

УДК 550.311

## ДЕФОРМАЦИИ УПРУГОГО ИЗГИБА В ОКЕАНИЧЕСКИХ ЛИТОСФЕРНЫХ ПЛИТАХ

© 2022 г. Член-корреспондент РАН В. П. Трубицын<sup>1</sup>, А. П. Трубицын<sup>1,\*</sup>

Поступило 29.12.2021 г.  
После доработки 28.01.2022 г.  
Принято к публикации 03.02.2022 г.

Изучение напряжений и деформаций в океанических плитах обычно проводится на основе теории упругого изгиба тонких плит. Поскольку толщина океанических плит на порядок меньше их длины, то формально условие тонкости плит выполняется с запасом. Однако в океанических плитах основные деформации распределены не равномерно вдоль плиты, а сосредоточены вблизи зоны субдукции. Поэтому эффективные длины плит меньше реальных, и условие тонкости частично не выполняется. В работе на примере зоны Японского желоба дается оценка поправки к деформациям изгиба, рассчитываемым по теории тонких плит. Приводятся формулы, связывающие напряжения и деформации в плите в месте погружения в мантию с измеряемыми глубиной желоба и углом погружения плит.

**Ключевые слова:** океанические плиты, изгибные деформации

**DOI:** 10.31857/S2686739722050176

### ИЗГИБ ТОНКОЙ УПРУГОЙ ДВУМЕРНОЙ ПЛИТЫ

На рис. 1 представлен профиль океанической плиты толщиной  $h$  и длиной  $L$ . Стрелками показано распределение по высоте для напряжения  $\sigma_{xx}$ . Серым цветом показана область упругих деформаций переменной толщиной  $h_{el}$ . Фиолетовым – зона растяжений с хрупкой пластичностью, красным – зона сжатия с пластическим течением.

Величину вертикального смещения срединной линии плиты, называемую функцией изгиба, обозначим через  $W(x)$ . Ось  $z$  направим вниз и  $x$  – вправо. На концах плиты  $x = 0$  и  $x = L$  примем заданными вертикальное смещение  $W$  и его производную  $dW/dx$

$$W(x=0) = W_0, \quad W'(x=0) = W'_0, \quad (1)$$

$$W(x=L) = W_L, \quad W'(x=L) = W'_L$$

Верхнюю и нижнюю поверхности плиты примем скользящими, с нулевыми касательными напряжениями

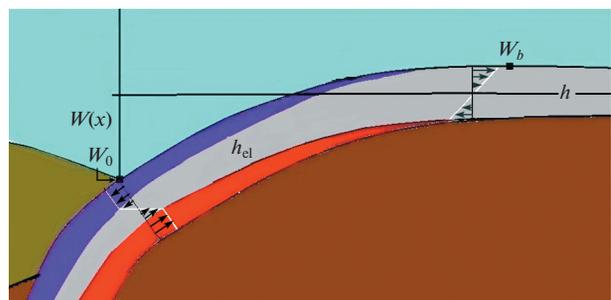
$$\sigma_{xz}(x, z = -h/2) = \sigma_{xz}(x, z = h/2) = 0. \quad (2)$$

При нагрузках  $q_1$  на верхнюю и  $q_2$  – на нижнюю поверхности плиты граничное условие для нормальных напряжений имеет вид (положительными считаются растягивающие напряжения):

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}(x, z = -h/2) &= -q_1(x), \\ \sigma_{zz}(x, z = h/2) &= -q_2(x). \end{aligned} \quad (3)$$

Поскольку решения уравнений для изгиба и для горизонтального растяжения/сжатия аддитивны, то в дальнейшем будем рассматривать только изгибные деформации плиты.

Плиту примем тонкой и изгиб малым. Обычно тонкой считается плита при  $h/L < 1/6$ . Рассматриваемая двумерная модель является частным случаем трехмерной модели, когда все свойства пли-



**Рис. 1.** Океаническая плита вблизи желоба. Масштаб по вертикальной оси преувеличен.

<sup>1</sup>Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта  
Российской академии наук, Москва, Россия  
\*E-mail: atrub@yandex.ru

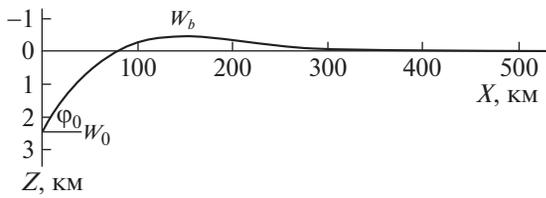


Рис. 2. Изгибы  $W(x)$  океанической плиты у Японского желоба, рассчитанные по упругой модели. Глубина желоба  $W_0$ , угол погружения  $\varphi_0$ , высота внешнего поднятия  $W_b$ .

ты, нагрузки и граничные условия не зависят от третьей координаты.

Поскольку для большинства океанических плит  $h/L < 1/10$ , то формально условие тонкости плиты  $h/L < 1/6$  выполняется с большим запасом и вопрос о поправках ранее не возникал. Однако для океанических плит вертикальной нагрузкой служит выталкивающая сила мантии, которая не задается заранее, а сама зависит от изгиба. Она создает специфический выгиб (внешнее поднятие  $W_b$ ). В результате деформации изгиба оказываются распределенными по длине не равномерно, а сосредоточены вблизи зоны субдукции. При этом эффективная длина плиты (область основной деформации) может быть существенно меньше, порядка  $L_{\text{eff}} \approx 200$  км. При толщине плиты  $h = 50$  км получим  $h/L_{\text{eff}} \approx 1/4$ , что несколько не соответствует критерию тонкости плит. В настоящей работе находят поправки к теории тонких плит Кирхгофа для деформаций и на примере изгиба Тихоокеанской плиты у Японского желоба оценивается их величина.

Напряженное состояние упругого тела в трехмерной модели описывается 15 функциями: тремя компонентами вектора смещения  $U_i$ , шестью компонентами тензора напряжения  $\sigma_{ik}$  и шестью компонентами тензора деформаций  $e_{ik}$ . Для них имеется 15 взаимосвязанных уравнений: три соотношения Коши, связывающие смещения  $U_i$  и деформации  $e_{ik}$ , шесть соотношений закона Гука, связывающие деформации  $e_{ik}$  и напряжения  $\sigma_{ik}$ , и три уравнения равновесия для напряжений. Они приведены, например, в [1]. В рассматриваемой двумерной модели остаются восемь уравнений для восьми функций переменных  $x$  и  $z$ .

Математически задачу об изгибе тонких плит сформулируем следующим образом. Учитывая, что  $h < L$ , нужно упростить все соотношения между напряжениями и деформациями и общие уравнения равновесия. Для этого их зависимость от координаты  $z$  представим в виде ряда Тейлора, ограничиваясь первыми по порядку малости ненулевыми членами, в частности для  $U_x(x, z) = z\partial U_x/\partial z$ . При этом коэффициенты разложения

будем искать методом итераций. Пробное решение первого приближения будем искать в форме, при которой  $x$ -компонента вектора смещений имеет вид

$$U_x(x, z) = -z dW/dx, \tag{4}$$

и компоненты деформаций  $e_{xz}$  и тензора напряжений  $\sigma_{zz}$  являются малыми по сравнению с соответствующими другими компонентами.

Наводящим указанием на выбор такого пробного решения является следующее. Если плита тонкая, то в соответствии с постулатом Кирхгофа угол изгиба ее срединной линии и угол поворота поперечного сечения плиты в первом приближении равны, т.е. равны их тангенсы или производные, с учетом направления поворота  $\partial U_x/\partial z \approx -dW/dx$ . Отметим, что в предлагаемой в настоящей работе постановке задачи этот выбор рассматривается как пробный и относится только к первому приближению. Решение будет искомым только, если итерации сойдутся, и после подстановки конечных выражений в исходные уравнения равновесия они удовлетворяются.

Подставляя пробное соотношение  $U_x(x, z) = -z dW/dx$  в определении  $xx$ -компоненты тензора деформаций, найдем

$$e_{xx} = \partial U_x/\partial x = -z d^2W/dx^2. \tag{5}$$

В выражении для  $zz$ -компоненты тензора напряжений теории упругости [1]

$$\sigma_{zz} = [E/(1+\nu)(1-2\nu)][(1-\nu)e_{zz} + \nu e_{xx}] \tag{6}$$

можно в первом приближении пренебречь компонентой  $\sigma_{zz}$ , поскольку мы ищем решение в виде, при котором она принята величиной следующего порядка малости по сравнению с  $\sigma_{xx}$  и  $\sigma_{xz}$ . Подставив затем в него (5), найдем

$$\sigma_{xx} = -[E/(1-\nu^2)]z d^2W/dx^2. \tag{7}$$

В результате получены выражения для компонент тензора деформаций  $e_{xx}$  и напряжений  $\sigma_{xx}$  первого приближения, выраженные через одну функцию изгиба одной переменной  $W(x)$ . Поскольку  $z$  меняется от  $-h/2$  до  $h/2$ , то эти компоненты имеют первый порядок малости.

Далее выражения (5), (7) можно подставить в уравнение равновесия с учетом граничных условий (2), (3) и найти компоненты тензора напряжений  $\sigma_{zz}$  и  $\sigma_{xz}$ , а также уравнение для нахождения функции изгиба  $W(x)$ , полученное С. Жермен еще в 1816 г. В классической теории Кирхгофа полученными так выражениями для напряжений и деформаций и ограничиваются. Однако при этом формально оказывается, что общим уравнениям равновесия удовлетворяют только уравнение Жермен и выражения для напряжений, а выражения для деформаций оказываются не согласованными с напряжениями, так как не удовлетворяют

соотношениям Гука и уравнениям равновесия для деформаций. Поэтому до настоящего времени во многих монографиях и пособиях по теории упругости и сопромату, например [3–5], говорится, что гипотезы Кирхгофа, используемые в теории тонких пластин, приводят к неустраняемым противоречиям, с которыми, однако, приходится мириться, так как формулы для изгибов и напряжений достаточны для практических приложений. Такие комментарии можно объяснить, по-видимому, нечеткой формулировкой проблемы, в которой формулы Кирхгофа рассматриваются как окончательный результат. Однако, как подчеркнуто в настоящей работе, они являются лишь первым приближением.

Для нахождения деформаций следующего приближения  $e_{xz}$  нужно в выражения (6) подставить теперь уже не нулевое значение  $\sigma_{zz}$ , а новое найденное значение первого приближения. Также находятся и остальные компоненты тензора деформаций. В результате этой итерации, уточняющей деформации, вся система уравнений для напряжений и деформаций примет нижеследующий вид, где  $\zeta = z/h$ . Тензор напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -hE(1 - \nu^2)^{-1} \zeta d^2 W / dx^2, \\ \sigma_{yy} &= -hE\nu(1 - \nu^2)^{-1} \zeta d^2 W / dx^2, \\ \sigma_{xz} &= -0.125h^2 E(1 - \nu^2)^{-1} (1 - 4\zeta^2) d^3 W / dx^3, \\ \sigma_{zz} &= -0.5q_1(1 - 3\zeta + 4\zeta^3) - 0.5q_2(1 + 3\zeta - 4\zeta^3), \end{aligned} \quad (8)$$

тензор деформаций:

$$\begin{aligned} e_{xx} &= -h\zeta d^2 W / dx^2 - \nu \sigma_{zz} / E, \\ e_{yy} &= -\nu \sigma_{zz} / E, \\ e_{xz} &= h\nu(1 - \nu)^{-1} \zeta d^2 W / dx^2 + \sigma_{zz} / E, \\ e_{zx} &= -0.125h^2 (1 - \nu)^{-1} (1 - 4\zeta^2) d^3 W / dx^3, \end{aligned} \quad (9)$$

и уравнение равновесия Жермен:

$$Dd^4 W / dx^4 = q_1(x) - q_2(x), \quad (10)$$

где  $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$  – изгибная жесткость плиты.

Таким образом, чтобы найти все характеристики упругого состояния двумерных тонких плит как функции двух переменных  $x$  и  $z$ , достаточно решить одно обыкновенное дифференциальное уравнение для функции изгиба одного переменного  $x$  (10) и подставить его в (8), (9). Проверка полученных выражений (8)–(10) подстановкой в исходные общие уравнения упругого равновесия показывает, что теперь они удовлетворяются не только для напряжений (как было ранее), но и для деформаций. Однако, чтобы удовлетворить еще и условиям совместности Сен-Венана и получить поправки не только к деформациям, но и к напряжениям и уравнению

Жермен, итерации нужно продолжить. Ввиду громоздкости получаемых выражений в настоящей работе они не приводятся.

Полученные после указанной итерации выражения (8) для компонент тензора деформаций  $e_{xx}$  и  $e_{zz}$  отличаются от классической теории изгиба Кирхгофа дополнительными членами соответственно  $-\nu\sigma_{zz}/E$  и  $\sigma_{zz}/E$ , которые учитывают эффект “сплющивания” плиты под действием вертикальной нагрузки. Хотя эти члены и являются малыми поправками, но только при их учете в первом приближении удовлетворяются и законы Гука, и уравнения равновесия в деформациях.

Далее, как видно по (8), система формул изгиба обязательно должна включать компоненту  $e_{yy}$ . Даже в двумерной модели она не может быть равной нулю, так как при отличном от нуля коэффициенте Пуассона вертикальное сжатие всегда вызывает вытеснение вещества не только по оси  $x$ , но и по оси  $y$ .

## МОДЕЛЬ УПРУГОЙ ОКЕАНИЧЕСКОЙ ПЛИТЫ

На океаническую плиту без учета осадков сверху действует давление воды  $q_1$ , снизу – давление мантии  $q_2$ . Мы рассматриваем изменения всех величин при изгибе плиты  $W$ , отсчитывая их от ранее уравновешенной плавающей плиты. Без учета осадков эти силы будут иметь вид

$$q_1 = \rho_w g W, \quad q_2 = \rho_m g W. \quad (11)$$

Поэтому уравнение равновесия Жермен (10) для изгиба океанических плит примет вид [2]

$$Dd^4 W / dx^4 + \delta\rho g W = 0, \quad (12)$$

где  $\delta\rho = \rho_m - \rho_w$ . Простой подстановкой можно убедиться, что для случая бесконечно длинной плиты уравнение (12) с граничными условиями (1) имеет аналитическое решение, соответствующее форме изгиба с поднятием перед желобом, как на рис. 1:

$$W(x) = \exp(-x/\alpha) [W_0 \cos(x/\alpha) + (\alpha \operatorname{tg} \varphi_0 + W_0) \sin(x/\alpha)] \quad (13)$$

где  $W_0$  – глубина желоба,  $\operatorname{tg} \varphi_0 = W_0'$  – тангенс угла погружения плиты и

$$\alpha = (4D/\delta\rho g)^{1/4}. \quad (14)$$

Обычно в литературе используется не (13), а другое аналитическое решение, а именно полученное в [2], для которого на левой границе плиты в зоне субдукции задаются заранее неизвестные и неизмеряемые перерезывающая сила и закручивающий момент. Однако более естественно

использовать измеряемые величины – глубину желоба и угол наклона плиты.

Найдя производные от функции  $W(x)$  по (13) и подставив их в (9), (10), найдем распределения упругих напряжений и деформаций внутри всей плиты. При этом для океанических плит компонента напряжений  $\sigma_{zz}$  будет иметь вид

$$\sigma_{zz} = -0.5gW[(\rho_m + \rho_w) - (\rho_m - \rho_w)(3z/h - 4z^3/h^3)] \quad (15)$$

Отсюда, в частности, можно найти распределения напряжений и деформаций по глубине при  $x = 0$  на левом конце плиты, погружающейся в мантию.

В качестве примера рассмотрим область Японского желоба. Для нее, согласно [2, 6–9], средняя эффективная толщина плиты  $h_{ef} = 40$  км, упругие параметры  $E = 70$  ГПа,  $\nu = 0.25$ , угол субдукции  $\varphi_0 = 2.8$  град или  $\text{tg } \varphi_0 = -0.05$ , глубина желоба  $W_0 = 2.4$  км,  $\rho_w = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_m = 3300$  кг/м<sup>3</sup>. При этих значениях получим  $D = Eh^3/12(1 - \nu^2) = 4 \times 10^{23}$  н м,  $\alpha = (4D/\delta\rho g)^{1/4} = 90$  км и производные от функции изгиба на левом конце плиты  $dW/dx = -0.05$ ,  $d^2W/dx^2 = 5.2 \times 10^{-7}$  м<sup>-1</sup>,  $d^3W/dx^3 = 0.82 \times 10^{-12}$  м<sup>-2</sup>.

Подставляя эти значения в (8), найдем распределения напряжений в поперечном сечении в месте погружения плиты в мантию. В соответствии с общими формулами (8) нормальное напряжение  $\sigma_{xx}$  линейно зависит от  $z$  в пределах  $\pm 780$  МПа, обращаясь в нуль в срединной плоскости. Напряжение  $\sigma_{xz}$  параболически меняется по глубине от нуля на верхней и нижней границах до  $-12$  МПа в срединной плоскости. Вертикально сжимающее напряжение  $\sigma_{zz}$  нарастает сверху вниз по закону кубической параболы от  $-24$  МПа наверху плиты (давление вышележащего слоя воды в желобе) до  $-79$  МПа на нижней границе литосферы, что в среднем составляет около 10% от значения для  $\sigma_{xx}$ .

Вычисленные по теории Кирхгофа деформации  $e_{xx}$  линейно меняются с глубиной в пределах  $\pm 10.4 \times 10^{-3}$ , а  $e_{zz}$  в пределах  $\pm 3.5 \times 10^{-3}$ , но с обратным знаком. Дополнительные поправки  $\delta e_{xx}$  и  $\delta e_{zz}$  увеличиваются с глубиной соответственно от  $0.08 \times 10^{-3}$  до  $0.28 \times 10^{-3}$  и от  $-0.35 \times 10^{-3}$  до  $-1.13 \times 10^{-3}$ . Угловая деформация  $e_{xz}$  поправку не содержит и имеет максимум  $-0.22 \times 10^{-3}$  в срединной плоскости.

Относительные поправки к деформациям  $\delta e_{xx}/e_{xx}$  и  $\delta e_{zz}/e_{zz}$  в среднем составляют порядка 10%, что соответствует квадрату  $(h/L_{eff})^2$ . Повышенная величина поправки к  $e_{zz}$  по сравнению с  $e_{xx}$  обусловлена меньшим исходным значением  $e_{zz}$  и отсутствием множителя  $\nu = 0.25$ . Кроме того, надо учитывать, что исходные деформации и по-

правки к ним по-разному зависят от  $z$ . Предварительная оценка показывает, что при проведении последующих более громоздких итераций суммарные поправки также могут быть порядка 10%.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При расчетах напряжений и деформаций изгиба океанических плит используется теория тонких пластин Кирхгофа. Критерием ее применимости является малость отношения толщины к длине, а вероятные поправки могут быть порядка  $(h/L)^2$ . Поскольку для океанических плит  $h \approx 50$  км и  $L \approx 1000$  км, то было общепринятым, что поправки пренебрежимо малы и поэтому вопрос об их учете ранее не ставился.

В настоящей работе указано, что в критерий тонкости плиты должна входить не ее реальная длина, а эффективная длина ее изгибающейся части  $L_{eff}$ . Для плавающих океанических плит внешней нагрузкой является выталкивающая сила мантии, которая пропорциональна величине изгиба. Упругий выгиб плиты образуется не на середине плиты, а вблизи зоны субдукции в виде внешнего поднятия. При этом основные деформации распределены не равномерно вдоль плиты, а сосредотачиваются в области вблизи зоны субдукции. Для типичных океанических плит ее размер  $L_{eff} < 200$  км. Поэтому в расчеты напряжений и деформаций океанических плит нужно вносить поправки порядка  $(h/L_{eff})^2 \sim 10\%$ .

В настоящей работе выражения для деформаций теории Кирхгофа дополняются малыми поправками, возникающими при одной следующей итерации. Конкретный пример расчета для Японского желоба показывает, что эти поправки имеют порядок около 10% и не являясь (как ранее полагалось) пренебрежимо малыми. Помимо этого, в расчете использовано аналитическое решение уравнения изгиба с граничными условиями в виде измеряемых глубины желоба и угла погружения плиты, а не в виде заранее неизвестных сил и моментов, как обычно принято в литературе.

Однако отметим, что во многих реальных плитах вблизи зоны субдукции упругие напряжения у верхней и нижней поверхностей плит превышают предел прочности и возникают зоны пластичности. Поэтому полученные выше соотношения (8)–(10) для упругих деформаций усложняются. Приблизительно эффект зон пластичности можно учесть, просто заменяя реальную толщину плиты  $h$  на эффективную меньшую толщину  $h_{el}$ , соответствующую упругой части плиты [9]. Ввиду ограниченности объема статьи эффекты неупругости в данной работе не рассматриваются.

## ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследования выполнены за счет средств бюджетного финансирования Института физики Земли РАН.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. Москва: Физматлит, 2003. 264 с.
2. Теркот Д., Шуберт Дж. Геодинамика. Москва: Мир, 1985. 360 с.
3. Саченков А.А. Цикл лекций по теории изгиба пластин / Учебное пособие. Казань: Казанский федеральный ун-т, 2012. 53 с.
4. Каюмов Р.А. Основы теории упругости и элементы теории пластин и оболочек. Казань: Изд-во Казанск. гос. архитектур.-строит. ун-та, 2016. 111 с.
5. Вардянян Г.С., Андреев В.И., Атаров Н.М., Горшков А.А. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности. Москва: Изд-во АСВ, 1995, 568 с.
6. Трубицын В.П. // Физика Земли. 2012. № 2. С. 3–15.
7. Трубицын В.П. // Геофизические процессы и биосфера. 2011. № 3. С. 5–12.
8. Zhang F., Lin J., Zhou Z., Yang H., Zhan W. // Geophys. J. Int. 2018. V. 212, P. 1429–1449.
9. Бирючева Е.О., Трубицын В.П. // Пятая тектонофизическая конференция в ИФЗ РАН. 5–9 октября 2020 г. Москва: ИФЗ РАН. С. 93–97.

## DEFORMATIONS OF ELASTIC BENDING IN THE OCEANIC LITHOSPHERIC PLATES

Corresponding Member of the RAS V. P. Trubitsyn<sup>a</sup> and A. P. Trubitsyn<sup>a,#</sup>

<sup>a</sup>*Schmidt Institute of Physics of the Earth, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

<sup>#</sup>*E-mail: atrub@yandex.ru*

The study of stresses and strains in oceanic plates is usually carried out on the basis of the theory of elastic bending of thin plates. Since the thickness of the oceanic plates is an order of magnitude less than their length, then formally the condition of the thinness of the plates is satisfied with a margin. However, in oceanic plates, the main deformations are not evenly distributed along the plate, but are concentrated near the subduction zone. Therefore, the effective lengths of the plates are less than the real ones, and the thinness condition is partially not met. In this paper, using the example of the Japan trench, an estimate is given of the corrections to bending deformations calculated according to the theory of thin plates. Formulas are given that relate stresses and strains in a plate at the point of sinking into the mantle with the measured depth of the trench and the dip angle.

*Keywords:* oceanic plates, bending deformation