ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. НАУКИ О ЗЕМЛЕ, 2022, том 505, № 2, с. 192–195

ОКЕАНОЛОГИЯ

УДК 532.59:534.143

# ГЕНЕРАЦИЯ ВНУТРЕННИХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН В ОКЕАНЕ ПРИ НАБЕГАНИИ ФОНОВОГО СДВИГОВОГО ТЕЧЕНИЯ НА ПОДВОДНУЮ ВОЗВЫШЕННОСТЬ

© 2022 г. В. В. Булатов[1,*], И. Ю. Владимиров[2,**], Е. Г. Морозов[2,***]

Представлено академиком РАН М.В. Флинтом 18.04.2022 г.
Поступило 18.04.2022 г.
После доработки 05.05.2022 г.
Принято к публикации 06.05.2022 г.

Рассмотрена задача о генерации внутренних гравитационных волн, возникающих при набегании стратифицированного потока со сдвиговым течением на одиночное подводное препятствие. Предполагается, что частота плавучести постоянна, сдвиговое течение линейное и одномерное, высота обтекаемого препятствия мала по сравнению с глубиной океана. Получены интегральные представления решения при выполнении условия устойчивости Майлса-Ховарда. Аналитически построены решения краевой спектральной задачи, которые выражаются через модифицированные функции Бесселя мнимого индекса. Приведены результаты численных расчетов возбуждаемых полей для первых трех волновых мод. Обсуждены особенности дисперсионных соотношений и трансформации волновых полей внутренних гравитационных волн в зависимости от параметров генерации.

*Ключевые слова:* стратифицированная среда, внутренние гравитационные волны, частота плавучести, сдвиговые течения, спектральная задача, дисперсионные зависимости, фазовые картины

**DOI:** 10.31857/S2686739722080059

В реальных природных стратифицированных средах (океан, атмосфера) генерация и распространение внутренних гравитационных волн (ВГВ) в значительной степени связаны с вертикальной и горизонтальной динамикой фоновых сдвиговых течений [1, 2, 8, 15, 16]. В океане такие течения могут проявляться, например, в области сезонного термоклина и оказывать заметное влияние на эволюцию ВГВ [3, 5, 10, 12, 17, 18]. В общей постановке описание динамики ВГВ в стратифицированной среде с фоновыми полями сдвиговых течений является весьма сложной задачей уже в линейном приближении [1, 2, 9, 13, 19, 20]. В этом случае задача сводится к анализу системы уравнений в частных производных, и при одновременном учете вертикальной и горизонтальной неоднородности эта система уравнений не допускает разделение переменных. Для исследования механизма взаимовлияния течений и ВГВ можно рассматривать различные модельные представления частоты плавучести и сдвиговых течений [2–4, 6, 8, 15]. Одним из заметных механизмов возбуждения ВГВ в океане можно рассматривать, например, генерацию волн фоновым (или периодическим приливным) течением на склонах поперечных хребтов в проливах и в подводных каналах [5, 10, 16–18]. Поэтому целью настоящей работы является построение решений, описывающих генерацию ВГВ стратифицированным сдвиговым потоком, набегающим на одиночное подводное препятствие. Генерация внутренних волн и, в частности, приливных внутренних волн зависит от интенсивности фонового среднего или периодического течения, стратификации океана, расположения подводного препятствия относительно потока и геометрии склона. Если подводный хребет перпендикулярен течению, то генерация усиливается по сравнению с расположением хребта вдоль потока. Если склон подводного препятствия близок к наклону характеристической поверхности для ВГВ заданной частоты, то это также усиливает волновую генерацию, поскольку движение частиц во внутренней волне происходит по наклонным эллипсам [18].

Рассматривается вертикально стратифицированный океан конечной глубины $H$ с фоновым сдвиговым течением, набегающим на одиночную

[1] *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук, Москва, Россия*
[2] *Институт океанологии им. П.П. Ширшова Российской академии наук, Москва, Россия*
**E-mail: internalwave@mail.ru*
***E-mail: iyuvladimirov@rambler.ru*
****E-mail: egmorozov@mail.ru*

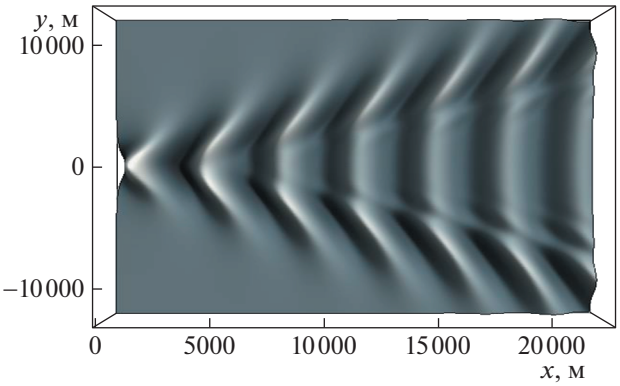


**Рис. 1.** Волновая картина первой моды.

подводную возвышенность. Профиль дна описывается функцией $z = -H + h(x, y)$, $h(x, y) \ll H$. Сдвиговое течение вдоль оси $Ox$ – одномерное и линейное: $U(z) = a + bz$, $a = U(0) > 0$, $b = (U(0) - U(-H))/H > 0$. Тогда в линейном приближении и приближении Буссинеска вертикальная компонента скорости $W$ удовлетворяет уравнению [2–4, 6]

$$U^2(z)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\Delta + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)W + N^2(z)\Delta W = 0$$
$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad N^2(z) = -\frac{g}{\rho_0(z)}\frac{d\rho_0(z)}{dz} \tag{1}$$

где $N^2(z)$ – квадрат частоты Брента-Вяйсяля (частоты плавучести), которая далее предполагается постоянной, $g$ – ускорение свободного падения, $\rho_0(z)$ – невозмущенная плотность. Также выполнено условие устойчивости Майлса-Ховарда для числа Ричардсона [7, 11, 14, 19]: $\mathrm{Ri} = N^2\left(\frac{dU}{dz}\right)^{-2} > 1/4$. Граничное условие на поверхности: $W = 0$ при $z = 0$. Линеаризованное граничное условие на дне [1, 2]: $W = U(-H)\frac{\partial h(x, y)}{\partial x}$ при $z = -H$. Решение для функции $W$ имеет вид суммы мод

$$W = \sum_{n=1}^{\infty} W_n,$$

$$W_n = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} A(\mu, \nu)B_n \cos(\mu x)\cos(\nu y)d\nu$$
$$B_n = \varphi_n(z, \mu, \nu)/\frac{\partial\varphi_n(z, \mu, \nu)}{\partial\mu}, \tag{2}$$
$$A(\mu, \nu) = \mu U(-H)S(\mu, \nu)$$
$$S(\mu, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(x, y)\exp(i(x + \nu y))dxdy$$

где $\mu = \mu_n(\nu)$, $\varphi_n(z, \mu_n(\nu), \nu)$ – собственные числа и собственные функции вертикальной спектральной задачи

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \left(\mu^2 + \nu^2\right)\left(1 - (\mu U(z))^2\right)\varphi = 0$$
$$\varphi = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, -H \tag{3}$$

Собственные функции задачи (2) выражаются через модифицированные функции Бесселя мнимого индекса $I + i\lambda$: $\varphi_n(z, \mu_n(\nu), \nu) = -\mathrm{Im}(f_+(z, \mu_n(\nu), \nu)f_-(0, \mu_n(\nu), \nu))$, $f_\pm(z, \mu_n(\nu), \nu) = \sqrt{2\alpha\mu_n(\nu)U(z)}I \pm i\lambda(\alpha\mu_n(\nu)U(z))$, $\lambda = \sqrt{\alpha^2 - 1/4}$, $\alpha = \sqrt{\nu^2 + \mu_n^2(\nu)}/b\mu_n(\nu)$ [2–4, 6]. Асимптотический анализ интегралов (1) может быть проведен с помощью метода стационарной фазы (неравномерная асимптотика) или метода эталонных интегралов (равномерная асимптотика). Равномерная асимптотика интегралов (1) выражается через функцию Эйри и ее производную [1, 2].

Для численных расчетов использовались следующие параметры, значения которых характерны для условий реального океана [5, 10, 12, 16–18]: $N = 0.001$ с$^{-1}$, $H = 1000$ м, $U(0) = 0.43$ м/с, $U(-H) = 0.16$, $\mathrm{Ri} = 13.7$, профиль подводного препятствия описывается гладкой функцией $h(x, y) = h_0\exp\left(-\beta x^2 - \gamma y^2\right)$, $h_0 = 50$ м, $\beta = 3.5\times10^{-6}$ м$^{-2}$, $\gamma = 9.9\times10^{-7}$ м$^{-2}$, значение $z = -318$ м. Выбор величин параметров $\beta$, $\gamma$ означает, что полуоси эллипса, который получается сечением подводного препятствия плоскостью $z = -H + 0.5h_0$, равны 448 м (вдоль набегающего потока) и 838 м (поперек потока). На рис. 1–3 приведены результаты расчетов функций $W_n$, $n = 1, 2, 3$, которые описывают волновые картины первых трех мод в горизонтальной плоскости. Численные результаты показывают, что на фазовую структуру волнового поля вниз по потоку влияют не только параметры фонового сдвигового течения, но также геометрия обтекаемого препятствия, степень его пространственной асимметрии и угол набегания стратифицированного потока.

Таким образом, в предположении постоянства частоты плавучести и модельного линейного распределения сдвигового течения можно построить аналитическое решение, описывающее генерации полей ВГВ, возбуждаемых при обтекании стратифицированного потока с фоновым сдвиговым течением одиночной подводной возвышенности. Интегральные представления решения выражаются через модифицированные функции Бесселя мнимого индекса. Численно исследованы основные дисперсионные соотношения, и получено, что только у первой моды значение в нуле положительно ($\mu_1(0) > 0$), остальные моды $\mu_n(0) =$

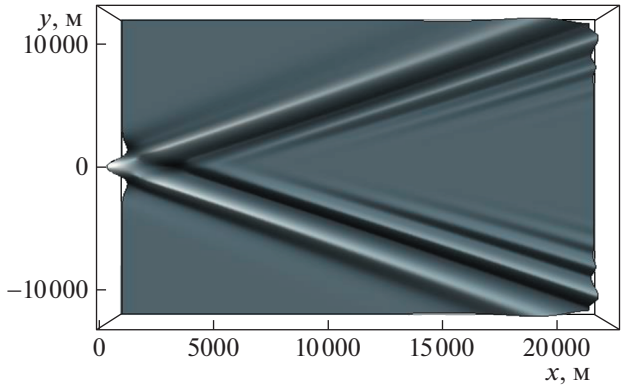


**Рис. 2.** Волновая картина второй моды.

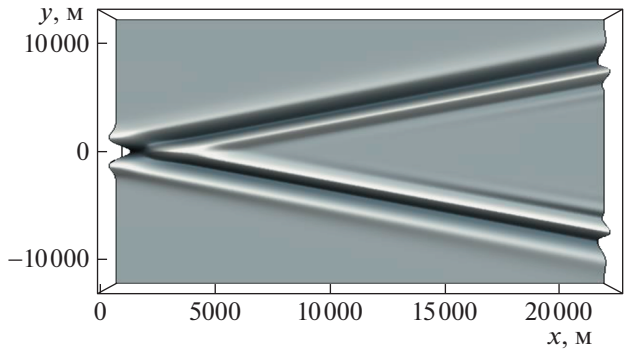


**Рис. 3.** Волновая картина третьей моды.

$= 0$, $n > 1$. Максимальные значения групповой скорости первых трех мод равны: 0.32, 0.15, 0.11 м/с. Максимальная групповая скорость первой моды находится внутри диапазона скоростей сдвигового течения, максимальные групповые скорости других мод меньше минимальной скорости сдвигового течения. Поэтому полученные результаты можно интерпретировать следующим образом: сдвиговый поток является докритическим для первой моды (его скорость меньше максимальной групповой скорости волны первой моды) и сверхкритическим для других мод (максимальная групповая скорость которых меньше скорости потока) [1, 2, 8, 15]. Это означает, в частности, что волновая система первой моды (с наибольшим углом полураствора) состоит как из продольных (клиновидных), так и поперечных (кольцевых) волн (рис. 1). Остальные моды (с меньшими углами полураствора) представляют собой только продольные (клиновидные) волны (рис. 2, 3) [2–4, 6]. Основные параметры течения, форма обтекаемого подводного препятствия, а также угол набегания сдвигового течения могут являться причиной заметной пространственной трансформации возбуждаемых вниз по потоку волновых полей.

Полученные результаты дают возможность эффективно рассчитывать амплитудно-фазовую структуру волновых полей, а также исследовать различные режимы волновой генерации для модельных представлений частоты плавучести и сдвиговых течений, в том числе возбуждение ВГВ при набегании фонового сдвигового течения на возвышение океанического дна сложной геометрии. Поскольку наиболее сильным генератором внутренних волн в океане является набегание приливных течений на подводный склон, то такой механизм представляется наиболее вероятным источником интенсивных внутренних волн. Генерация внутренних волн приливным течением приводит в дальнейшем к возбуждению ВГВ более высокой частоты в арктических условиях в зависимости от разных условий среднего состояния океана [18].

## ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена по темам государственного задания: В.В. Булатов (№ АААА-А20-120011690131-7), И.Ю. Владимиров, Е.Г. Морозов (№ FMWE-2021-0002) и частичной финансовой поддержке РФФИ проект № 20-01-00111А. Данные измерений получены в рейсах судов ИО РАН при поддержке гранта РНФ № 21-77-20004.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Булатов В.В., Владимиров Ю.В.* Волны в стратифицированных средах. М.: Наука, 2015. 735 с.
2. *Булатов В.В.* Новые задачи математического моделирования волновой динамики стратифицированных сред. М.: Издательство “ОнтоПринт”. 2021. 277 с.
3. *Булатов В.В., Владимиров Ю.В., Владимиров И.Ю.* Внутренние гравитационные волны от осциллирующего источника возмущений в океане // Изв. РАН. ФАО. 2021. Т. 57. № 3. С. 362–373.
4. *Булатов В.В., Владимиров И.Ю.* Амплитудно-фазовая структура полей внутренних гравитационных волн в океане со сдвиговыми течениями // Изв. РАН. ФАО. 2022. Т. 58. № 2. С. 233–235.
5. *Морозов Е.Г., Спиридонов В.А., Молодцова Т.Н., Фрей Д.И., Демидова Т.А., Флинт М.В.* Исследования экосистемы атлантического сектора Антарктики (79-й рейс научно-исследовательского судна “Академик Мстислав Келдыш”) // Океанология. 2020. Т. 60. № 5. С. 823–825.
6. *Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V.* Dynamics of Internal Gravity Waves in the Ocean with Shear Flows // Russ. J. Earth Sciences. 2020. V. 20. ES4004.
7. *Churilov S.* On the Stability Analysis of Sharply Stratified Shear Flows // Ocean Dynamics. 2018. V. 68. P. 867–884.
8. *Fabrikant A.L., Stepanyants Yu.A.* Propagation of Waves in Shear Flows. World Scientific Publishing, 1998. 304 p.

9. *Fraternale F., Domenicale L., Staffilan G., Tordella D.* Internal Waves in Sheared Flows: Lower Bound of the Vorticity Growth and Propagation Discontinuities in the Parameter Space // Phys. Rev. 2018. V 97. № 6. P. 063102.

10. *Frey D.I., Novigatsky A.N., Kravchishina M.D., Morozov E.G.* Water Structure and Currents in the Bear Island Trough in July-August 2017 // Russ. J. Earth Sciences. 2017. V. 17. ES3003.

11. *Hirota M., Morrison P.J.* Stability Boundaries and Sufficient Stability Conditions for Stably Stratified, Monotonic Shear Flows // Phys. Lett. A. 2016. V. 380 (21). P. 1856–1860.

12. *Khimchenko E.E., Frey D.I., Morozov E.G.* Tidal Internal Waves in the Bransfield Strait, Antarctica // Russ. J. Earth. Science. 2020. V. 20. ES2006.

13. *Meunier P., Dizus S., Redekopp L., Spedding G.* Internal Waves Generated by a Stratified Wake: Experiment and Theory // J. Fluid Mech. 2018. V. 846. P. 752–788.

14. *Miles J.W.* On the Stability of Heterogeneous Shear Flow // J. Fluid Mech. 1961. V. 10 (4). P. 495–509.

15. *Miropol'skii Yu.Z.* Dynamics of Internal Gravity Waves in the Ocean. *Shishkina O.V.* Ed. Kluwer Academic Publishers, Boston, 2001. 406 p.

16. *Morozov E.G.* Oceanic Internal Tides. Observations, Analysis and Modeling. Berlin: Springer, 2018. 317 p.

17. *Morozov E.G., Tarakanov R.Yu., Frey D.I., Demidova T.A., Makarenko N.I.* Bottom Water Flows in the Tropical Fractures of the Northern Mid-Atlantic Ridge // J. Oceanography. 2018. V. 74 (2). P. 147–167.

18. *Morozov E.G., Pisarev S.V.* Internal Tides at the Arctic Latitudes (Numerical Experiments) // Oceanology. 2002. V. 42. № 2. P. 153–161.

19. *Slepyshev A.A., Vorotnikov D.I.* Generation of Vertical Fine Structure by Internal Waves in a Shear Flows // Open J. Fluid Mechanics. 2019. V. 9. P. 140–157.

20. *Young W.R., Phines P., Garrett C.J.R.* Shear Flows Dispersion, Internal Waves and Horizontal Mixing // J. Phys. Oceanography. 1982. V. 12 (6). P. 515–527.

# INTERNAL GRAVITY WAVES IN THE OCEAN WITH SHEAR FLOWS AROUND AN UNDERWATER OBSTACLES

**V. V. Bulatov[a,#], I. Yu. Vladimirov[b,##], and E. G. Morozov[b,###]**

[a] *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

[b] *Shirshov Institute of Oceanology, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

[#] *E-mail: internalwave@mail.ru*

[##] *E-mail: iyuvladimirov@rambler.ru*

[###] *E-mail: egmorozov@mail.ru*

Presented by Academician of the RAS M.V. Flint April 18, 2022

The problem of generating internal gravity waves when a stratified flow with a shear flow runs into a single underwater obstacle is considered. It is assumed that the buoyancy frequency is constant and the shear flow is linear and one-dimensional. Integral representations of the solution are constructed under the Miles-Howard stability condition. The solutions of the boundary spectral problems are analytically constructed, which are expressed in terms of the Bessel functions of the imaginary index. The results of numerical calculations of dispersion curves and phase patterns of generated wave fields are presented. The transformation of the phase patterns of the internal gravity waves fields depending on the generation parameters is studied numerically.

*Keywords:* stratified medium, internal gravity waves, buoyancy frequency, shear flows, spectral problem, dispersion dependences, phase patterns