

ПРОБЛЕМЫ ВОД СУШИ

УДК 556.11

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТЫ ФОРМИРОВАНИЯ КАЧЕСТВА ВОДЫ

© 2021 г. Член-корреспондент РАН В. И. Данилов-Данильян^{1,*,**}, О. М. Розенталь¹

Поступило 11.01.2021 г.

После доработки 13.01.2021 г.

Принято к публикации 14.01.2021 г.

Показатели состава и качества природной воды – случайные величины, “линейный” подход к их оценке и прогнозу не дает приемлемых результатов, необходим учет нелинейности природных гидросистем. Получено нелинейное логистическое описание изменения концентрации загрязнителей, позволяющее оценить состав воды в зависимости от интенсивности процессов ее загрязнения и самоочищения. Обнаружены циклические колебания контролируемых показателей с амплитудой, уменьшающейся при невысокой скорости загрязнения и нарастающей при ее росте или даже сопровождающиеся бифуркациями с дальнейшим переходом к полному хаосу.

Ключевые слова: качество воды, состав воды, вариабельность показателей качества, нелинейная система, нелинейная логистическая зависимость, циклические колебания, хаотические изменения

DOI: 10.31857/S2686739721040046

Адекватная информация о текущем и ожидаемом качестве воды необходима для повышения эффективности использования водных ресурсов. Трудности ее получения связаны с тем, что процессы загрязнения и самоочищения индивидуальны для каждого водного объекта и его отдельных створов. Однако существуют некоторые общие динамические закономерности формирования состава и свойств воды, на что указывает их пространственно-временная вариабельность, наблюдаемая во всех случаях. Это неочевидно при “линейном подходе” [3] к формированию случайных по своей природе показателей, так как природные гидросистемы отличаются существенной нелинейностью [8].

Для демонстрации этого удобно перейти к оценке безразмерной (относительной) концентрации загрязнения u , принимая эту величину равной 1 и 0, соответственно, при максимальном и минимальном значениях достаточно представительного временного ряда. Средний квадрат случайного смещения концентрации в течение n шагов продолжительности Δt есть $\overline{u_{n\Delta t}^2} = \overline{(\sum_{i=1}^n x_{i\Delta t})^2} = \sum_{i=1}^n \overline{x_{i\Delta t}^2} + 2 \sum_{j>i}^n \overline{x_{j\Delta t} x_{i\Delta t}}$ (i, j – номер шага), поскольку усредненное значение произведения независимых случайных величин рав-

но произведению средних, при этом сумма перекрестных членов обращается в нуль вследствие симметричности и независимости шагов в рядах $i \neq j$: $\sum_{j>i}^n \overline{x_j x_i} = \sum_{j>i}^n \overline{x_j} \overline{x_i} = 0$, а квадрат единичного смещения за интервал времени от t до $t + \Delta t$ равен $\overline{x_t^2} = 0.5(+1)^2 + 0.5(-1)^2 = 1$. Отсюда: $\overline{u_{n\Delta t}^2} = \sum_{i=1}^n \overline{x_{i\Delta t}^2} = n$, т.е. смещение концентрации возрастает по параболическому закону.

Этот вывод распространяется на широкий класс случайных процессов, однако здесь требует уточнения, так как “блуждание” концентрации отличается от блуждания броуновских частиц.

В последнем случае при $n \rightarrow \infty$ также и $u_{n\Delta t}^2 \rightarrow \infty$, в то время как “поток” концентрации через их максимальное и минимальное значение (здесь, соответственно, 1 и 0) равен нулю, т.е. $u_{n\Delta t} = \sum_{i=1}^n \Delta x_{i\Delta t} = 0$. Поэтому неверно принимать, что $u_{t+\Delta t}$ зависит исключительно от u_t^2 . Вместо этого нами сформирована суперпозиция нелинейного и линейного законов движения так, чтобы полная функция $u_{t+\Delta t} = f(u_t^2, u_t)$ была параболой, пересекающей ось абсцисс при $u_t = 1$ и $u_t = 0$. Такова нелинейная логистическая зависимость $u_{t+\Delta t} = \mu u_t (1 - u_t)$, где параметр пропорциональности μ характеризует интенсивность динамики переноса загрязняющих веществ.

Полученное выражение позволяет проследить изменение концентрации загрязнителя от ее изме-

¹ Институт водных проблем Российской академии наук, Москва, Россия

*e-mail: vidd38@yandex.ru

**e-mail: vidd@iwp.ru

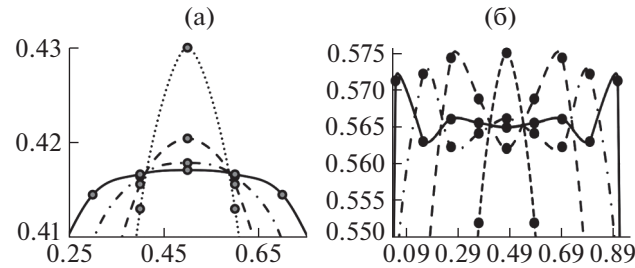


Рис. 1. Увеличенные в 25 раз верхние части логистического отображения динамики концентрации меди (а, слева) и взвешенных веществ (б, справа) в воде после 1-го (пунктирная линия), 2-го (штриховая), 3-го (штрих-пунктирная) и 4-го (сплошная) шагов.

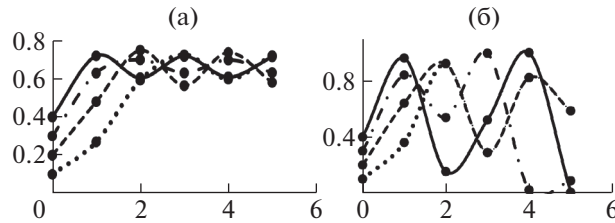


Рис. 2. Логистические отображения динамики качества воды при $\mu = 3$ (а) и при $\mu = 4$ (б): функция $u_{i\Delta t}$ при $i = 0, \dots, 3$, расшифровка линий как на рис. 1.

ренного в момент t значения u_t неограниченно долго путем выполнения необходимого числа шагов.

Влияние качества воды на коэффициент μ проиллюстрируем анализом результатов измерений концентрации меди и взвешенных веществ в р. Исети, створ г. Екатеринбург в 2008–2010 гг. На основе экспериментальных данных на рис. 1 приведена функция $u_{t+(i+1)\Delta t} = f(u_{t+i\Delta t})$ при $i = 0, \dots, 3$ и при полученных из эксперимента среднеарифметических значениях коэффициентов $\mu = 1.7$ для меди и 2.3 для взвешенных веществ.

Выяснилось, что при достаточном числе шагов концентрация, какой бы она ни оказалась в момент t проведения наблюдений, в обоих рассмотренных случаях приближается к некоторому устойчивому (равновесному) значению. Впрочем, заметны отличия поведения концентрации выбранных веществ в зависимости от значения μ : из рис. 1а следует, что концентрация меди последовательно стремится к своему устойчивому состоянию. Например, при ее начальной концентрации в воде 0.5 она снижается в ряду: 0.430; 0.420; 0.418; 0.417. В противоположность этому на рис. 1б концентрация взвешенного вещества испытывает небольшие циклические колебания; например, при начальной концентрации 0.5: 0.575; 0.562; 0.566; 0.565. При этом амплитуда колебаний сокращается в ряду: +0.013; –0.004; +0.001... Затухание колебаний происходит резко при начальной концентрации вещества 0.3 или 0.7, где после перечисленных шагов концентра-

ция уже составляет 0.483; 0.574; 0.562; 0.566 соответственно, а амплитуда колебаний +0.91; –0.12; +0.04...

В рассмотренных примерах значение величины Δt зависит от того, как быстро перестраиваются частицы растворенного в воде вещества, т.е. от скорости их броуновского блуждания. Обычно коэффициент диффузии здесь $D \sim 10^{-6}$ см²/с, поэтому при низких концентрациях, когда межчастичные расстояния достигают $h = 0.1$ см, такое время по формуле Эйнштейна $t \sim \frac{h^2}{D} \sim 3$ ч. В реальных условиях величина h и время стабилизации концентрации значительно меньше, а потому пользователи, скорее всего, могут оценить лишь устойчивое значение концентраций, формирующееся практически немедленно. Впрочем, ниже показано, что последнее заключение справедливо не всегда, а только в случае сравнительно низких значений μ , использованных в примерах.

Значения коэффициента μ , как и концентрация загрязнений воды, характеризуются большим разбросом. В вышеприведенном случае рассчитанные среднеквадратические отклонения μ составляют 2.5 для меди и 2.3 для взвешенных веществ. Поэтому целесообразно рассмотреть качество воды не только при его среднеарифметических значениях μ , но и в случае $\mu \in [0, 4]$.

В соответствии с логистическим уравнением $u_{t+(i+1)\Delta t} = f(u_{t+i\Delta t})$ при $\mu \leq 1$ с течением времени

происходит постепенное понижение показателей качества воды, т.е. самоочищение преобладает над загрязнением при любых начальных значениях u . Если $\mu \in [1, 2]$, то формируется равновесный уровень качества воды, например, для $\mu = 2$ при $u = 0.5$. Наиболее интересные эффекты нелинейности возникают при $\mu > 2$. Здесь уровень загрязнения воды начинает испытывать циклические колебания, что заметно уже на рис. 1б. Анализ показывает, что при $2 < \mu < 3$ колебания являются затухающими, при $\mu = 3$ они становятся постоянными, а при $\mu > 3$ амплитуда колебаний возрастает на каждом последующем шагу (рис. 2). Так нелинейная система реагирует на возрастание загрязнения.

Анализ приведенной ранее логистической функции $u_{t+(i+1)\Delta t} = f(u_{t+i\Delta t})$ также свидетельствует о том, что при $\mu = 3$ в системе происходит раздвоение (бифуркация [8]) устойчивых значений концентрации загрязнения, и дополнительное раздвоение — при $\mu = 4$. Если же $\mu > 4$, то возникают все новые бифуркации. Каскад следующих друг за другом бифуркаций вводит систему в непредсказуемый режим вплоть до формирования абсолютно хаотического изменения качества воды.

Эффекты циклического и хаотического изменения показателей состава воды весьма распространены, они упоминаются даже в официальных отчетах [1, 2, 4]. Так, в [1] отмечено, что загрязнение подземных вод мышьяком, бериллием и ртутью “порой носит периодический характер”. В [4] то же установлено для поверхностных вод Куйбышевского и Саратовского водохранилищ. В [2] записано: “...Молдова, Румыния и Украина сталкиваются с большими непрогнозируемыми деструктивными явлениями на наших реках”, это указывает на хаотическое изменение качества воды в условиях ее интенсивного загрязнения. Что же касается собственно эффектов нелинейности, то явным доказательством их существования является расслоение примеси [7], а также фрактальность временных рядов состава воды [6].

Приведенные результаты позволяют судить о динамике формирования состава и свойств воды путем оценки μ . Так, если вариабельность концентрации невелика, то $\mu = \frac{u_{t+\Delta t}}{u_t(1-u_t)} < 2$, а устойчивое значение концентрации $u_t < 0.5$. В отличие от этого при высокой вариабельности, например, когда через каждый интервал Δt качество воды колеблется между 0.1 и 0.9, имеем $\mu = \frac{1}{2} \left(\frac{0.9}{0.1(1-0.1)} + \frac{0.1}{0.9(1-0.9)} \right) \approx 5.5$, и наступает хаос. Последней ситуации следует по возможности избегать, на-

пример, предотвращая залповые сбросы загрязняющих веществ предприятиями.

Если обнаружится, что какие-то эффекты циклического или хаотического изменения состава природной воды плохо отображаются предложенным уравнением $u_{t+(i+1)\Delta t} = f(u_{t+i\Delta t})$, то следует искать другую логистическую функцию, пригодную для такого описания, — известен широкий класс таких функций (как правило, с квадратичным максимумом в интервале $[0, 1]$). В частности, периодические циклы, бифуркации и переходы к абсолютному хаосу описываются функциями $x_{i+1} = \mu x_i \exp(-x_i)$, $x_{i+1} = \mu x_i / (1 + x_i^3)$, $x_{i+1} = \mu x_i / (1 + x_i^4)$.

Отметим, что в рамках общенаучных представлений влияющими факторами нелинейности природных вод выступают флуктуации параметров порядка, определяющие сингулярные вклады в контролируемые динамические характеристики [5]. Таковы эффекты, показывающие, что вопреки действию закона возрастания энтропии природа демонстрирует заметную степень организованности.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в рамках Государственного задания ФГБУН Института водных проблем РАН (тема № 0147-2019-0004, государственная регистрация № АААА-А19-119040990079-3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гос. доклад “О состоянии и использовании водных ресурсов Российской Федерации в 2018 году”. http://voda.gov.ru/upload/iblock/4ef/2019_gos-doklad_voda2018
2. Краткий доклад о внедрении протокола по проблемам воды и здоровья в Республике Молдова. <https://docplayer.ru/56150235-Kratkiy-doklad-o-vnedrenii-protokola-po-problemam-vody-i-zdorovya-v-respublike-moldova.html>
3. *Мандельброт Б.* Фрактальная геометрия природы. М.: ИКИ, 2002. 656 с.
4. Обзор состояния и загрязнения окружающей среды в Российской Федерации за 2016 год. М.: Росгидромет, 2017.
5. *Пригожин И.* Введение в термодинамику необратимых процессов. М.: ИИЛ, 1960. 128 с.
6. *Розенталь О.М., Тамбиева Д.А.* Волновая динамика качества речной воды // ДАН. Науки о Земле. 2020. Т. 491. № 1. С. 82–86.
7. *Чашечкин Ю.Д., Розенталь О.М.* Структура речного потока и ее влияние на распределение загрязняющего воду вещества // Водные ресурсы. 2018. Т. 46. № 6. С. 582–591.
8. *Milici C.* Fractals and Chaos. An Introduction to Dynamic Systems. Dusseldorf: Lambert, 2017. 208 p.

NONLINEAR EFFECTS OF FORMATION OF WATER QUALITY**Corresponding Member of the RAS V. I. Danilov-Danilyan^{a, #, ##} and O. M. Rosenthal^a**^a *Institute of Water Problems of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*[#] *e-mail: vidd38@yandex.ru*^{##} *e-mail: vidd@iwp.ru*

The indicators of the composition and quality of natural water are random values, the “linear” approach to their assessment and forecast does not give acceptable results, it is necessary to take into account the nonlinearity of natural hydraulic systems. A nonlinear logistic description of the change in the concentration of pollutants has been obtained, which makes it possible to assess the composition of water depending on the intensity of its pollution and self-purification processes. Cyclic fluctuations of the monitored indicators with an amplitude that decrease at a low pollution rate and increase with its growth, or even accompanied by bifurcations with a further transition to complete chaos, have been found.

Keywords: water quality, water composition, variability of quality indicators, nonlinear system, nonlinear logistic dependence, cyclical fluctuations, chaotic changes