. 40. № 5. С. 1143–1172.
10. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации. М.: Физматлит, 1965.
11. Соколов Г.Т. О некоторых экстремальных свойствах тригонометрических сумм // Известия Академии наук СССР. VII серия. Отделение математических и естественных наук. 1935. Т. 6–7. С. 857–884.
12. Szegő G. Über einen Satz des Herrn Serge Bernstein // Schrift. Königsberg. Gelehrten Gesellschaft. 1928. V. 5. № 4. P. 59–70.
13. Kozko A.I. The exact constants in the Bernstein–Zygmund–Szegő inequalities with fractional derivatives and the Jackson–Nicol’skii inequality for trigonometric polynomials // East J. Approx. 1998. V. 4. № 3. P. 391–416.
14. Arstov V.V., Glazyrina P.Yu. Sharp integral inequalities for fractional derivatives of trigonometric polynomials // J. Approx. Theory. 2012. V. 164. № 11. P. 1501–1512. <https://doi.org/10.1016/j.jat.2012.08.004>
15. Леонтьева А.О. Неравенство Бернштейна–Сеге для производной Рисса тригонометрических полиномов в пространствах L_p , $0 \leq p \leq \infty$, с классическим значением точной константы // Матем. сборник. 2023. Т. 214. № 3. С. 135–152. <https://doi.org/10.4213/sm9822>
16. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций. М.: ИЛ. 1949.
17. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 1981.
18. Frappier C., Olivier P. A quadrature formula involving zeros of Bessel functions // Math. of Computation. 1993. V. 60. № 201. P. 303–316. <https://doi.org/10.2307/2153168>
19. Grozev G.R., Rahman Q. I. A quadrature formula with zeros of Bessel functions as nodes // Math. of Computation. 1995. V. 64. № 210. P. 715–725. <https://doi.org/10.2307/2153447>
20. Горбачев Д.В. Экстремальные задачи для целых функций экспоненциального сферического типа // Матем. заметки. 2000. Т. 68. № 2. С. 179–187. <https://doi.org/10.4213/mzm936>
21. Горбачев Д.В. Экстремальная задача для периодических функций с носителем в шаре Матем. заметки. 2001. Т. 69. № 3. С. 346–352. <https://doi.org/10.4213/mzm508>

BERNSTEIN INEQUALITY FOR RIESZ DERIVATIVE OF FRACTIONAL ORDER LESS THAN 1 OF ENTIRE FUNCTION OF EXPONENTIAL TYPE

A. O. Leont'eva^a

^a*Ural Federal University, Yekaterinburg, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.I. Berdyshev

We consider Bernstein inequality for the Riesz derivative of order $0 < \alpha < 1$ of entire functions of exponential type in the uniform norm on the real line. The interpolation formula for this operator is obtained; this formula has non-equidistant nodes. By means of this formula, the sharp Bernstein inequality is obtained for all $0 < \alpha < 1$, more precisely, the extremal entire function and the exact constant are written out.

Keywords: entire functions of exponential type, Riesz derivative, Bernstein inequality, uniform norm, Bessel functions