

УДК 517.926

## ЦИФРОВАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ ПЕРЕКЛЮЧАЕМОЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С СОИЗМЕРИМЫМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

© 2023 г. Член-корреспондент РАН А. В. Ильин<sup>1,2,3,\*</sup>, А. С. Фурсов<sup>1,2,\*\*</sup>

Поступило 08.07.2023 г.

После доработки 27.10.2023 г.

Принято к публикации 05.11.2023 г.

Предлагается подход к построению цифрового регулятора, стабилизирующего непрерывную переключаемую линейную систему с соизмеримыми запаздываниями в управлении. Подход к стабилизации последовательно включает в себя построение переключаемой непрерывно-дискретной замкнутой системы с цифровым регулятором, переход к ее дискретной модели, представляемой в виде переключаемой системы с режимами различных порядков, построение дискретного динамического регулятора на основе квадратичного условия устойчивости замкнутой переключаемой дискретной системы.

*Ключевые слова:* дискретные системы, переключаемые системы, цифровой регулятор, стабилизация дискретных систем

**DOI:** 10.31857/S268695432360163X, **EDN:** ZBIMPA

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа посвящена одной из актуальных задач для управляемых переключаемых линейных систем, а именно задаче стабилизации нулевого положения равновесия таких систем. При этом особенный интерес представляет случай, когда переключающий сигнал, определяющий активный режим системы в каждый момент времени, является не наблюдаемым, т.е. не доступным для измерения. В этом случае, фактически, речь идет об управлении системой в условиях неопределенности, обусловленной непредсказуемым скачкообразным изменением ее математической модели в процессе функционирования. И, таким образом, указанную задачу управления можно отнести к классу задач об универсальных стабилизаторах. Традиционно для решения задач построения универсальных стабилизаторов используются методы теории робастного управления, теории адаптивного управления, теории абсолютной устойчивости, теории систем с пере-

менной структурой [1–4]. В работах [5, 6] для стабилизации переключаемых линейных систем было предложено использовать методы теории одновременной стабилизации [7], позволяющие находить универсальные регуляторы, стабилизирующие каждый режим переключаемой системы в отдельности и, таким образом, обеспечивающие необходимое условие стабилизации этой системы.

Однако, несмотря на достаточно активное развитие методов анализа и синтеза переключаемых систем управления, в настоящее время проблемам управления переключаемыми системами с запаздыванием посвящено сравнительно немного публикаций. Основной набор методов, используемых для решения задач стабилизации переключаемых линейных систем с запаздыванием, в наиболее полном объеме приведен едва ли не в единственном источнике – в монографии [8]. А именно, в ней рассмотрен подход к стабилизации по фазовому вектору линейных стационарных переключаемых систем с постоянным или зависящим от времени запаздыванием в фазовых координатах с использованием аналогового пропорционально-интегрально-дифференциального регулятора. Настоящая работа посвящена проблеме стабилизации переключаемых линейных систем с запаздыванием в управлении с использованием другого типа регулятора – цифрового стабилизатора, работающего по измеряемой выходной переменной.

<sup>1</sup>Электротехнический университет, Ханчжоу, Китай

<sup>2</sup>Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова; Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия

<sup>3</sup>Федеральный исследовательский центр информатики и управления РАН, Москва, Россия

\*E-mail: [iline@cs.msu.ru](mailto:iline@cs.msu.ru)

\*\*E-mail: [fursov@cs.msu.ru](mailto:fursov@cs.msu.ru)

В статье [9] исследовалась проблема цифровой стабилизации переключаемой линейной системы с запаздыванием в управлении. При этом предполагалось, что запаздывание одинаковое для всех режимов рассматриваемой переключаемой системы. Для указанной системы была сформулирована задача построения цифрового стабилизирующего регулятора в форме динамической обратной связи по выходу. В результате для ее решения был предложен алгоритм, включающий два основных шага – переход от исходной непрерывной системы к ее точной дискретной модели (вообще говоря, более высокого динамического порядка) и поиск дискретного динамического регулятора для полученной переключаемой дискретной системы. Одним из важных предположений, при котором решалась указанная задача, являлось условие синхронности моментов переключений стабилизируемой системы с моментами времени работы дискретного регулятора.

В настоящей работе предлагается обобщить приведенную задачу стабилизации на случай, когда режимы переключаемой системы имеют различные запаздывания в управлении.

Итак, рассматривается непрерывная переключаемая линейная система со скалярным входом и скалярным выходом с соизмеримыми запаздываниями в управлении

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{\sigma}x(t) + b_{\sigma}u(t - \theta_{\sigma}), \\ y(t) = c_{\sigma}x(t), \end{cases} \quad \sigma \in S_{0,\gamma}, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

где  $\sigma: R_+ \rightarrow I = \{1, \dots, m\}$  – непрерывная справа кусочно-постоянная функция (переключающий сигнал);  $S_{0,\gamma}$  – множество переключающих сигналов  $\sigma$ , точки разрыва которых принадлежат множеству  $\{l\gamma\}$ , где  $\gamma$  – некоторое положительное число, а  $l = 0, 1, 2, \dots$ ;  $x \in R^n$  – вектор состояния,  $y \in R$  – измеряемый скалярный выход,  $u \in R$  – управляющий вход;  $A_{\sigma} = A \circ \sigma$  – композиция отображения  $A: I \rightarrow \{A_1, \dots, A_m\}$  и переключающего сигнала  $\sigma$ ;  $b_{\sigma} = b \circ \sigma$ ,  $c_{\sigma} = c \circ \sigma$  и  $\theta_{\sigma} = \theta \circ \sigma$  – аналогичные композиции для отображений  $b: I \rightarrow \{b_1, \dots, b_m\}$ ,  $c: I \rightarrow \{c_1, \dots, c_m\}$ ,  $\theta: I \rightarrow \{\theta_1, \dots, \theta_m\}$ . Здесь  $\theta_i > 0$  – величины постоянных запаздываний, причем  $\theta_i/\gamma$  и  $\theta_i/\theta_j$  – рациональные числа для любых  $i, j \in I$ . Далее считаем, что переключающий сигнал  $\sigma(t)$  не доступен для измерения в процессе функционирования системы (1).

Значение функции  $\sigma$  в каждый момент времени определяет активный режим  $(c_i, A_i, b_i)$  переключаемой системы (1), описываемый линейной стационарной системой с запаздыванием в управлении

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + b_i u(t - \theta_i), \\ y(t) = c_i x(t). \end{cases}$$

Решением уравнения состояния системы (1) при заданном управлении  $u(t)$  (считаем, что  $u(t) \equiv 0$  при  $t \leq 0$ ), начальном условии  $x(0) = x_0$  и переключающем сигнале  $\sigma \in S_{0,\gamma}$  является решение линейной нестационарной системы с запаздыванием

$$\dot{x} = A_{\sigma(t)}x + b_{\sigma(t)}u(t - \theta_{\sigma(t)}), \quad x(0) = x_0. \quad (2)$$

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ СТАБИЛИЗАЦИИ

Построение цифрового алгоритма управления для переключаемой линейной системы (1) предполагает построение соответствующей непрерывно-дискретной системы, включающей цифровой регулятор. Такая система описывается с помощью дифференциально-разностных уравнений. Приведем в явном виде эти уравнения.

Цифровой регулятор для непрерывной системы представляется в виде последовательного соединения трех звеньев: идеального квантователя (модель аналого-цифрового преобразователя), преобразующего аналоговый сигнал  $y(t)$  в дискретную (решетчатую) функцию  $y[lT] = y(lT)$  ( $T > 0, l = 0, 1, \dots$ ); дискретного регулятора (алгоритм работы для цифрового вычислительного устройства)

$$\begin{cases} v[l+1]T = Qv[lT] + qy[lT] \\ u[lT] = Hv[lT] + hu[lT], \quad v[0] = v_0 \end{cases} \quad (3)$$

и формирующего элемента (модель цифро-аналогового преобразователя)

$$u(t) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t}{T} \rfloor} u[jT]S(t - jT), \quad S(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, T), \\ 0, & t \notin [0, T). \end{cases} \quad (4)$$

Здесь  $T$  – период квантования по времени  $t$  (считаем, что  $T < \gamma$ ),  $\lfloor \cdot \rfloor$  – целая часть действительного числа,  $Q \in R^{r \times r}$ ,  $q \in R^{r \times 1}$ ,  $H \in R^{1 \times r}$ ,  $h \in R$  ( $r$  – порядок регулятора),  $u[\cdot]$ ,  $y[\cdot]$ ,  $v[\cdot]$  – дискретные функции, определенные на последовательности  $\{lT\}_{l=0}^{\infty}$ , формирующий элемент представлен фиксатором нулевого порядка [10].

Замыкая систему (1) регулятором (3)–(4), получаем замкнутую непрерывно-дискретную (дифференциально-разностную) систему

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{\sigma}x(t) + b_{\sigma}u(t - \theta_{\sigma}), \\ v[l+1]T = Qv[lT] + qc_{\sigma}x(lT), \\ \sigma(t) \in S_{0,\gamma}, \quad x(0) = x_0, \quad v[0] = v_0, \end{cases} \quad (5)$$

где управляющая функция  $u$  описывается следующим образом

$$u(t - \theta_\sigma) = \begin{cases} \sum_{m=0}^{\left\lfloor \frac{t-\theta_\sigma}{T} \right\rfloor} (Hv[lT] + hc_\sigma x(lT))S(t - \theta_\sigma - mT), & \text{если } t \geq \theta_\sigma, \\ 0, & \text{если } 0 \leq t < \theta_\sigma. \end{cases} \quad (6)$$

Система (5) записана при условии, что моменты времени  $t$  и  $lT$  согласованы ( $l = \left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor$ ), т.е.

$$lT \leq t < (l+1)T, \quad l = 1, 2, \dots$$

По аналогии с уравнением состояния системы (1) решением уравнения состояния системы (5) при заданном управлении  $u(t)$  (считаем, что  $u(t) \equiv 0$  при  $t \leq 0$ ), начальных условиях  $x(0) = x_0$ ,  $v[0] = v_0$  и переключающем сигнале  $\sigma \in S_{0,\gamma}$  будем считать решение линейной нестационарной дифференциально-разностной системы с запаздыванием

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t) + b_{\sigma(t)}u(t - \theta_{\sigma(t)}), \\ v[(l+1)T] = Qv[lT] + qc_{\sigma(t)}x(lT), \\ lT \leq t < (l+1)T, \quad l = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Замкнутую непрерывно-дискретную систему (5) будем называть  $S_{0,\gamma}$ -устойчивой, а регулятор (3)–(4) стабилизирующим, если для любых  $x(0)$ ,  $v[0]$  и  $\sigma \in S_{0,\gamma}$  для соответствующего решения выполнено:

$$\left\| \begin{matrix} x(t) \\ v[lT] \end{matrix} \right\| \rightarrow 0, \quad \text{при } t \rightarrow +\infty, \quad l = \left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor. \quad (7)$$

Здесь под нормой вектора понимается евклидова норма. Теперь приведем точную постановку задачи стабилизации.

**Задача.** Для переключаемой линейной системы (1) с заданным  $\gamma > 0$  построить цифровой регулятор вида (3)–(4), обеспечивающий  $S_{0,\gamma}$ -устойчивость замкнутой непрерывно-дискретной системы (5).

Задачу построения цифрового стабилизатора для непрерывно-дискретной системы (5) сведем к задаче построения дискретного стабилизатора для соответствующей дискретной модели. При этом необходимо обеспечить выполнение условий согласованности, гарантирующих эквивалентность свойства устойчивости замкнутой непрерывно-дискретной системы (5) и ее дискретной модели, замкнутой тем же регулятором.

### 3. ПЕРЕХОД К ДИСКРЕТНОЙ МОДЕЛИ

Для решения сформулированной задачи стабилизации перейдем от непрерывно-дискретной системы (5) к ее дискретной модели. Для этого

воспользуемся методом точной дискретизации [10, с. 81; 11, с. 40], в соответствии с которым вначале строится дискретная модель для исходной системы (1), а затем она замыкается дискретным регулятором (3).

Выберем константы  $l_0 \in N$  и  $T > 0$  так, чтобы, во-первых, выполнялось равенство  $\gamma = l_0 T$  и, во-вторых, нашлись бы константы  $l_i \in N$  ( $i \in I$ ), для которых  $\theta_i = l_i T$  (заметим, что это всегда можно сделать в силу соизмеримости запаздываний).

Заметим теперь, что если  $\sigma(t) \in S_{0,\gamma}$ , то на решения системы (5) влияют значения переключающего сигнала только в моменты  $t = lT$  ( $l = 0, 1, \dots$ ). Поэтому будем в дальнейшем для дискретной модели переключаемой системы (5) в качестве переключающих сигналов рассматривать соответствующие решетчатые функции  $\sigma[lT]$  ( $T > 0$ ,  $l = 0, 1, \dots$ ), а множество таких функций обозначать через  $S_{0,\gamma}$ . Обозначим через  $x[lT]$  решетчатую вектор-функцию для вектора состояния  $x(t)$  системы (1).

Итак, пусть в момент времени  $t = lT$  вектор состояния системы (1) равен  $x[lT]$  и  $\sigma[lT] = i$ . Тогда, используя формулу Коши для решений линейной стационарной неоднородной системы, имеем

$$x[(l+1)T] = e^{AT} x[lT] + \int_{lT}^{(l+1)T} e^{A((l+1)T-\xi)} b_i u(\xi - \theta_i) d\xi.$$

Поскольку на входе непрерывной системы (1) действует фиксатор нулевого порядка, то  $u(t - \theta_i) \equiv u[(l - l_i)T]$  для всех  $t \in [lT, (l+1)T)$ . Следовательно,

$$x[(l+1)T] = e^{AT} x[lT] + \int_{lT}^{(l+1)T} e^{A((l+1)T-\xi)} d\xi b_i u[(l - l_i)T].$$

Выполнив под интегралом замену переменной  $\mu = \xi - lT$ , получим

$$x[(l+1)T] = e^{AT} x[lT] + \int_0^T e^{A(T-\mu)} d\mu b_i u[(l - l_i)T].$$

Введем обозначения

$$\hat{A}_i = e^{AT}, \quad \hat{b}_i = \int_0^T e^{A(T-\mu)} d\mu b_i,$$

$$\begin{aligned} x_{n+1}[lT] &= u[(l-1)T], \\ x_{n+2}[lT] &= u[(l-2)T], \\ &\dots \\ x_{n+l}[lT] &= u[(l-l_i)T]. \end{aligned} \quad (8)$$

Тогда

$$\begin{aligned} x_{n+1}[(l+1)T] &= u[lT], \\ x_{n+2}[(l+1)T] &= x_{n+1}[lT], \\ x_{n+3}[(l+1)T] &= x_{n+2}[lT], \\ &\dots \\ x_{n+l_i}[(l+1)T] &= x_{n+l_i-1}[lT]. \end{aligned} \quad (9)$$

Используя введенные обозначения и учитывая, что  $\sigma \in S_{0,\gamma}$ , получим дискретную модель  $i$ -го режима системы (1) в следующем виде

$$\begin{cases} x^{(i)}[(l+1)T] = \bar{A}_i x^{(i)}[lT] + \bar{b}_i u[lT] \\ y[lT] = \bar{c}_i x^{(i)}[lT], \quad \sigma \in [S]_{0,\gamma}. \end{cases} \quad (10)$$

где

$$x^{(i)}[lT] = (x_1[lT], \dots, x_n[lT], x_{n+1}[lT], \dots, x_{n+l_i}[lT])^\top$$

– расширенный вектор состояния дискретной модели  $i$ -го режима системы (1),

$$\bar{A}_i = \begin{pmatrix} \hat{A}_i & O_{n \times (l_i-1)} & \hat{b}_i \\ O_{1 \times n} & O_{1 \times (l_i-1)} & 0 \\ O_{(l_i-1) \times n} & E_{(l_i-1) \times (l_i-1)} & O_{(l_i-1) \times 1} \end{pmatrix}, \quad \bar{b}_i = \begin{pmatrix} O_{n \times 1} \\ 1 \\ O_{(l_i-1) \times 1} \end{pmatrix},$$

$$\bar{c}_i = (c_i O_{1 \times l_i}) \in R^{1 \times (n+l_i)}.$$

– блочные матрица и векторы. Здесь  $O$ ,  $E$  – нулевая и единичная матрицы соответствующих размерностей.

Таким образом, получаем дискретную модель системы (1) в виде переключаемой дискретной системы вида

$$\begin{cases} x^{(\sigma)}[(l+1)T] = \bar{A}_\sigma x^{(\sigma)}[lT] + \bar{b}_\sigma u[lT] \\ y[lT] = \bar{c}_\sigma x^{(\sigma)}[lT], \quad \sigma \in [S]_{0,\gamma}, \quad l = 0, 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (11)$$

Теперь заметим, что режимы (10) построенной переключаемой дискретной системы (11) уже не содержат запаздываний, однако имеют различные динамические порядки, поскольку  $x^{(i)} \in R^{n+l_i}$  для каждого  $i \in I$ . В связи с этим, для того чтобы определить решение уравнения состояния полученной переключаемой системы, необходимо решить вопрос о согласовании начальных условий для уравнений состояния различных режимов при переключениях между ними.

Итак, пусть в момент времени  $\tilde{l}T$  режим  $j$  переключаемой системы (11) сменяется режимом  $i$ , причем  $\theta_j \neq \theta_i$ . Тогда, учитывая (8) и (9), зададим начальное значение для вектора состояния  $x^{(i)}$   $i$ -го режима в момент  $\tilde{l}T$  следующим образом

$$\begin{aligned} x^{(i)}[\tilde{l}T] &= \\ &= (x_1[\tilde{l}T], \dots, x_n[\tilde{l}T], u[(\tilde{l}-1)T], \dots, u[(\tilde{l}-l_i)T])^\top, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $x_1[\tilde{l}T], \dots, x_n[\tilde{l}T]$  – конечные значения первых  $n$  компонент вектора состояния  $x^j$   $j$ -го режима на предыдущем промежутке времени.

Решением уравнения состояния переключаемой системы (11) при заданном управлении  $u$ , переключающем сигнале  $\sigma \in [S]_{0,\gamma}$  и начальном условии  $x^{(\sigma(0))}[0] \in R^{n+l_\sigma}$  будем называть дискретную вектор-функцию  $\tilde{x}[lT] \in R^{n+p}$  ( $p = \arg \max_i l_i$ ), совпадающую на каждом промежутке активности  $i$ -го режима ( $i \in I$ ) с вектор-функцией  $\tilde{x}^{(i)}[lT] \in R^{n+p}$ . При этом вектор-функция

$$\tilde{x}^{(i)}[lT](x_1[lT], \dots, x_n[lT], x_{n+1}[lT], x_{n+l_i}[lT], \underbrace{0, \dots, 0}_{p-l_i})^\top \in R^{n+p}$$

порождается решением уравнения состояния  $i$ -го режима (10) на соответствующем промежутке активности  $[\tilde{l}T; \hat{l}T]$  этого режима с начальными условиями (12).

При введенном выше согласовании начальных условий в моменты переключений системы (11), выполняется свойство точной дискретизации [10, с. 81]

$$\begin{aligned} x(t)|_{t=lT} &= \bar{x}[lT] = (x_1[lT], \dots, x_n[lT])^\top, \\ l &= 0, 1, \dots, \end{aligned}$$

где  $x(t)$  – решение уравнения состояния непрерывной системы (1) при фиксированном управлении  $u$  и заданных  $\sigma \in S_{0,\gamma}$ ,  $x(0) \in R^n$ , а  $\bar{x}[lT]$  – вектор, образованный первыми  $n$  компонентами вектора  $\tilde{x}[lT]$  решения соответствующей дискретной системы (11) при согласованных начальных условиях

$$\begin{pmatrix} x_1^{(\sigma(0))}[0] \\ \vdots \\ x_n^{(\sigma(0))}[0] \\ x_{n+1}^{(\sigma(0))}[0] \\ \dots \\ x_{n+l_{\sigma(0)}}^{(\sigma(0))}[0] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Замыкая систему (11) регулятором (3), получим дискретную модель замкнутой непрерывно-дискретной системы (5)

$$\begin{cases} x^{(\sigma)}[(l+1)T] = (\bar{A}_\sigma + \bar{b}_\sigma h \bar{c}_\sigma) x^{(\sigma)}[lT] + \bar{b}_\sigma H v[lT], \\ v[(l+1)T] = q \bar{c}_\sigma x^{(\sigma)}[lT] + Q v[lT], \quad \sigma \in [S]_{0,\gamma}. \end{cases} \quad (14)$$

Решением системы (14) считаем вектор  $(\tilde{x}[lT] v[lT])^\top$ . Замкнутую дискретную переключаемую систему (14) будем называть  $[S]_{0,\gamma}$ -устойчи-

вой, если для любых начальных условий  $x^{\sigma[0]}$ ,  $v[0]$ , и  $\sigma \in [S]_{0,\gamma}$  для соответствующего решения выполнено:

$$\left\| \begin{array}{l} \tilde{x}[lT] \\ v[lT] \end{array} \right\| \rightarrow 0, \quad \text{при } l \rightarrow +\infty. \quad (15)$$

На основании результатов работы [9] сформулируем теорему о согласованности свойства устойчивости систем (5) и (14).

**Теорема 1.** *Непрерывно-дискретная система (5)  $S_{0,\gamma}$ -устойчива тогда и только тогда, когда  $[S]_{0,\gamma}$ -устойчива переключаемая дискретная система (14).*

Таким образом, поставленная в п. 2 задача стабилизации, в соответствии с теоремой 1, может быть сведена к задаче стабилизации по выходу дискретной системы (11) дискретным регулятором (3).

#### 4. ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ЗАМКНУТОЙ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ

Прежде чем перейти к проблеме построения стабилизирующей обратной связи для системы (11), рассмотрим вопрос о проверке устойчивости замкнутой системы (14). Одно из известных [9, 12–15] достаточных условий устойчивости переключаемой линейной системы при произвольных переключениях основано на проверке факта существования общей функции Ляпунова для конечного набора режимов этой системы. А именно, справедлива следующая теорема [9].

**Теорема 2.** *Пусть существует положительно определенная матрица  $P$ , удовлетворяющая системе линейных матричных неравенств*

$$\Gamma_i P \Gamma_i^T - P < 0 \quad i = 1, \dots, m.$$

Тогда дискретная переключаемая линейная система

$$\begin{aligned} \xi[(l+1)T] &= \Gamma_\sigma \xi[lT], \\ \xi &\in R^n, \quad \Gamma_i \in R^{n \times n}, \quad \sigma \in [S]_{0,\gamma} \end{aligned} \quad (16)$$

$[S]_{0,\gamma}$ -устойчива.

Для того чтобы применить сформулированное достаточное условие для проверки  $[S]_{0,\gamma}$ -устойчивости замкнутой системы (14), применим к ней метод расширения динамического порядка [7, 16, 17] для приведения всех ее режимов к единой размерности. В соответствии с данным методом сопоставим системе (14) переключаемую линейную  $(n+p)$ -мерную систему вида

$$\begin{cases} \tilde{x}[(l+1)T] = (\tilde{A}_\sigma + \tilde{b}_\sigma h \tilde{c}_\sigma) x^{(\sigma)}[lT] + \tilde{b}_\sigma H v[lT], \\ v[(l+1)T] = q \tilde{c}_\sigma \tilde{x}[lT] + Q v[lT], \quad \sigma \in [S]_{0,\gamma}, \end{cases} \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{A}_i &= \begin{pmatrix} \bar{A}_i & O_{(n+l_i) \times (p-l_i)} \\ O_{(p-l_i) \times (n+l_i)} & A_i^* \end{pmatrix} \in R^{(n+p) \times (n+p)}, \\ \tilde{b}_i &= \begin{pmatrix} \bar{b}_i \\ O_{(p-l_i) \times 1} \end{pmatrix} \in R^{(n+p) \times 1}, \quad \tilde{c}_i = (\bar{c}_i O_{1 \times (p-l_i)}) \in R^{1 \times (n+p)} \end{aligned}$$

– блочные матрица и векторы. Здесь  $A_i^*$  – произвольные устойчивые матрицы порядка  $p-l_i$ ,  $O$  – нулевая матрица соответствующей размерности. Система (17) является динамическим расширением системы (14). Заметим, что динамическое расширение определяется неоднозначно и зависит от выбора устойчивых матриц  $A_i^*$ .

Опираясь на результаты работы [16], сформулируем следующую теорему о связи устойчивости систем (14) и (17).

**Теорема 3.** *Пусть некоторое динамическое расширение (17) дискретной переключаемой системы (14)  $[S]_{0,\gamma}$ -устойчиво, тогда система (14) также  $[S]_{0,\gamma}$ -устойчива.*

Таким образом, проверка  $[S]_{0,\gamma}$ -устойчивости дискретной системы (14) может быть сведена к проверке  $[S]_{0,\gamma}$ -устойчивости некоторого ее динамического расширения (17) с использованием сформулированного выше достаточного условия (теорема 2).

#### 5. ЧИСЛЕННАЯ ПРОЦЕДУРА ПОИСКА СТАБИЛИЗИРУЮЩЕГО РЕГУЛЯТОРА

Теорема 1 позволяет свести задачу построения цифрового стабилизатора (3), (4) для непрерывной переключаемой системы (1) к задаче построения дискретного регулятора (3), стабилизирующего дискретную переключаемую систему (11). Решение этой задачи существенно усложняет предположение о ненаблюдаемости переключающего сигнала в процессе функционирования рассматриваемой переключаемой системы. В связи с этим для решения указанной задачи, по аналогии с работой [9], воспользуемся методами теории одновременной стабилизации [7]. Поскольку регулятор, стабилизирующий переключаемую систему, должен стабилизировать каждый режим этой системы в отдельности, то синтез соответствующего дискретного регулятора, фактически, можно свести к задаче об одновременной стабилизации конечного семейства дискретных объектов (10) ( $i \in I$ ) единым регулятором вида (3).

Для решения задачи об одновременной стабилизации по выходу конечного семейства дискретных объектов (10), в соответствии с методами, изложенными в монографии [7]:

1) необходимо перейти к описанию этих объектов через передаточные функции

$$W_i(z) = \bar{c}_i(zI - \bar{A}_i)^{-1}\bar{b}_i = \frac{\beta_i(z)}{\alpha_i(z)} = \frac{b_{n+l_i-1}^{(i)}z^{n+l_i-1} + \dots + b_1^{(i)}z + b_0^{(i)}}{z^{n+l_i} + a_{n+l_i-1}^{(i)}z^{n+l_i-1} + \dots + a_1^{(i)}z + a_0^{(i)}}; \quad (18)$$

2) с помощью вычислительных процедур на основе алгоритма SIVIA [7, 18] построить для семейства дискретных объектов (18) множество  $\mathcal{R}$  одновременно стабилизирующих регуляторов в виде передаточных функций порядка  $r$

$$R(z) = \frac{p(z)}{g(z)} = \frac{p_r z^r + p_{r-1} z^{r-1} + \dots + p_1 z + p_0}{z^r + g_{r-1} z^{r-1} + \dots + g_1 z + g_0}. \quad (19)$$

Далее, пусть множество одновременно стабилизирующих регуляторов  $\mathcal{R}$  не пусто и  $R(z) \in \mathcal{R}$ . В соответствии с методами теории реализации [19], перейдем от описания регулятора в виде передаточной функции (19) к его описанию в пространстве состояний, т.е. к виду (3). Тогда, в силу того, что рассматриваемый регулятор одновременно стабилизирующий, то он обеспечивает для всех  $i = 1, \dots, m$  асимптотическую устойчивость замкнутых систем

$$\begin{cases} x^{(i)}[(l+1)T] = (\bar{A}_i + \bar{b}_i h \bar{c}_i) x^{(i)}[lT] + \bar{b}_i H v[lT], \\ v[(l+1)T] = q \bar{c}_i x^{(i)}[lT] + Q v[lT], \quad \sigma \in [S]_{0,r} \end{cases} \quad (20)$$

Однако одновременно стабилизирующий регулятор гарантирует лишь необходимое условие устойчивости замкнутой переключаемой системы (устойчивость каждого режима в отдельности, но не гарантирует устойчивость переключаемой системы), поэтому необходимо обеспечить дополнительную проверку стабилизирующих свойств регуляторов из множества  $\mathcal{R}$ .

Известно [7], что множеству регуляторов  $\mathcal{R}$  можно поставить в соответствие объединение  $\mathcal{P}$  конечного набора параллелотопов в пространстве  $R^{2r+1}$  коэффициентов их передаточных функций (19). Учитывая это, приведем один из возможных вариантов реализации численного алгоритма выбора на множестве  $\mathcal{R}$  стабилизирующего регулятора для переключаемой системы (11).

**Шаг 1.** На множестве  $\mathcal{P}$  в пространстве  $R^{2r+1}$  построим равномерную сетку.

**Шаг 2.** Для каждого  $j$ -го узла сетки, соответствующего некоторому одновременно стабилизирующему регулятору, выпишем соответствующую замкнутую систему вида (11), для которой построим произвольное динамическое расширение вида (17).

**Шаг 3.** Выполним проверку системы (17) на  $[S]_{0,r}$ -устойчивость, используя теорему 2 п. 4. Ес-

ли хотя бы для одного узла сетки проверка дала положительный результат, то на этом работа алгоритма закончена, поскольку, в силу теорем 1 и 3, найденный регулятор будет обеспечивать устойчивость замкнутой системы (5).

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение отметим, что изложенный в п. 5 настоящей работы алгоритм поиска стабилизатора на множестве одновременно стабилизирующих регуляторов с использованием квадратичного условия устойчивости (теорема 2 п. 4.) не является единственно возможным. Например, для проверки устойчивости замкнутых переключаемых дискретных систем можно также использовать критерий, основанный на понятии обобщенного спектрального радиуса конечного набора квадратных матриц [9, 15], или критерий, основанный на понятии сверхустойчивости дискретных систем [20]. Однако нахождение точного значения обобщенного спектрального радиуса для дискретной переключаемой системы является весьма сложной вычислительной задачей, а свойство сверхустойчивости, к сожалению, присуще весьма узкому множеству переключаемых систем. В связи с этим, по мнению авторов, наиболее оптимальным с вычислительной точки зрения следует признать использование именно квадратичного условия для проверки устойчивости переключаемых дискретных систем.

## ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2019-1621.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Рапопорт Л.Б. Математическая теория автоматического управления. М.: ЛЕНАНД, 2019.
2. Александров А.Г. Оптимальные и адаптивные системы. М., 1989.
3. Ким Д.П. Теория автоматического управления. Т. 2. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы. М., 2004.
4. Емельянов С.В. Системы автоматического управления с переменной структурой. М., 1967.
5. Фурсов А.С., Хусаинов Э.Ф. К вопросу о стабилизации переключаемых линейных систем // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 11. С. 1522–1533.
6. Фурсов А.С., Капалин И.В. Стабилизация переключаемых линейных систем регулятором переменной структуры // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 8. С. 1109–1120.

7. *Фурсов А.С.* Одновременная стабилизация: теория построения универсального регулятора для семейства динамических объектов. М., 2016.
8. *Mahtoud M.S.* Switched time-delay systems. Stability and control. Springer Sciencelk, Media, LCC 2010.
9. *Фурсов А.С., Миняев С.И., Гусева В.С.* Построение цифрового стабилизатора для переключаемой линейной системы с запаздыванием в управлении // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 8. С. 1132–1141.
10. *Поляков К.Ю.* Основы теории цифровых систем управления: учеб. пособие. СПбГМТУ, 2002.
11. *Chen T., Francis B.* Optimal sample-data control systems. Springer-Verlag. Berlin. 1994.
12. *Васильев С.Н., Маликов А.И.* О некоторых результатах по устойчивости переключаемых и гибридных систем. / Сборник статей “Актуальные проблемы механики сплошной среды. К 20-летию ИММ КазНЦ РАН”. Казань: Фолиант, 2011. Т. 1. С. 23–81.
13. *Liberzon D., Morse A.S.* Basic problems in stability and design of switched systems // IEEE Control Systems. 1999. V. 19. № 5. P. 59–70.
14. *Шпилевая О.А., Котов К.Ю.* Переключаемые системы: устойчивость и проектирование (обзор) // Автометрия. 2008. Т. 44. № 5. С. 71–87.
15. *Sun Z., Ge S.S.* Stability theory of switched dynamical systems. Springer-Verlag London Limited, 2011.
16. *Фурсов А.С., Капалин И.В.* Некоторые подходы к стабилизации переключаемых линейных систем с режимами различных динамических порядков // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 12. С. 1693–1700.
17. *Фурсов А.С., Мосолова Ю.М., Миняев С.И.* Построение систем стабилизации для переключаемых интервальных объектов с режимами различных порядков // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 11. С. 1555–1563.
18. *Жолен Л., Кицер М., Дидри О., Вальтер Э.* Прикладной интервальный анализ. М.: Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2007. 468 с.
19. *Емельянов С.В., Коровин С.К., Ильин А.В., Фомичев В.В., Фурсов А.С.* Математические методы теории управления. Проблемы устойчивости, управляемости и наблюдаемости. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013.
20. *Фурсов А.С., Мосолова Ю.М., Миняев С.И.* Цифровая сверхстабилизация переключаемой интервальной линейной системы // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 11. С. 1516–1527.

## DIGITAL STABILIZATION OF A SWITCHABLE LINEAR SYSTEM WITH COMMENSURATE DELAYS

Corresponding member of RAS **A. V. Ilin<sup>a,b,c</sup>** and **A. S. Fursov<sup>a,b</sup>**

<sup>a</sup>*Hangzhou Dianzi University, Hangzhou, RPC*

<sup>b</sup>*Lomonosov Moscow State University, Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russian Federation*

<sup>c</sup>*Federal Research Center for Informatics and Management of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

An approach to the construction of a digital controller that stabilizes a non-continuous switchable linear system with commensurate delays in control is proposed. The approach to stabilization sequentially includes the construction of a switchable continuously discrete closed system with a digital controller, the transition to its discrete model, represented as a switchable system with modes of various orders and the construction of a discrete dynamic controller based on the quadratic stability condition of a closed switchable discrete system.

**Keywords:** discrete systems, switchable systems, digital controller, stabilization of discrete systems