

УДК 550-3

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ ДИФFUЗНО-ИНТЕРФЕЙСНЫМ ПОДХОДОМ

© 2021 г. Г. В. Решетова<sup>1,2,\*</sup>, Е. И. Роменский<sup>2</sup>

Представил академик РАН М.И. Эпов 27.12.2020 г.

Поступило 27.12.2020 г.

После доработки 11.01.2021 г.

Принято к публикации 14.01.2021 г.

Представлен метод диффузных границ для моделирования волновых полей в насыщенных упругих пористых средах. Волновые процессы описываются гиперболической системой дифференциальных уравнений первого порядка, полученной на основе теории термодинамически согласованных систем законов сохранения механики сплошных сред. Предложенная система дает универсальный способ моделирования волновых полей в образцах породы, имеющих резкие границы раздела упругих/пороупругих петрофизических свойств с помощью единой системы определяющих уравнений. Численные расчеты показали хорошее качественное согласие с классической теорией упругости и моделью Био.

*Ключевые слова:* пористые среды, двухфазная модель, диффузный интерфейс, волновые процессы, конечно-разностные схемы

DOI: 10.31857/S2686739721040137

### ВВЕДЕНИЕ

Моделирование волновых процессов в пористых средах представляет интерес не только в области разработки новых математических моделей, но и их практического применения в прикладных геофизических задачах. Это направление исследований становится особенно актуальным в связи с развитием цифровых технологий двойников геологических объектов.

История моделирования пористых сред берет начало с работ Био [1, 2], в которых впервые были сформулированы уравнения для описания распространения волн малой амплитуды в насыщенных упругих пористых средах и заложены основы для многочисленных обобщений модели Био (см. [3, 4] и ссылки в них).

В последнее десятилетие стал развиваться альтернативный подход, основанный на использовании континуальной теории многофазных сред (см. [5] и ссылки в ней). В сочетании с теорией термодинамически согласованных систем зако-

нов сохранения этот подход позволяет вывести математически корректную модель течения многофазной сжимаемой смеси в упруго деформируемом скелете, удовлетворяющую законам неравновесной термодинамики [6–8], и для случая малых деформаций дает качественно те же результаты, что и модель Био.

В работе используется термодинамически согласованная модель [8] в сочетании с методом диффузных границ для описания волн малой амплитуды в насыщенных образцах неоднородной пористой среды, в которых четко прослеживаются границы различной пористости, в том числе границы между чистой жидкостью и чисто упругим скелетом. Преимущество этого подхода заключается в использовании единой системы уравнений, в которой границы раздела задаются скачком объемной концентрации фаз.

### УРАВНЕНИЯ

В этом разделе приводится система уравнений, описывающая распространение волн малой амплитуды в насыщенной упругой пористой среде в предположении, что в начальный момент времени среда неподвижна и напряжения в ней отсутствуют [8]. Уравнения образуют гиперболическую систему первого порядка и имеют вид:

$$\rho_0 \frac{\partial v^i}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x_i} - \alpha_2^0 \frac{\partial s_{ik}}{\partial x_k} = 0,$$

<sup>1</sup> Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, Новосибирск, Россия

<sup>2</sup> Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, Новосибирск, Россия

\*E-mail: kgv@nmsf.sccc.ru

$$\begin{aligned} \frac{\partial w^i}{\partial t} + \left( \frac{1}{\rho_1^0} - \frac{1}{\rho_2^0} \right) \frac{\partial P}{\partial x_i} &= -Xw^i, \\ \frac{\partial P}{\partial t} + K \frac{\partial v^k}{\partial x_k} + \frac{\alpha_1^0 \alpha_2^0}{\rho_0} (\rho_2^0 - \rho_1^0) K \frac{\partial w^k}{\partial x_k} &= F, \\ \frac{\partial s_{ik}}{\partial t} - \mu \left( \frac{\partial v^i}{\partial x_k} + \frac{\partial v^k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v^j}{\partial x_j} \right) &= -\alpha_2^0 \frac{s_{ik}}{\tau}. \end{aligned} \quad (1) \quad (1)$$

Здесь  $v^i$  – скорость смеси (жидкой и упругой фаз),  $w^i$  – относительная скорость,  $P$  – давление,  $s_{ik}$  – девиатор напряжений в смеси фаз,  $F$  – источник. Параметры среды определяются константами  $\alpha_1^0$ ,  $\rho_1^0$  – объемная доля и плотность жидкой фазы,  $\alpha_2^0$ ,  $\rho_2^0$  – объемная доля и плотность упругой фазы,  $\mu$  – модуль сдвига Ламе,  $K$  – объемный модуль,  $\tau$  – время релаксации напряжений. Коэффициент межфазного трения  $X$  вычисляется через плотность смеси  $\rho = \alpha_1^0 \rho_1^0 + \alpha_2^0 \rho_2^0$  и массовые доли фаз  $c_1^0 = \alpha_1^0 \rho_1^0 / \rho$ ,  $c_2^0 = \alpha_2^0 \rho_2^0 / \rho$  по формуле  $X = c_1^0 c_2^0 / \theta$ , где  $\theta$  – время релаксации к нулю относительной скорости. Пористость вычисляется как  $\phi = \alpha_1^0 = 1 - \alpha_2^0$ .

Система (1) позволяет моделировать волновые поля не только в неоднородной пороупругой среде ( $0 < \alpha_1^0 < 1$ ), в полностью упругой ( $\alpha_1^0 = 0$ ) или полностью жидкой среде ( $\alpha_1^0 = 1$ ), но и в любой комбинации этих сред. Покажем это на примере идеальной упругости. Действительно, для упругой среды  $\alpha_1^0 = 0$ ,  $\alpha_2^0 = 1$  система (1) преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial v^i}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x_i} - \frac{\partial s_{ik}}{\partial x_k} &= 0, \\ \frac{\partial w^i}{\partial t} + \left( \frac{1}{\rho_1^0} - \frac{1}{\rho_2^0} \right) \frac{\partial P}{\partial x_i} &= 0, \\ \frac{\partial P}{\partial t} + K \frac{\partial v^k}{\partial x_k} &= F, \\ \frac{\partial s_{ik}}{\partial t} - \mu \left( \frac{\partial v^i}{\partial x_k} + \frac{\partial v^k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v^j}{\partial x_j} \right) &= -\frac{s_{ik}}{\tau}, \end{aligned} \quad (2)$$

где скорость смеси  $v^i = c_1^0 v_1^i + c_2^0 v_2^i = v_2^i$  содержит только упругую фазу  $v_2^i$ , а объемный модуль  $K$  совпадает с объемным модулем упругой фазы. Видно, что первое, третье и четвертое уравнения (2) являются точной формулировкой линейного вязкоупругого твердого тела Максвелла, записанного в терминах скоростей смещений/напряжений. Второе уравнение для  $w^i$  является фиктив-

ным и не оказывает никакого влияния на волны в упругой среде.

Если рассмотреть противоположную ситуацию  $\alpha_1^0 = 1$ ,  $\alpha_2^0 = 0$ , которая соответствует случаю чистой жидкости, то (1) принимает вид:

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial v^i}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x_i} - \frac{\partial s_{ik}}{\partial x_k} &= 0, \\ \frac{\partial w^i}{\partial t} + \left( \frac{1}{\rho_1^0} - \frac{1}{\rho_2^0} \right) \frac{\partial P}{\partial x_i} &= 0, \\ \frac{\partial P}{\partial t} + K \frac{\partial v^k}{\partial x_k} &= F, \\ \frac{\partial s_{ik}}{\partial t} - \mu \left( \frac{\partial v^i}{\partial x_k} + \frac{\partial v^k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v^j}{\partial x_j} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $v^i$  теперь соответствует скорости жидкости  $v_1^i$ , а объемный модуль  $K$  равен объемному модулю жидкости. Первое и третье уравнения системы (3) образуют уравнения акустики жидкости, а второе и четвертое – фиктивные.

Как видим, система (1) дает универсальный способ моделирования волновых полей в образцах среды с резкими границами раздела петрофизических свойств: достаточно описать границы раздела в виде разрывной функции  $\alpha^0$ . Такое описание интерфейсов называется методом диффузных границ. Заметим, что при моделировании двухфазных сжимаемых течений требуется разработка специальных численных приемов, позволяющих минимизировать численную диффузию движущихся границ раздела [9]. В нашем случае разрывы  $\alpha^0$  описывают лишь стационарные разрывы физических свойств внутри образца, поэтому нет необходимости заботиться о сохранении исходной формы разрыва по времени. Отметим, что метод диффузных границ также может быть применен к неоднородным образцам с резкими вариациями пористости.

## ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Для симметрической гиперболической системы (1) использование конечно-разностных схем на сдвинутых сетках является наиболее эффективным в вычислительном плане подходом [10]. Нами используется схема на сдвинутых сетках четвертого порядка точности по пространству и второго порядка точности по времени.

Рассматривается слоистая среда  $\Omega = [-0.025, 0.025]^2$  м, содержащая одновременно три различных состояния: упругое, жидкое и пороупругое. Все физические параметры приведены в табл. 1. Упругий слой ( $\alpha_1^0 = 0$ ) находится сверху расчет-

**Таблица 1.** Физические параметры, используемые в численных расчетах

Состояние	Свойство	Параметр	Значение	Единицы СИ
Твердая фаза	Плотность	$\rho_s = \rho_2^0$	2500	кг/м <sup>3</sup>
	Скорость продольной волны	$v_p$	6155	м/с
	Объемная скорость	$c_s$	4332	м/с
	Скорость поперечной волны	$c_{sh}$	3787	м/с
	Объемный модуль	$K_s = K_2 = \rho_s c_s^2$	46.91	ГПа
	Модуль сдвига Ламе	$\mu_s = \mu = \rho_s c_{sh}^2$	35.85	ГПа
Жидкая фаза	Плотность	$\rho_f = \rho_1^0$	1040	кг/м <sup>3</sup>
	Скорость	$c_f$	1500	м/с
	Объемный модуль	$K_f = K_1 = \rho_f c_f^2$	2.34	ГПа
Межфазные параметры	Межфазное трение	$X$	$3.36 \times 10^{-7}$	с
	Время релаксации	$\tau$	$10^{-4}$	с

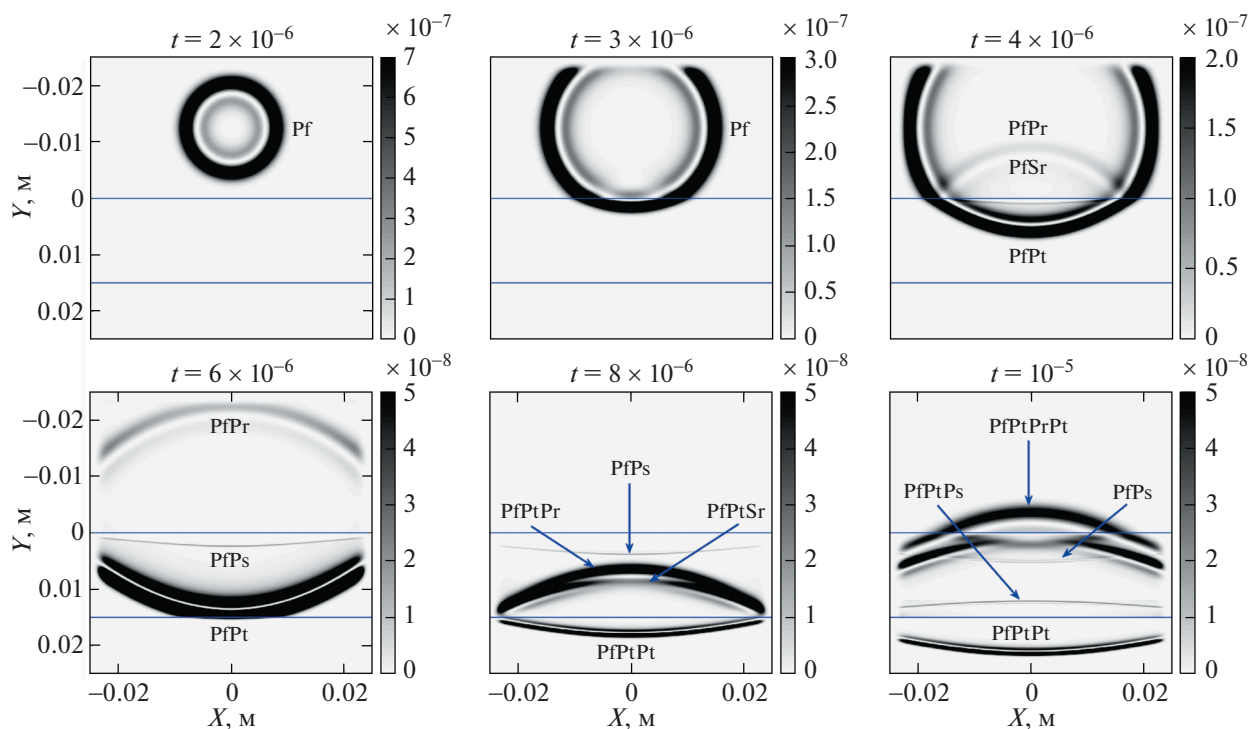
ной области, жидкий ( $\alpha_1^0 = 1$ ) – внизу, а поропругий слой с пористостью  $\alpha_1^0 = 0.3$  располагается в среднем интервале  $[0, 0.015]$  м. В расчетах используется источник типа объемного расширения  $F$ :

$$f(t) = (1 - 2\pi^2 f_0^2 (t - t_0)^2) \times \exp[-\pi^2 f_0^2 (t - t_0)^2] \delta(x - x_0, y - y_0), \tag{4}$$

где частота  $f_0 = 1$  МГц и задержка импульса  $t_0 = 1/f_0$  с. Источник находится в упругом слое в точке  $(x_0, y_0) = (0, -0.015)$  м.

Для дискретизации используется квадратная сетка  $N_x \times N_y$  с шагом  $5 \times 10^{-5}$  м, что составляет примерно 10 точек на длину медленной волны сжатия (волны Био) для выбранной частоты.

На рис. 1 приведены снимки волнового поля для квадрата модуля скорости  $\|v\|^2$  в различные моменты времени. Для обозначения типов волн используются обозначения: буквы Р – для обозначения Р-волн и S для обозначения S-волн, нижний индекс  $r$  – для обозначения отраженных волн,  $t$  – проходящих волн,  $s$  – медленной Р-волны Био и  $f$  – исходной волны. В приведенном



**Рис. 1.** Снимки волнового поля для квадрата модуля скорости  $\|v\|^2$  в различные моменты времени.

расчете наблюдаются все типы волн, предсказанные теорией упругости и пороупругости: корректное появление медленных Р-волн Био только в пористом слое и только волны давления в слое жидкости, в то время как в упругой среде наблюдаются волны сжатия и сдвига.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлен метод диффузных границ для моделирования волновых полей в насыщенных упругих пористых средах. Определяющие уравнения являются гиперболической системой дифференциальных уравнений первого порядка и записаны в терминах скоростей смещений/напряжений, что позволяет использовать конечно-разностные схемы высокого порядка точности на сдвинутых сетках для численной аппроксимации. Предложенная система дает универсальный способ моделирования волновых полей в средах, имеющих резкие границы раздела упругих/пороупругих петрофизических свойств и, как и модель Био, предсказывает три типа волн: быстрые и медленные волны сжатия и поперечные волны. Численные расчеты показали хорошее качественное согласие с классической теорией упругости и моделью Био.

### ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Вычислительная часть работы выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-01-00347 А, а разработка теоретической модели выполнена при финансовой поддержке РНФ, проект № 19-77-20004.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Biot M.A.* Theory of Propagation of Elastic Waves in Fluid-saturated Porous Solid. I. Low-frequency Range // *Journal of the Acoustical Society of America*. 1956. V. 28. № 2. P. 168–178.
2. *Biot M.A.* Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid-saturated Porous Solid. II. Higher Frequency Range // *Journal of the Acoustical Society of America*. 1956. V. 28. № 2. P. 179–191.
3. *Carcione J.M., Morency C., Santos J.E.* Computational Poroelasticity – A Review // *Geophysics*. 2010. V. 75. № 5. P. 75A229–75A243.
4. *Pesavento F., Schrefler B.A., Scium'e G.* Multiphase Flow in Deforming Porous Media: A Review // *Archives of Computational Methods in Engineering*. 2017. V. 24. № 2. P. 423–448.
5. *Wilmanski K.* A Few Remarks on Biot's Model and Linear Acoustics of Poroelastic Saturated Materials // *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*. 2006. V. 26. № 6–7. P. 509–536.
6. *Romenski E.* Conservative Formulation for Compressible Fluid Flow through Elastic Porous Media // *Numerical Methods for Hyperbolic Equations*. 2013. P. 193–200.
7. *Peshkov I., Pavelka M., Romenski E., Grmela M.* Continuum Mechanics and Thermodynamics in the Hamilton and the Godunov-type Formulations // *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. 2018. V. 30. № 6. P. 1343–1378.
8. *Romenski E., Reshetova G., Peshkov I., Dumbser M.* Modeling Wavefields in Saturated Elastic Porous Media Based on Thermodynamically Compatible System Theory for Multiphase Mixtures // Preprint, arXiv:1910.04207 [physics.flu-dyn].
9. *Saurel R., Pantano C.* Diffuse-Interface Capturing Methods for Compressible Two-Phase Flows // *Annual Review of Fluid Mechanics*. 2018. V. 50. № 1. P. 105–130.
10. *Levander A.R.* Fourth-order Finite-difference P-W Seismograms // *Geophysics*. 1988. V. 53. № 11. P. 1425–1436.

## WAVEFIELDS MODELING IN POROUS MEDIA BASED ON DIFFUSE INTERFACE APPROACH

G. V. Reshetova<sup>a,b,#</sup> and E. I. Romenski<sup>b</sup>

<sup>a</sup> *Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation*

<sup>b</sup> *Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation*  
<sup>#</sup> *E-mail: kgv@nmsf.sccc.ru*

Presented by Academician of the RAS M.I. Epov December 27, 2020

The diffuse interface approach for wavefields modeling in saturated elastic porous media is presented. Waves propagation is described by a hyperbolic system of first-order differential equations based on the theory of thermodynamically compatible systems of conservation laws for continuum mechanics. The proposed system provides a universal way of modeling wavefields in core samples with sharp interfaces between elastic/poroelastic petrophysical properties using a single system of governing equations. Numerical experiments showed good qualitative agreement with the classical theory of elasticity and the Biot model.

*Keyword:* porous media, two-phase model, diffuse interface, wave processes, finite-difference schemes