ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2023, том 514, с. 5–11

МАТЕМАТИКА

УДК 517.977

ФУНКЦИЯ УСЛОВНОЙ СТОИМОСТИ И НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С БЕСКОНЕЧНЫМ ГОРИЗОНТОМ

Член-корреспондент РАН С. М. Асеев[1,2,*]

Поступило 17.08.2023 г.
После доработки 07.09.2023 г.
Принято к публикации 24.10.2023 г.

Задача оптимального управления на бесконечном интервале времени с общими концевыми ограничениями сводится к семейству стандартных задач на конечных интервалах, содержащих величину условной стоимости фазового вектора в качестве терминального члена. При помощи развитого подхода для задачи с общим асимптотическим концевым ограничением получен новый вариант принципа максимума Понтрягина, содержащий явное описание сопряженной переменной. В случае задачи со свободным правым концом данный подход приводит к варианту принципа максимума в нормальной форме, сформулированному полностью в терминах функции условной стоимости.

Ключевые слова: оптимальное управление, бесконечный горизонт, асимптотическое концевое ограничение, функция условной стоимости, принцип максимума Понтрягина

DOI: 10.31857/S2686954323700315, **EDN:** DDVDRJ

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть заданы непустое выпуклое открытое множество G из $\mathbb{R}^n$, непустые замкнутые множества $M_0 \subset G$ и $M_\infty \subset \mathbb{R}^n$, функции

$$f : [0,\infty)\times G\times\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n,$$
$$f^0 : [0,\infty)\times G\times\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^1, \quad \varphi : G \to \mathbb{R}^1$$

и многозначное отображение $U:[0,\infty) \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ с непустыми значениями.

Предполагается, что при п.в. $t\in[0,\infty)$ производные $f_x(t,x,u)$ и $f_x^0(t,x,u)$ существуют для всех $(x,u)\in G\times\mathbb{R}^m$, а функции $f(\cdot,\cdot,\cdot)$, $f^0(\cdot,\cdot,\cdot)$, $f_x(\cdot,\cdot,\cdot)$ и $f_x^0(\cdot,\cdot,\cdot)$ измеримы по Лебегу-Борелю (LB-измеримы) по (t,u) для любого $x\in G$ (см. [1, Definition 6.33]) и непрерывны по x при п.в. $t\in[0,\infty)$ и всех $u\in\mathbb{R}^m$. График многозначного отображения $U(\cdot)$, т.е. множество $\operatorname{graph} U(\cdot) = \{(t,u)\in[0,\infty)\times\mathbb{R}^m : u\in U(t)\}$, предполагается LB-измеримым множеством в $\mathbb{R}^{m+1}$. Относительно функции $\varphi(\cdot)$ предполагается, что она локально липшицева.

Рассмотрим следующую задачу (P):

$$J(x(\cdot),u(\cdot)) = \varphi(x(0)) + \int_0^\infty f^0(t,x(t),u(t))dt \to \max, \quad (1)$$

$$\dot{x}(t) = f(t,x(t),u(t)), \quad (2)$$

$$u(t)\in U(t), \quad (3)$$

$$x(0)\in M_0, \quad \liminf_{t\to\infty}\rho(x(t),M_\infty) = 0. \quad (4)$$

Здесь $x(t) = (x^1(t),\dots,x^n(t))\in\mathbb{R}^n$ и $u(t) = (u^1(t), \dots, u^m(t))\in\mathbb{R}^m$ – значения фазового вектора и вектора управления соответственно в момент времени $t\ge 0$, а $\rho(a,M) = \min_{\xi\in M}\|a-\xi\|$ – расстояние от точки $a\in\mathbb{R}^n$ до непустого замкнутого множества $M\subset\mathbb{R}^n$.

Измеримую по Лебегу функцию $u:[0,\infty)\to\mathbb{R}^m$, удовлетворяющую при всех $t\ge 0$ включению (3), будем называть *управлением*. Для заданного управления $u(\cdot)$ соответствующая ему *траектория* $x(\cdot)$ определяется, как локально абсолютно непрерывное решение дифференциального уравнения (2), определенное в G на некотором конечном или бесконечном интервале времени $[0,\tau)$, $\tau>0$ (если такое решение существует). Пару

[1]*Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия*
[2]*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
**E-mail: aseev@mi-ras.ru*

$(x(\cdot),u(\cdot))$, где $u(\cdot)$ — управление, а $x(\cdot)$ — соответствующая ему траектория, будем называть *процессом*, если траектория $x(\cdot)$ определена в G на всем бесконечном интервале времени $[0,\infty)$. Процесс $(x(\cdot),u(\cdot))$ будем называть *допустимым* в (P), если для траектории $x(\cdot)$ выполняются концевые ограничения (4), а функция $t \mapsto f^0(t,x(t),u(t))$ локально интегрируема на $[0,\infty)$.

Оптимальность допустимого процесса $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ будем понимать в смысле слабо обгоняющей оптимальности (см. [4]). Именно, допустимый процесс $(x_*(\cdot),u_*(\cdot))$ будем называть *слабо обгоняюще оптимальным* (или просто *слабо обгоняющим*) в задаче (P), если для любого другого допустимого процесса $(x(\cdot),u(\cdot))$ выполняется неравенство

$$\varphi(x_*(0)) - \varphi(x(0)) + \limsup_{T\to\infty}\left[\int_0^T f^0(t,x_*(t),u_*(t))dt - \int_0^T f^0(t,x(t),u(t))dt\right] \geq 0.$$

Заметим, что в общем случае слабо обгоняющая оптимальность допустимого процесса $(x_*(\cdot),\, u_*(\cdot))$ не подразумевает сходимость несобственного интеграла в (1). Однако, даже в случае, когда несобственный интеграл в (1) сходится для процесса $(x_*(\cdot),\ u_*(\cdot))$, понятие слабо обгоняющей оптимальности слабее стандартного понятия сильной оптимальности [4].

Задачи оптимального управления вида (P) естественно возникают в экономике при исследовании процессов роста. Впервые задача оптимизации экономического роста, как вариационная задача максимизации интегрального функционала на бесконечном интервале времени (с бесконечным горизонтом), была рассмотрена в известной работе Рамсея [2]. Данной тематике посвящена обширная литература (см. [3–5]). В настоящее время рассмотрение моделей экономического роста в виде задач оптимального управления с бесконечным горизонтом является стандартным подходом в экономике (см. [6, 7]).

Основная сложность исследования задачи (P) связана с бесконечным интервалом планирования, на котором рассматривается процесс управления системой. Бесконечный интервал планирования вносит в задачу особенность, что является источником различных патологий в соотношениях принципа максимума Понтрягина для таких задач (подробнее см. [3, 8]). Асимптотическое концевое ограничение в (4) вносит в задачу дополнительные трудности. Заметим, что данное ограничение не предполагает, вообще говоря, существования предела у траектории $x(\cdot)$ на бесконечности. В моделях экономического роста выполнение асимптотических условий такого типа может рассматриваться как минимальное необходимое условие *устойчивого развития* (см. [9, 10]).

Для процесса $(x_*(\cdot),u_*(\cdot))$ (не обязательно допустимого) будем использовать следующее *ослабленное условие регулярности* (см. [1, 3, 11]).

(A1) *Существуют такие непрерывная функция* $\gamma:[0,\infty)\mapsto(0,\infty)$ *и локально интегрируемая функция* $\nu:[0,\infty)\to\mathbb{R}^1$, *что* $\{x:\|x-x_*(t)\|\leq\gamma(t)\}\subset G$ *для всех* $t\geq 0$ *и для п.в.* $t\in[0,\infty)$ *выполняется неравенство*

$$\max_{\{x:\|x-x_*(t)\|\leq\gamma(t)\}}\{\|f_x(t,x,u_*(t))\| + \|f_x^0(t,x,u_*(t))\|\} \leq \nu(t).$$

Нетрудно видеть (см. [11]), что выполнение условия $(A1)$ обеспечивает применимость к задаче Коши

$$\dot{x}(t) = f(t,x(t),u_*(t)), \qquad x(\tau) = \xi \tag{5}$$

стандартных теорем на конечных интервалах времени о существовании и непрерывной зависимости решения $x(\tau,\xi;\cdot)$ от начальных данных (τ,ξ) (см. [12], § 2.5.5, теорема 1]), а также о дифференцируемости решения $x(\tau,\xi;\cdot)$ по начальному значению ξ для всех $\tau\geq 0$ (см. [12, § 2.5.6]). В дальнейшем для краткости в случае $\tau = 0$ первый аргумент в записи $x(0,\xi;\cdot)$ будет иногда опускаться и вместо $x(0,\xi;\cdot)$ будем писать просто $x(\xi;\cdot)$.

Следующее условие роста для процесса $(x_*(\cdot),u_*(\cdot))$ было введено в [13], как обобщение условия доминирования дисконтирующего множителя (подробнее см. [3, 14]).

(A2) *Существуют такие число* $\beta>0$ *и суммируемая функция* $\lambda:[0,\infty)\mapsto\mathbb{R}^1$, *что для любого* $\zeta\in G$, $\|\zeta-x_*(0)\|<\beta$, *решение* $x(\zeta;\cdot)$ *задачи Коши* (5) *с начальным условием* $x(0)=\zeta$ *существует в* G *на интервале* $[0,\infty)$ *и*

$$\max_{\theta\in[x(\zeta;t),x_*(t)]}|\langle f_x^0(t,\theta,u_*(t)),x(\zeta;t)-x_*(t)\rangle| \overset{\text{п.в.}}{\leq} \|\zeta-x_*(0)\|\lambda(t).$$

Здесь $[x(\zeta;t),x_*(t)]$ — *отрезок с вершинами* $x(\zeta;t)$ *и* $x_*(t)$ *из* $\mathbb{R}^n$.

Для процесса $(x_*(\cdot),u_*(\cdot))$ введем усиленный вариант условия $(A2)$.

(A2') *Существуют такие число* $\beta>0$ *и суммируемая функция* $\lambda:[0,\infty)\to\mathbb{R}^1$, *что для любого* $\zeta\in G$: $\|\zeta-x_*(0)\|<\beta$ *решение* $x(\zeta;\cdot)$ *задачи Коши* (5) *с начальным условием* $x(0)=\zeta$ *существует в* G *на ин-*

тервале $[0,\infty)$ *и, кроме того, для любых* ζ_i, $\|\zeta_i - x_*(0)\| < \beta$, $i = 1, 2$, *выполняется неравенство*

$$\max_{\theta\in[x(\zeta_1;t),x(\zeta_2;t)]}|\langle f_x^0(t,\theta,u_*(t)), x(\zeta_1;t) - x(\zeta_2;t)\rangle| \overset{\text{п.в.}}{\leq} \\ \leq \|\zeta_1 - \zeta_2\|\lambda(t).$$

Здесь $[x(\zeta_1;t), x(\zeta_2;t)]$ *– отрезок с вершинами* $x(\zeta_1;t)$ *и* $x(\zeta_2;t)$.

Для заданных управлений $u(\cdot)$ и $u_*(\cdot)$, и момента времени $\tau > 0$ определим соответствующее *составное управление* $u_*^{\tau}(\cdot)$ равенством

$$u_*^{\tau}(t) = \begin{cases} u(t), & t \in [0,\tau), \\ u_*(t), & t \in [\tau,\infty). \end{cases} \qquad (6)$$

Наконец, для допустимого процесса $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ введем условие, характеризующее его устойчивость относительно малых возмущений траектории $x_*(\cdot)$ вблизи множества M_∞.

(A3) *Существует такое* $\varepsilon > 0$, *что если для допустимого процесса* $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ *в момент времени* $\tau \geq 0$ *выполняется условие* $\rho(x_*(\tau), M_\infty) \leq \varepsilon$, *то существует такое* $\delta(\tau, x_*(\tau)) > 0$, *что если* $x(\cdot)$ *– решение дифференциального* уравнения (2), *соответствующее некоторому управлению* $u(\cdot)$ *на интервале* $[0,\tau]$ *в* G *с начальным состоянием* $x(0) \in M_0$, *и удовлетворяющее условиям* $\|x(\tau) - x_*(\tau)\| \leq \delta(\tau, x_*(\tau))$ *и* $\rho(x(\tau), M_\infty) \leq \rho(x_*(\tau), M_\infty)$, *то пара* $(x_*^{\tau}(\cdot), u_*^{\tau}(\cdot))$, *где* $u_*^{\tau}(\cdot)$ *составное управление*, *соответствующее* $u(\cdot)$, $u_*(\cdot)$ *и* τ *(см (6)), а* $x_*^{\tau}(\cdot)$ *– соответствующая ему траектория*, *является допустимым процессом в* (P).

Заметим, что в случае задачи (P) без асимптотического концевого ограничения в (4) (т.е. в случае, когда $M_\infty = \mathbb{R}^n$) выполнение для допустимого процесса $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ условия $(A2)$ автоматически влечет и выполнение условия $(A3)$.

2. ФУНКЦИЯ УСЛОВНОЙ СТОИМОСТИ

Пусть $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ – процесс, для которого выполняется условие $(A2')$. Тогда любое решение $x(\zeta;\cdot)$ задачи Коши (5) с начальным условием $x(0) = \zeta$, лежащим в β-окрестности точки $x_*(0)$, т.е. таким, что $\|\zeta - x_*(0)\| < \beta$, определено в G на всем интервале $[0,\infty)$ и, следовательно, пара $(x(\zeta;\cdot), u_*(\cdot))$ является процессом. В дальнейшем будем считать, что процесс $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ фиксирован, и для любого процесса с начальным состоянием ζ из β-окрестности точки $x_*(0)$ выполняется условие $(A1)$ (для каждого процесса со своими функциями $\gamma(\cdot)$ и $\nu(\cdot)$). В этом случае в силу условия $(A1)$ траектория $x(\zeta;\cdot)$ определена однозначно (см. [15, Глава 1, теорема 2]).

Определим множество $\Omega \subset [0,\infty)\times\mathbb{R}^n$ равенством

$$\Omega = \bigcup_{\zeta:\|\zeta - x_*(0)\|<\beta} \{(\tau,\xi) \in \mathbb{R}^{n+1} : \xi = x(\zeta;\tau) : \tau \geq 0\}. \quad (7)$$

В силу условия $(A2')$ следующий результат несложно вытекает из стандартной теоремы о существовании и непрерывной зависимости решения задачи Коши от начальных данных.

Лемма 1. *Множество* Ω, *определенное равенством* (7), *открыто в* $[0,\infty)\times G$.

Пусть $(\tau,\xi) \in \Omega$ и $0 \leq \tau < s$. Определим функцию *мгновенной межвременной полезности* $\pi(\tau,\cdot,s)$ на множестве

$$G_\tau = \{x \in G : (\tau, x) \in \Omega\} \qquad (8)$$

равенством

$$\pi(\tau,\xi,s) = f^0(s, x(\tau,\xi;s), u_*(s)), \quad \xi \in G_\tau.$$

Содержательно, величина $\pi(\tau,\xi,s)$ есть мгновенная полезность, получаемая в момент s в зависимости от состояния системы $\xi \in G_\tau$ в предыдущий момент времени τ, при условии, что на интервале времени $[\tau, s]$ траектория системы $x(\tau,\xi;\cdot)$ определяется заданным управлением $u_*(\cdot)$ (см. (5)).

Предположим теперь, что несобственный интеграл в (1) сходится на процессе $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$. В этом случае в силу условий $(A1)$ и $(A2')$ для любых значений $(t,\xi) \in \Omega$ интеграл

$$W(\tau,\xi) = \int_\tau^\infty \pi(\tau,\xi,s)ds, \qquad (9)$$

также сходится. Величина $W(\tau,\xi)$ имеет экономический смысл *условной* стоимости фазового вектора $\xi \in G$ в момент времени $\tau \geq 0$, т.е. это агрегированная межвременная полезность, получаемая при движении системы из состояния ξ в момент τ на интервале $[\tau,\infty)$ при условии, что используется заданное управление $u_*(\cdot)$. Функцию $W(\cdot,\cdot)$, определенную на множестве Ω равенством (9) будем называть *функцией условной стоимости*. Заметим, что функция условной стоимости была введена в работе автора [16] в связи с вопросом об экономической интерпретации сопряженной переменной в соотношениях принципа максимума Понтрягина для задач оптимального управления с бесконечным горизонтом. Использование функции условной стоимости позволяет придать экономический смысл сопряженной переменной без каких-либо предположений о дифференцируемости функции оптимального значения (см. [16]). В настоящей работе функция условной стоимости используется для получения полного варианта принципа максимума Понтрягина для задачи (P).

Для фиксированного $\tau \geq 0$ и процесса $(x(\tau,\xi;\cdot), u_*(\cdot))$ (см. (5)) через $Z(\tau,\xi;\cdot)$ будем обозначать фундаментальное матричное решение линейной системы

$$\dot{z}(t) = -[f_x(t, x(\tau,\xi;t), u_*(t))]^* z(t), \tag{10}$$

удовлетворяющее начальному условию $Z(\tau,\xi;0) = I$, где I – единичная матрица размера $n \times n$. Заметим, что функция $Z(\tau;\xi,\cdot)$ определена на всем интервале $[0,\infty)$. Если $\xi = x_*(\tau)$, то $x(\tau,\xi;\cdot) = x_*(\cdot)$ (см. (5)). В этом случае для краткости функцию $Z_*(\tau, x_*(\tau);\cdot)$ будем обозначать через $Z_*(\cdot)$.

Следующий результат вытекает из [11, Lemma 3.2].

Лемма 2. *Пусть* $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ *– процесс, для которого выполняется условие* ($A2'$) *и для любого процесса с начальным состоянием* ζ *из* β*-окрестности точка* $x_*(0)$ *выполняется условие* ($A1$). *Тогда для любой точки* $(\tau,\xi) \in \Omega$ *имеем*

$$\|[Z(\tau,\xi;t)]^{-1} f_x^0(t, x(\tau,\xi;t), u_*(t))\| \leq \sqrt{n}\lambda(t)$$
$$\text{при} \quad \text{п.в.} \quad t \geq 0.$$

Следующий результат дает достаточные условия непрерывной дифференцируемости функции $\xi \mapsto W(\tau,\xi)$ на множестве G_τ (см. (8)).

Лемма 3. *Пусть* $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ *– процесс, для которого выполняется условие* ($A2'$) *и несобственный интеграл в* (1) *сходится. Пусть, кроме того, для любого процесса с начальным состоянием* ζ *из* β*-окрестности точки* $x_*(0)$ *выполняется условие* ($A1$). *Тогда для любого* $\tau \geq 0$ *функция* $\xi \mapsto W(\tau,\xi)$ *непрерывно дифференцируема на множестве* G_τ *и*

$$\begin{aligned} W_\xi(\tau,\xi) &= \int_\tau^\infty \pi_\xi(\tau,\xi,s)ds = \\ &= Z(\tau,\xi;\tau)\int_\tau^\infty [Z(\tau,\xi;s)]^{-1} f_x^0(t, x(\tau,\xi;s), u_*(s))ds. \end{aligned} \tag{11}$$

Доказательство. Фиксируем произвольное $\tau \geq 0$. В силу [16, теорема 2, и теорема 3], производная (Фреше) $W_\xi(\tau,\xi)$ существует для любого $\xi \in G_\tau$ и определяется формулой (11). В силу теоремы о существовании и непрерывной зависимости решения задачи Коши от начальных данных матричная функция $\xi \mapsto Z(\tau,\xi;\tau)$ непрерывна на G_τ. Аналогично, функции $\xi \mapsto [Z(\tau,\xi;s)]^{-1}$ и $s \mapsto f_x^0(t, x(\tau,\xi;s), u_*(s))$ непрерывны на G_τ для любого $s > \tau$. Следовательно, для завершения доказательства достаточно показать, что последний несобственный интеграл в (11) сходится равномерно по $\xi \in G_\tau$ (см. [17, §54.3, теорема 5]). В силу леммы 2 этот факт следует из того обстоятельства, что функция $\lambda(\cdot)$ не зависит от ξ.

Заметим, что в случае $\xi = x_*(\tau)$ равенство (11) принимает вид

$$\begin{aligned} &W_x(\tau, x_*(\tau)) = \\ &= Z_*(\tau)\int_\tau^\infty [Z_*(s)]^{-1} f_x^0(s, x_*(s), u_*(s))ds, \quad \tau \geq 0. \end{aligned} \tag{12}$$

3. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Пусть $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ – слабо обгоняющий процесс в задаче (P), для которого несобственный интеграл в (1) сходится и выполняется условие ($A2'$). Предположим также, что для любого процесса $(x(\zeta;\cdot), u_*(\cdot))$ с начальным состоянием $x(0) = \zeta$ из β-окрестности точки $x_*(0)$ выполняется условие ($A1$). Предположим также, что выполняется условие ($A3$).

Пусть $\{T_k\}_{k=1}^\infty$ – такая возрастающая последовательность положительных чисел, что $\lim_{k\to\infty} T_k = \infty$ и $\lim_{k\to\infty} \rho(x_*(T_k), M_\infty) = 0$. В силу допустимости процесса $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ такая последовательность $\{T_k\}_{k=1}^\infty$ существует (см. (4)). Переходя при необходимости к подпоследовательности будем считать, что что для любого $k = 1, 2, \ldots$ выполняется условие $\rho(x_*(T_k), M_\infty) \leq \varepsilon/k$, где число $\varepsilon > 0$ определено в условии ($A3$). Пусть $\delta(T_k, x_*(T_k)) > 0$ – число, определенное в ($A3$). Уменьшая при необходимости число $\delta(T_k, x_*(T_k)) > 0$, будем считать, что для каждого $k = 1, 2, \ldots$ замкнутая $\delta(T_k, x_*(T_k))$-окрестность точки $x_*(T_k)$ содержится в множестве G_{T_k} (см. (8)), и для любого решения $x(T_k,\xi;\cdot)$ задачи Коши (5) с начальным условием $x(T_k) = \xi$, $\|\xi - x_*(T_k)\| \leq \delta(T_k, x_*(T_k))$, имеем $\|x(T_k,\xi;0) - x_0\| < \beta$.

Для $k = 1, 2, \ldots$ положим

$$\begin{aligned} M_k = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x, M_\infty) \leq \rho(x_*(T_k), M_\infty),\\ \|x - x_*(T_k)\| \leq \delta(T_k, x_*(T_k))\}. \end{aligned}$$

В силу леммы 3 функция $W_k(\cdot) := W(\cdot, T_k)$ непрерывно дифференцируема на множестве $G_{T_k} \supset M_k$.

Для $k = 1, 2, \ldots$ рассмотрим следующую задачу (P_k), соответствующую процессу $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$, с фиксированным конечным временем T_k:

$$J_k(x(\cdot),u(\cdot)) = \varphi(x(0)) + W_k(x(T_k)) + \\ + \int_0^{T_k} f^0(t,x(t),u(t))dt \to \max, \tag{13}$$

$$\dot{x}(t) = f(t,x(t),u(t)), \tag{14}$$

$$x(0) \in M_0, \quad x(T_k) \in M_k, \tag{15}$$

$$u(t) \in U(t). \tag{16}$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, векторная функция $f(\cdot,\cdot,\cdot)$, скалярные функции $f^0(\cdot,\cdot,\cdot)$, $\varphi(\cdot)$, многозначное отображение $U(\cdot)$ и множество G — те же самые, что и в исходной задаче (P).

Множество всех измеримых по Лебегу функций $u : [0,T_k] \to \mathbb{R}^m$, удовлетворяющих для любого $t \in [0,T_k]$ включению (16), будем рассматривать в качестве управлений в задаче (P_k). Соответствующее управлению $u(\cdot)$ абсолютно непрерывное решение $x(\cdot)$ дифференциального уравнения (14) будем называть допустимой траекторией, если решение $x(\cdot)$ определено в G на интервале $[0,T_k]$, удовлетворяет концевым условиям (15) и интеграл в (13) сходится. В этом случае пару $(x(\cdot),u(\cdot))$ будем называть допустимой в задаче (P_k). Допустимая пара $(x_k(\cdot),u_k(\cdot))$ является оптимальной в задаче (P_k), если функционал (13) достигает на ней своего максимального значения на множестве всех допустимых в (P_k) пар. Нетрудно видеть, что для любого $k = 1, 2, \ldots$ сужение процесса $(x_*(\cdot),u_*(\cdot))$ на интервал $[0,T_k]$ является допустимой парой в задаче (P_k).

Лемма 4. *Для любого $k = 1, 2, \ldots$ сужение процесса $(x_*(\cdot),u_*(\cdot))$ на интервал $[0,T_k]$ является оптимальной допустимой парой в задаче (P_k).*

Определим функцию Гамильтона–Понтрягина $\mathscr{H} : [0,\infty)\times G \times U \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ и гамильтониан $H : [0,\infty)\times G \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ задачи (P) стандартным образом

$$\mathscr{H}(t,x,u,\psi^0,\psi) = \langle \psi, f(t,x,u)\rangle + \psi^0 f^0(t,x,u),$$

$$H(t,x,\psi^0,\psi) = \sup_{u\in U(t)} \mathscr{H}(t,x,u,\psi^0,\psi).$$

Далее через $\hat{\partial}\varphi(x)$ будем обозначать предельный субдифференциал локально липшицевой функции $\varphi : G \to \mathbb{R}^1$ в точке $x \in G$ (см. [1], Definition 11.10), а через $\widehat{N}_A(a)$ — предельный нормальный конус к замкнутому множеству $A \subset \mathbb{R}^n$ в точке $a \in A$ (см. [1]).

Следующий результат дает необходимые условия оптимальности для задачи (P). Предварительные результаты в этом направлении получены в работах автора [18, 19]. Другие варианты принципа максимума для задач с асимптотическими концевыми ограничениями при дополнительном априорном предположении о существовании предела у оптимальной траектории на бесконечности см. в [20, 21].

Теорема 1. *Пусть $(x_*(\cdot),u_*(\cdot))$ — слабо обгоняющий процесс в задаче (P), для которого несобственный интеграл в (1) сходится и выполняются условия $(A2')$ и $(A3)$. Предположим также, что для любого $\zeta \in M_0$: $\|\zeta - x_*(0)\| < \beta$, для процесса $(x(\zeta;\cdot),u_*(\cdot))$ выполняется условие $(A1)$. Тогда существуют такие не обращающиеся одновременно в нуль число $\psi^0 \geq 0$ и вектор $\xi \in \mathbb{R}^n$, что выполняются следующие условия*:

(i) Функция $\psi : [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$, определенная равенством

$$\psi(t) = -Z_*(t)\xi + \\ + \psi^0 Z_*(t)\int_t^\infty [Z_*(s)]^{-1} f_x^0(s,x_*(s),u_*(s))ds, \quad t \geq 0, \tag{17}$$

локально абсолютно непрерывна и удовлетворяет основным соотношениям принципа максимума, т.е. $\psi(\cdot)$ является решением сопряженной системы

$$\dot{\psi}(t) = -\mathscr{H}_x(t,x_*(t),u_*(t),\psi^0,\psi(t)), \tag{18}$$

и выполняется условие максимума

$$\mathscr{H}(t,x_*(t),u_*(t),\psi^0,\psi(t)) \overset{\text{п.в.}}{=} H(t,x_*(t),\psi^0,\psi(t)). \tag{19}$$

(ii) Выполняются включения

$$\psi(0) \in -\psi^0\hat{\partial}\varphi(x_*(0)) + \widehat{N}_{M_0}(x_*(0)),$$
$$\xi \in \mathrm{Ls}_{t\to\infty:\rho(x_*(t),M_\infty)\to 0}\left\{[Z_*(t)]^{-1} N_*(t)\right\}.$$

Здесь

$$N_*(t) = \{\lambda\zeta : \lambda \geq 0, \zeta \in \hat{\partial}\rho(x_*(t), \\ M_\infty + \rho(x_*(t),M_\infty))\},$$

а множество

$$\mathrm{Ls}_{t\to\infty:\rho(x_*(t),M_\infty)\to 0}\left\{[Z_*(t)]^{-1} N_*(t)\right\} = \\ = \left\{\zeta \in \mathbb{R}^n : \exists\{t_k\}_{k=1}^\infty, \lim_{k\to\infty} t_k = \infty, \lim_{k\to\infty}\rho(x_*(t_k),M_\infty) = 0, \right. \\ \left. \exists\{\zeta_k\}_{k=1}^\infty, \zeta_k \in N_*(t_k) : \zeta = \lim_{k\to\infty}[Z_*(t_k)]^{-1}\zeta_k\right\}$$

— верхний топологический предел многозначного отображения $t \mapsto \left[Z_*(t)\right]^{-1} N_*(t)$ при $t \to \infty$, удовлетворяющих условию $\rho(x_*(t), M_\infty) \to 0$.

Доказательство теоремы 1 основано на лемме 4, применении к задачам (P_k), $k = 1, 2, ...$, расширенного варианта принципа максимума Понтрягина для задач на конечных интервалах времени [1, Theorem 22.26] и непрерывной дифференцируемости функции условной стоимости (лемма 3). Аналогичный вариант принципа максимума в нормальной форме ($\psi^0 = 1$) для задачи (P) с фиксированным начальным состоянием и без асимптотических концевых ограничений был получен в [11] при помощи метода игольчатых вариаций в более общем случае, когда несобственный интеграл в функционале (1) не обязательно сходится и при более слабом условии $(A2)$ (подробнее см. [3, 11]).

В заключение приведем вытекающий из теоремы 1 вариант принципа максимума для задачи (P) в случае отсутствия асимптотических концевых ограничений. Особенность данного варианта принципа максимума состоит в том, что он формулируется полностью в терминах функции условной стоимости.

Теорема 2. *Предположим, что в задаче* (P) *асимптотическое концевое ограничение в* (4) *отсутствует (т.е.* $M_\infty = \mathbb{R}^n$*). Пусть* $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ *— слабо обгоняюще оптимальный процесс в задаче* (P)*, для которого несобственный интеграл в* (1) *сходится и выполняется условие* $(A2')$*. Предположим также, что для любого* $\zeta \in M_0 : \|\zeta - x_*(0)\| < \beta$*, для процесса* $(x(\zeta;\cdot), u_*(\cdot))$ *выполняется условие* $(A1)$*. Тогда для любого* $t \geq 0$ *функция* $W(t,\cdot)$ *непрерывно дифференцируема на множестве* $\{x \in G : (t, x) \in \Omega\}$ *и выполняются следующие условия:*

(i) Функция $\psi : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$, определенная равенством

$$\psi(t) = W_x(t, x_*(t)), \quad t \geq 0, \tag{20}$$

локально абсолютно непрерывна и удовлетворяет основным соотношениям принципа максимума в нормальной форме (18) и (19) (при $\psi^0 = 1$).

(ii) Выполняется условие трансверсальности

$$\psi(0) \in -\hat{\partial}\varphi(x_*(0)) + \hat{N}_{M_0}(x_*(0)),$$

(iii) Частная производная $W_t(t, x_*(t))$ существует при п.в. $t \geq 0$ и

$$W_t(t, x_*(t)) + \sup_{u \in U(t)} \left\{ \langle W_x(t, x_*(t)), f(t, x_*(t), u)\rangle + \right. \\ \left. + f^0(t, x_*(t), u) \right\} \overset{\text{п.в.}}{=} 0. \tag{21}$$

Доказательство. Действительно, в силу леммы (3) функция $W(t,\cdot)$ непрерывно дифференцируема на множестве $\{x \in G : (t, x) \in \Omega\}$. В силу $(A2')$ в случае $M_\infty = \mathbb{R}^n$ условие $(A3)$ выполняется автоматически. Для любого $t \geq 0$ имеем $x_*(t) \in \operatorname{int} M_\infty$ и, следовательно, $\hat{\partial}\rho(x_*(t), M_\infty + \rho(x_*(t), M_\infty)B_1^n(0)) = 0$. Таким образом, в этом случае утверждение теоремы 1 выполняется с $\xi = 0$ и без ограничения общности можно считать, что $\psi^0 = 1$. При этом равенство (20) вытекает из поточечного представления (17) и равенства (12). Таким образом, выполнение условий (i) и (ii) является непосредственным следствием утверждения теоремы 1. Далее, в силу (9) частная производная $W_t(t, x_*(t))$ существует при п.в. $t \geq 0$, а равенство (21) вытекает из условия $(A2')$ и того факта, что для функции $\psi(\cdot)$, определенной равенством (20), выполняется условие максимума (19) в нормальной форме. Таким образом, условие (iii) также выполняется.

Заметим, что аналогичный вариант принципа максимума для задачи (P) с фиксированным начальным состоянием и без каких-либо асимптотических ограничений был получен автором в [16].

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-11-00223).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Clarke F.* Functional analysis, calculus of variations and optimal control. Graduate Texts in Mathematics. V. 264. London: Springer-Verlag, 2013.
2. *Ramsey F.P.* A mathematical theory of saving // Econ. J. 1928. V. 38. P. 543–559.
3. *Асеев С.М., Вельов В.М.* Другой взгляд на принцип максимума для задач оптимального управления с бесконечным горизонтом в экономике // УМН. 2019. Т. 74. № 6. С. 3–54.
4. *Carlson D.A., Haurie A.B., Leizarowitz A.* Infinite horizon optimal control. Deterministic and Stochastic Systems. Berlin: Springer, 1991.
5. *Seierstad A., Sydsæ ter K.* Optimal control theory with economic applications. Amsterdam: North-Holland, 1987.
6. *Acemoglu D.* Introduction to modern economic growth. Princeton: Princeton Univ. Press, 2008.
7. *Barro R.J., Sala-i-Martin X.* Economic growth. New York: McGraw Hill, 1995.
8. *Halkin H.* Necessary conditions for optimal control problems with infinite horizons // Econometrica. 1974. V. 42. P. 267–272.
9. *Valente S.* Sustainable development, renewable resources and technological progress // Environmental and Resource Economics. 2005. V. 30. № 1. P. 115–125.

10. *Valente S.* Optimal growth, genuine savings and long-run dynamics // Scottish Journal of Political Economy. 2008. V. 55. № 2. P. 210–226.
11. *Aseev S.M., Veliov V.M.* Maximum principle for infinite-horizon optimal control problems under weak regularity assumptions // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20. № 3. С. 41–57.
12. *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. М: Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит., 1979.
13. *Aseev S.M., Veliov V.M.* Needle variations in infinite-horizon optimal control. Variational and Optimal Control Problems on Unbounded Domains. Contemporary Mathematics. 2014. V. 619. *Wolansky G., Zaslavski A.J.*, Eds., Providence: Amer. Math. Soc. 1–17.
14. *Aseev S.M., Veliov V.M.* Maximum principle for infinite-horizon optimal control problems with dominating discount // Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems. Ser. B: Applications & Algorithms. 2012. V. 19. № 1–2. P. 43–63.
15. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит., 1985.
16. *Асеев С.М.* Сопряженные переменные и межвременные цены в задачах оптимального управления на бесконечном интервале времени // Тр. МИАН. 2015. Т. 290. С. 239–253.
17. *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа. Учеб. для вузов в 3 тт. Т. 2. Ряды. Дифференциальное и интегральное исчисление функций многих переменных. М.: Дрофа, 2004.
18. *Aseev S.M.* The Pontryagin maximum principle for optimal control problem with an asymptotic endpoint constraint under weak regularity assumptions // J. Math. Sci. 2023. V. 270. № 4. P. 531–546.
19. *Асеев С.М.* Принцип максимума для задачи оптимального управления с асимптотическим концевым ограничением // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2021. Т. 27. № 2. С. 35–48.
20. *Бродский Ю.И.* Необходимые условия слабого экстремума для задач оптимального управления на бесконечном интервале времени // Матем. сб. 1978. Т. 105(147). № 3. С. 371–388.
21. *Seierstad A.* A maximum principle for smooth infinite horizon optimal control problems with state constraints and with terminal constraints at infinity. // Open J. Optim. 2015. V. 4. P. 100–130.

CONDITIONAL COST FUNCTION AND NECESSARY OPTIMALITY CONDITIONS FOR INFINITE HORIZON OPTIMAL CONTROL PROBLEMS

Corresponding member of the RAS S. M. Aseev[a,b]
[a]*Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*
[b]*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

Infinite horizon optimal control problem with general endpoint constraints is reduced to a family of standard problems on finite time intervals containing the value of the conditional cost of the phase vector as a terminal term. New version of the Pontryagin maximum principle containing an explicit characterization of the adjoint variable is obtained for the problem with a general asymptotic endpoint constraint. In the case of the problem with free final state this approach leads to a normal form version of the maximum principle formulated completely in the terms of the conditional cost function.

Keywords: optimal control, infinite horizon, asymptotic endpoint constraint, conditional value function, Pontryagin's maximum principle