

УДК 550.8, 523.43

О ПОСТРОЕНИИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ МАРСА ПО СПУТНИКОВЫМ ДАННЫМ С ПОМОЩЬЮ МОДИФИЦИРОВАННЫХ S-АППРОКСИМАЦИЙ

© 2021 г. А. М. Сальников^{1, 2, *}, И. Э. Степанова^{1, 3},
Т. В. Гудкова¹, А. В. Батов^{1, 2}

Представлено академиком РАН А.О. Глико 30.03.2021 г.

Поступило 30.03.2021 г.

После доработки 31.03.2021 г.

Принято к публикации 31.03.2021 г.

Построена аналитическая модель магнитного поля над участком поверхности Марса в юго-западной части равнины Элизий по спутниковым данным с помощью модифицированных S-аппроксимаций в рамках структурно-параметрического подхода. Представлены аналитические продолжения магнитного поля Марса вниз на различные расстояния, в том числе на поверхность планеты.

Ключевые слова: метод регуляризации, магнитное поле, топография, Марс

DOI: 10.31857/S2686739721070094

Метод S-аппроксимаций [1, 2] успешно применялся при решении задач земной магнитометрии интерпретационного характера, при этом полученные результаты контролировались по сейсмическим данным и данным гравитационного поля.

Эксперимент MAG/ER миссии Mars Global Surveyor (MGS) показал, что в отличие от Земли на Марсе нет современного глобального магнитного поля [3]. В то же время была обнаружена сильная остаточная намагниченность пород Марса. Измерения магнитометра MGS получены для орбит, в основном, на высотах 370–430 км, и ряд измерений – на 90–170 км. Современные модели намагниченности коры [4, 5] включают данные магнитометра MAVEN на высоте 135 км [6].

Величина магнитного поля, измеренного на поверхности Марса в миссии InSight, оказалась в 10 раз больше, чем значение, прогнозируемое моделями на основе орбитальных измерений (>2000 нТл) [7]. Магнитометр установлен в юго-западной части равнины Элизий (4.5024° N, 135.6234° E) [7]. Пред-

положительно, источники намагниченности находятся на глубине 200 м–10 км. Пространственное разрешение моделей обусловлено высотой орбитальных измерений и составляет около 135 км.

Для повышения точности моделей требуется получение данных на низких высотах до 100 км [8]. В отсутствие таких измерений единственной возможностью уточнения карт намагниченности и выявления распределения магнитных носителей в коре (или мантии) является решение задачи аналитического продолжения поля на поверхность Марса.

Аналитическое продолжение приближенной заданной функции является, как известно, некорректно поставленной задачей, и решение такой задачи требует построения регуляризирующего алгоритма [9]. В данной работе мы получили продолжение поля вниз на различные расстояния, используя только априорную информацию о поле: спутниковые данные на высоте 150 км.

МЕТОД

Карта намагниченности поверхности, полученная в работе [5], основана на методе эквивалентных источников диполей (Equivalent Source Dipole, ESD), который был предложен для представления данных измерений магнитного поля со спутников [10]. В методе ESD магнитное поле,

¹ Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта
Российской академии наук, Москва, Россия

² Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова
Российской академии наук, Москва, Россия

³ Научно-технологический университет “Сириус”,
Сочи, Россия

*E-mail: salnikov@ipu.ru

измеренное в точке наблюдения, является результатом отдельных вкладов дипольных источников, расположенных на некоторой глубине. Используя в качестве входных данных нерегулярные и рассеянные в пространстве измерения магнитного поля, полученные в локальном или глобальном масштабе, можно использовать эквивалентные диполи для предсказания измерений магнитного поля, аппроксимированных методом наименьших квадратов.

Наш метод опирается на априорную информацию о поле: на спутниковые данные и на данные о предполагаемых глубинах залегания источников намагниченности. И по этой информации строится аппроксимация, которая может уточняться впоследствии. Наши источники – это фактически точки наблюдения, опущенные на поверхность и под поверхность.

Аппроксимация компонент магнитного поля Марса находится с помощью регионального варианта метода линейных интегральных представлений [13]. Региональный вариант метода линейных интегральных представлений основан на идеализированном представлении Марса в виде шара радиуса R . Реальная планета трактуется как область, расположенная внутри указанного выше шара и имеющая кусочно-непрерывную границу, незначительно отличающуюся от сферы радиуса R_0 . Предполагается, что на поверхности сферы заданы приближенные значения функции $V(x)$, гармонической вне этой сферы, на произвольном множестве $x^{(i)}$, $i = \overline{1, N}$:

$$\begin{aligned} f_{i,\delta} &= f_i + \delta f_i, \\ f_i &= V(x^{(i)}), \\ i &= \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (1)$$

Потенциал $V(x)$ в формуле (1) – это произвольная скалярная гармоническая функция. Если считать производные магнитного потенциала по сферическим координатам пределом гармонических вне сферы, ограничивающей планету, функций, то для трех компонент магнитного поля представления (2) также справедливы. Поскольку функция $V(x)$ гармонична при $r > R_0$, имеет место следующее интегральное представление:

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{R_0^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sigma(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi}{R_{\xi-x}} + \\ &+ \frac{R_0^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{w(\vartheta, \varphi) (R_0 - r \cos \vartheta') \sin \vartheta d\vartheta d\varphi}{R_{\xi-x}^3}, \\ R_{\xi-x} &= \sqrt{R_0^2 - 2R_0r \cos \vartheta' + r^2}, \\ \xi &= R_0 (\cos \varphi \sin \vartheta, \sin \varphi \sin \vartheta, \cos \vartheta), \end{aligned} \quad (2)$$

$$x = r (\cos \varphi \sin \vartheta, \sin \varphi \sin \vartheta, \cos \vartheta),$$

$$\cos \vartheta' = \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos(\varphi - \varphi') + \cos \vartheta \cos \vartheta'.$$

Функция $\sigma(\vartheta, \varphi)$ в (2) называется плотностью простого слоя, распределенного на поверхности сферы радиуса R_0 , а функция $w(\vartheta, \varphi)$ – плотностью двойного слоя на той же поверхности. Через $R_{\xi-x}$ обозначено расстояние между переменной точкой ξ на сфере и точкой наблюдения x .

Для определения функций σ и w [11, 12] ставится условно-вариационная задача с дополнительным, по сравнению с описанным в [13], функционалом качества решения. Искомые функции будут иметь вид

$$\begin{aligned} \sigma(\xi) &= \sum_{i=1}^N \lambda_i Q_i^{(1)}(\xi), \quad w(\xi) = \sum_{i=1}^N \lambda_i Q_i^{(2)}(\xi), \\ \xi &= (\vartheta, \varphi), \end{aligned} \quad (3)$$

$$Q_i^{(1)}(\xi) = \frac{1}{R_{\xi-x^{(i)}}}, \quad Q_i^{(2)}(\xi) = \frac{R_0 - r_i \cos \vartheta'_i}{R_{\xi-x^{(i)}}^3}.$$

Для определения компонент N -вектора λ_i необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений

$$A\lambda = f_\delta = f + \delta f, \quad (4)$$

где, вообще говоря, под A понимается прямоугольная $M \times N$ матрица с действительными элементами a_{ij} , $i = \overline{1, M}$, $j = \overline{1, N}$, λ – это N -вектор, подлежащий определению; f – M -вектор, описывающий полезный сигнал, символ f_δ означает, что поле содержит помеху, δf характеризует M -вектор случайного шума.

Основная вычислительная проблема заключается в нахождении устойчивых приближенных решений системы (4). Мы разработали ряд высокоэффективных методик построения аппроксимаций потенциальных полей Земли и ее топографии [14] в рамках структурно-параметрического подхода, когда система (4) является недоопределенной, а число данных очень велико (десятки и сотни тысяч неизвестных).

В случае симметрической положительно полуопределенной матрицы $A = A^T > 0$ ее элементы имеют вид

$$\begin{aligned} a_{ij} &= a_{ji} = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (Q_i^{(1)}(\xi) Q_j^{(1)}(\xi) + Q_i^{(2)}(\xi) Q_j^{(2)}(\xi)) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \\ &= \frac{2\pi}{r_i r_j \sqrt{h_i h_j}} \left(1 + \frac{1}{4r_i r_j h_i h_j} \right) \times \end{aligned} \quad (5)$$

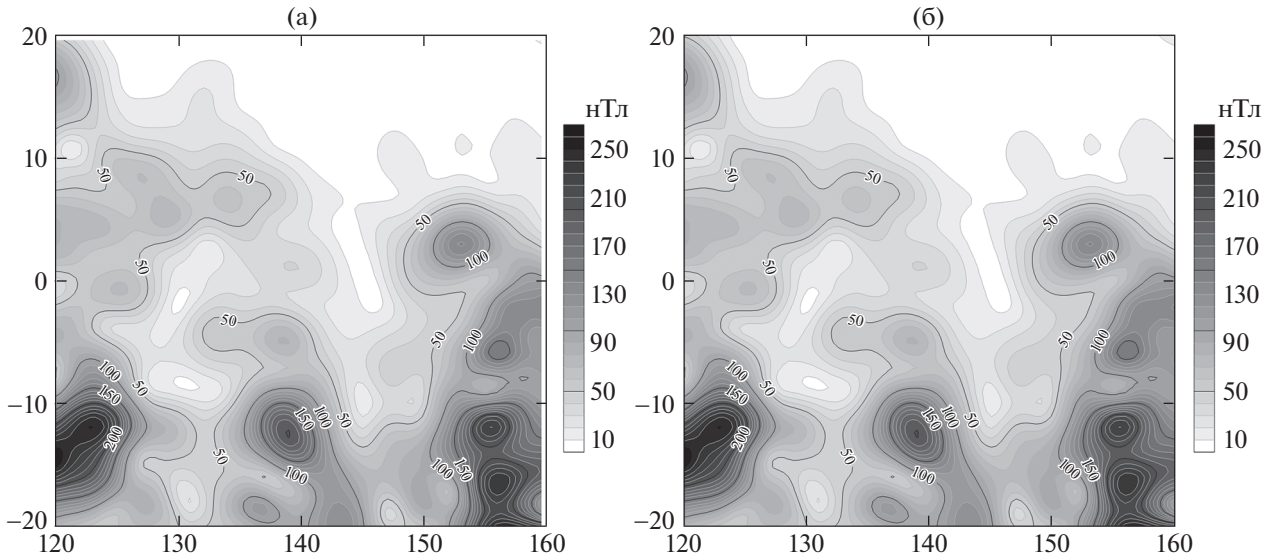


Рис. 1. Карты изолиний интенсивности магнитного поля B на высоте 150 км по данным модели [5], полученные (а) преобразованием методом сферических гармоник и (б) в результате решения обратной задачи методом модифицированных S-аппроксимаций.

$$\times F\left(2 \operatorname{arctg}(\sqrt{h_i h_j}), \sqrt{\frac{1 + \cos(\alpha_{ij})}{2}}\right) - \frac{\pi(3h_i^2 h_j^2 - 4h_i h_j \cos(\alpha_{ij}) + 1)}{r_i^2 r_j^2 h_i h_j (\sqrt{1 - 2h_i h_j \cos(\alpha_{ij}) + h_i^2 h_j^2})^3}.$$

Здесь $h_i = R_0/r_i$, $i = \overline{1, N}$, $h_j = R_0/r_j$, $j = \overline{1, N}$, α_{ij} — угол между векторами x_i и x_j . Функция $F(\varphi, k)$ — это эллиптический интеграл первого рода [15].

РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрено несколько модельных примеров. Аномальное поле аппроксимировалось суммой простого и двойного слоев, распределенных на двух сферах. Первоначально глубина залегания сфер варьировалась нами в пределах от 500 м до 30 км ниже минимальной отметки рельефа в рассматриваемом регионе. Число точек, по которым строилась аппроксимация магнитного поля, было равно 20000 (общедоступные данные на сайте NASA, <https://pds.nasa.gov/>). При решении системы (4) с помощью усовершенствованного метода блочного контрастирования в рамках структурно-параметрического подхода точность аппроксимации магнитного поля Марса на высоте 200 км составила $\Delta = \frac{\|Ax - f_\delta\|_E}{\|f_\delta\|_E} = 10^{-6}$.

Затем мы рассмотрели участок 20° S–20° N, 120° E–180° E над юго-западной частью равнины

Элизий, в районе посадки миссии InSight (4.5024° N, 135.6234° E). Исходные значения взяты из глобальной модели магнитного поля Марса [5], изначально полученной методом эквивалентных источников диполей (ESD) по выборочным данным спутниковых измерений на разных высотах и представленной на высоте 150 км в виде сферических гармоник 134 степени и порядка, что соответствует пространственному разрешению на поверхности ~ 160 км. Количество компонент векторов индукции магнитного поля над рассматриваемым участком — 5043, что соответствует 1681 выбранной точке и пространственному разрешению 1°. За референсную поверхность принималась сфера радиусом 3393.5 км.

Аномальное магнитное поле аппроксимировалось суммой простого и двойного слоев, распределенных на двух симметричных сферах. Глубины залегания сфер под поверхностью идеализированной планеты в различных экспериментах варьировалась в пределах от 0.1 до 50 км, поскольку глубины залегания эквивалентных по внешнему магнитному полю источников являются параметрами метода. Варьирование этих параметров при аналитическом продолжении поля в сторону источников не привело к существенному изменению результата, поэтому глубины подбирались в соответствии с априорной информацией о возможных природных источниках остаточной намагниченности на Марсе. В настоящее время такой информации мало, поэтому мы пользовались лишь предположениями о толщине марсианской коры [7]. Во всех случаях отношение эвклидовой нормы разницы левой и правой частей к эвклидо-

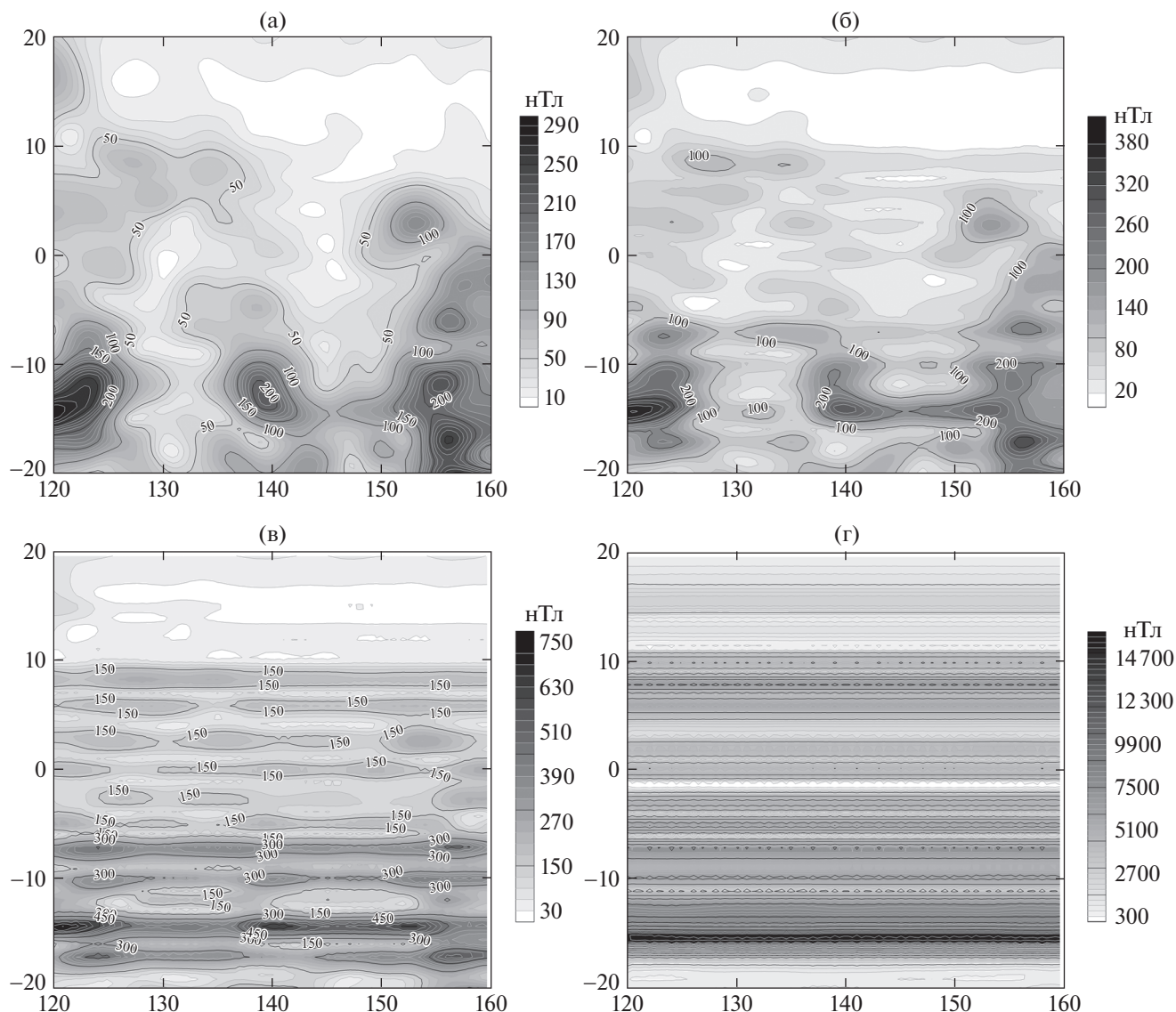


Рис. 2. Карты изолиний аналитических продолжений интенсивности магнитного поля B , полученные методом модифицированных S -аппроксимаций на высотах (а) 120 км, (б) 90 км, (в) 60 км, (г) на поверхности.

вой норме правой части не превышало 10^{-9} при различном выборе глубин залегания носителей эквивалентных магнитных масс, что говорит о достаточной высокой точности аппроксимации. Также во всех экспериментах продолженное поле сохраняло свою структуру и связь с исходными значениями при удалении до 60 км и более от исходных значений, но при удалении на 90 км и далее поле “распадалось”, значения компонент вектора магнитной индукции сильно возрастали по абсолютной величине и часто меняли свой знак. По этой причине аналитическое продолжение исходного поля на поверхность планеты с учетом сложной топографии и сравнение результатов с данными магнитометра InSight пока представляются недостаточно обоснованными. Тем не

менее прогнозируемая интенсивность магнитного поля B в месте посадки InSight по данным аналитического продолжения составила 2680 нТл, в то время как среднее значение B , измеренное магнитометром InSight, составляет 2013 ± 53 нТл [7].

Выбранные для демонстрации в настоящей работе эквивалентные по внешнему магнитному полю носители масс распределены на двух концентрических сферах, залегающих на глубинах 1 и 10 км ниже дневной поверхности, что соответствует предполагаемым границам залегания магнитных масс в марсианской коре $\approx 1-10$ км [7].

В результате решения обратной задачи методом модифицированных S -аппроксимаций были получены компоненты векторного поля B_θ , B_φ , B_r

на высоте 150 км. Аналитические продолжения магнитного поля над рассматриваемым участком построены вниз на расстояния 30, 60, 90 км и на поверхность планеты с учетом рельефа. Карты изолиний интенсивности B вектора индукции исходного модельного магнитного поля, результатов аппроксимации и аналитических продолжений вниз представлены на рис. 1, 2.

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Поставленный авторами статьи математический эксперимент по аналитическому продолжению вниз магнитного поля Марса, измеренного орбитальными аппаратами при их движении вокруг планеты, равно как и поля, смоделированного по уже известному методу на той же высоте, показал применимость модифицированных S-аппроксимаций в региональном варианте (когда учитывается сферичность планеты и появляется возможность изучения элементов потенциальных полей на значительных расстояниях от поверхности) при решении задач нахождения линейных трансформант физических полей. Продолженное поле сохраняет свою структуру при удалении от области задания более чем на 60 км. При удалении на 90 км и больше поле сильно возрастает по абсолютной величине и “теряет” связь с оригиналом. Проявляется некорректность задачи аналитического продолжения сигнала в сторону источников.

Для выяснения природы носителей требуется сопоставление с данными топографии, гравитационного поля и геологическими данными [16, 17].

Впоследствии планируется провести сравнительный анализ данных, полученных для исследуемого участка с использованием различных методов аппроксимации магнитного поля на различных высотах по спутниковым измерениям, а также измеренных средних значений вектора магнитной индукции в месте посадки InSight и продолженных значений магнитного поля.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено по госзаданию ИФЗ РАН, а также при финансовой поддержке РФФИ (грант № 19-35-51014).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Страхов В.Н., Керимов И.А., Степанова И.Э.* Разработка теории и компьютерной технологии построения линейных аналитических аппроксимаций гравитационных и магнитных полей. М.: ИФЗ РАН. 2009. 254 с.
2. *Степанова И.Э., Керимов И.А., Раевский Д.Н., Щепетиллов А.В.* Комбинированный метод F-, S- и R-аппроксимаций при решении задач геофизики и

геоморфологии // *Физика Земли*. 2018. № 1. С. 96–113.

3. *Acuña M.H., et al.* Global distribution of crustal magnetization discovered by the Mars Global Surveyor MAG/ER experiment // *Science*. 1999. V. 284. P. 790–793.
4. *Mittelholz A., Johnson C.L., Morschhauser A.* A New Magnetic Field Activity Proxy for Mars from MAVEN Data // *Geophysical Research Letters*. 2018. V. 45. P. 5899–5907.
5. *Langlais B., Thébault E., Houliéz A., Purucker M.E.* A New Model of the Crustal Magnetic Field of Mars Using MGS and MAVEN // *J. Geophys. Res. Planet*. 2019. V. 124. P. 1542–1569.
6. *Connerney J.E.P., Espley J., Lawton P., et al.* The MAVEN Magnetic Field Investigation // *Space Science Reviews* 2015. V. 195. P. 257–291.
7. *Johnson C.L., Mittelholz A., Langlais B., et al.* Crustal and Time-varying Magnetic Fields at the InSight Landing Site on Mars // *Nat. Geosci*. 2020. V. 13. P. 199–204.
8. *Mittelholz A., Connerney J., Espley J., Fu R., et al.* // Preprint, Planetary Science Decadal Survey. 2021.
9. *Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г.* Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990. 230 с.
10. *Mayhew M.A.* Inversion of Satellite Magnetic Anomaly Data // *J. Geophys.* 1979. V. 45. P. 119–128.
11. *Раевский Д.Н., Степанова И.Э.* Модифицированный метод S-аппроксимаций. Региональный вариант // *Физика Земли*. 2015. № 2. С. 44.
12. *Раевский Д.Н., Степанова И.Э.* О решении обратных задач гравиметрии с помощью модифицированного метода S-аппроксимаций // *Физика Земли*. 2015. № 2. С. 44.
13. *Strakhov V.N., Stepanova I.E.* Solution of Gravity Problems by the S-approximation Method (Regional Version) // *Izvestiya. Physics of the Solid Earth*. 2002. V. 38. № 7. P. 535–544.
14. *Степанова И.Э., Щепетиллов А.В., Погорелов В.В., Михайлов П.С.* Структурно-параметрический подход при построении цифровых моделей рельефа и гравитационного поля Земли с использованием аналитических S-аппроксимаций // *Геофизические процессы и биосфера*. 2020. Т. 19. № 2. С. 107–116.
15. *Carlson B.C.* Computing Elliptic Integrals by Duplication // *Numerische Mathematik*. 1979. V. 33. P. 1–16.
16. *Гудкова Т.В., Степанова И.Э., Батов А.В.* // *Астрон. Вестник*. 2020. Т. 54. № 1. С.18–23.
17. *Pan L., Quantin C., Tauzin B., et al.* Crust Stratigraphy and Heterogeneities of the First Kilometers at the Dichotomy Boundary in Western Elysium Planitia and Implications for InSight Lander // *Icarus*. 2020. V. 338. 113511.

**ON THE CONSTRUCTION OF AN ANALYTICAL MODEL
OF THE MAGNETIC FIELD OF MARS FROM SATELLITE DATA
USING MODIFIED S-APPROXIMATIONS**

A. M. Salnikov^{a, b, #}, I. E. Stepanova^{a, c}, T. V. Gudkova^a, and A. V. Batov^{a, b}

^a *Schmidt Institute of Physics of the Earth of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

^b *Trapeznikov Institute of Control Sciences of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

^c *Sirius University of Science and Technology, Sochi, Russia*

[#] *E-mail: salnikov@ipu.ru*

Presented by Academician of the RAS A.O. Gliko March 30, 2021

We construct an analytical model of the magnetic field over a region of the Martian surface in the southwestern part of the Elysium Planitia using satellite data and modified S-approximations within the structural-parametric approach framework. Analytic downward continuations of the magnetic field of Mars at various distances are presented, including the planet's surface.

Keywords: regularization method, magnetic field, topography, Mars