

УДК 550.8, 523.43

АПРОБАЦИЯ КОМБИНИРОВАННОЙ МЕТОДИКИ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ГРАВИМЕТРИИ ПО КОМПЛЕКСУ ДАННЫХ ТОПОГРАФИИ, ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ И ТОЛЩИНЫ КОРЫ ПЛАНЕТЫ С ПОМОЩЬЮ АЛГОРИТМА ВЫМЕТЕНИЯ МАСС

© 2023 г. А. М. Сальников^{1,2,*}, И. Э. Степанова^{1,**}, Т. В. Гудкова^{1,***},
А. В. Батов^{1,2,****}, А. В. Щепетилов³

Представлено академиком РАН А.О. Глико 9.02.2023 г.

Поступило 10.02.2023 г.

После доработки 12.02.2023 г.

Принято к публикации 17.02.2023 г.

В работе протестирована новая комбинированная методика решения нелинейных обратных задач гравиметрии на данных трех типов: о гравитационном поле, топографии и толщине коры в районе равнины Элизий на Марсе.

Ключевые слова: метод регуляризации, магнитное поле, топография, Марс

DOI: 10.31857/S2686739723600303, EDN: UKQGXH

Проблема решения прямых и обратных задач гравиметрии остается актуальной на протяжении десятилетий. В последнее время стремительный рост компьютерных мощностей позволил исследователям не только ответить на ряд казавшихся ранее весьма сложными вопросов в области математической геофизики, но и обусловил появление принципиально новых постановок [1].

Самым “непреодолимым” препятствием, если можно так выразиться, на пути к нахождению решения нелинейных обратных задач гравиметрии является существование несчетного множества эквивалентных по внешнему полю распределений масс. Безусловно, в наше время имеет смысл рассматривать только трехмерные распределения неизвестных источников физических полей, и классы функций, к которым должны принадлежать эти источники, следует выбирать, опираясь на априорную информацию о носителях.

При решении обратных задач гравиметрии обычной практикой является многократное решение прямых задач. При этом классы функций, которым, по предположению, принадлежат искомые распределения масс, должны быть описаны заранее. Как правило, трехмерные источники физических полей задаются в виде некоторых пробных конфигураций. Такого рода методы и подходы к решению чрезвычайно сложных некорректных задач гравиметрии существенно ограничивают общность и требуют проведения огромного числа вычислений, всегда сопровождающихся привнесением случайных и систематических ошибок в результат. Весьма конструктивный подход к решению обратных нелинейных задач гравиметрии предложил болгарский математик Д. Зидаров [2] на основе эквивалентных перераспределений источников поля.

Далее этот подход был развит в работах В.Н. Страхова и его учеников [1, 3] и значительно усовершенствован как в теоретическом, так и практическом плане Ю.В. Гласко [4].

На Марсе в 2018–2022 гг. был успешно проведен сейсмический эксперимент (Seismic Experiment for Interior Structure) (SEIS) миссии NASA Interior Exploration using Seismic Investigations, Geodesy and Heat Transport (InSight) (Исследование внутреннего строения, используя сейсмические исследования, данные геодезии и измерения теплового потока), данные которого позволяют уточнить структуру коры Марса [5]. В результате обработки сейсмических данных [6], в районе

¹Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта
Российской академии наук, Москва, Россия

²Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова
Российской академии наук, Москва, Россия

³Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова, физический факультет,
Москва, Россия

*E-mail: salnikov@ipu.ru

**E-mail: tet@ifz.ru

***E-mail: gudkova@ifz.ru

****E-mail: batov@ipu.ru

установки станции, получено значение толщины коры Марса (39 ± 8 км), которое можно использовать как реперную точку при построении глобальных и региональных моделей коры планеты. Опираясь на знание толщины коры Марса в месте установки сейсмометра миссии InSight в юго-западной части равнины Элизий, в работе [7] было проведено моделирование трехмерной толщины коры Марса, основанное на данных топографии и гравитационного поля, методом чисел Лява, который позволяет учитывать глобальную деформацию недр планеты. Полученные в работе [7] модельные оценки региональной толщины коры Марса хорошо коррелируют с глобальной моделью коры [8]. Региональная структура коры Мар-

са в районе равнины Элизий изучалась в работах [9, 10].

В данной работе модель коры из работы [7] принимается за базовую. Толщина коры под станцией InSight принята равной 36 км. Для решения поставленной задачи используется разложение по сферическим гармоникам данных топографии и гравитационного поля Марса до 90-й степени и порядка. Данные гравитационного поля и топографии Марса, представленные в виде разложения гравитационного потенциала и высот рельефа относительно центра масс по нормализованным сферическим функциям, можно найти на сайте Системы Планетных данных (<http://pds-geosciences.wustl.edu>):

$$V(r, \varphi, \lambda) = \frac{GM}{r} \left(1 + \sum_{n=2}^{ng} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R_e}{r} \right)^n (C_{gnm} \cos m\lambda + S_{gnm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi) \right), \quad (1)$$

$$R_{\text{рельеф}}(r, \varphi, \lambda) = R_0 + \sum_{n=1}^{nt} \sum_{m=0}^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi), \quad (2)$$

где $V(r, \varphi, \lambda)$ – гравитационный потенциал, r – расстояние от точки наблюдения до начала координат, φ и λ – ареоцентрические широта и долгота, M – масса планеты, G – гравитационная постоянная, R_e – экваториальный радиус (нормирующий радиус), R_0 – средний радиус планеты, C_{gnm} и S_{gnm} – нормализованные гравитационные моменты, C_{nm} и S_{nm} – гармонические коэффициенты в разложении рельефа (в метрах), ng и nt – степени гармоник, до которых проведено разложение гравитационного поля и топографии по сферическим функциям соответственно; P_{nm} – нормализованные функции Лежандра степени n и азимутально-го числа m , удовлетворяющие соотношению

$$\int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 P_{nm}^2(\sin \varphi) \begin{cases} \cos^2(m\lambda) \\ \sin^2(m\lambda) \end{cases} d(\sin \varphi) d\lambda = 4\pi. \quad (3)$$

Разложение гравитационного потенциала и топографии Марса известно до 120-й [11] и до 1152-й степени и порядка [12] соответственно. В этой работе мы будем использовать модель MRO120D [11] и данные топографии до 90-й степени и порядка ($ng = nt = 90$) в формулах (1) и (2).

В данной работе пробное объемное распределение масс в коре восстанавливается по данным о гравитационном поле, топографии и функции, описывающей толщину коры, – для всех этих сигналов строится модифицированная S-аппроксимация. Метод S-аппроксимаций [3] успешно применялся при решении задач земной гравиметрии интерпретационного характера, при этом полученные результаты контролировались по сей-

смическим данным и данным гравитационного поля. Пробное распределение масс выметается по Д. Зидарову на границу некоторых областей, и результаты выметания сравниваются с плотностями распределения эквивалентных источников, полученных в результате модифицированных S-аппроксимаций.

МЕТОД

Наша методика решения нелинейных обратных задач гравиметрии основывается на предположении о том, что рельеф планеты и криволинейная граница кора–мантия являются причиной различий между реальными измеренными значениями гравитационного поля и значениями, “диктуемыми” равновесной моделью планеты в условиях гипотезы изостазии. Таким образом, мы можем найти источники некоего “аномального” гравитационного поля, по аналогии с земным. Средние плотности коры и мантии Марса считаются известными. Кора в нашей модели – это:

а) слой бесконечного простираения в трехмерном пространстве с криволинейными границами, верхней границей коры является рельеф, а нижней – переход кора–мантия;

б) криволинейный шаровой слой с криволинейными границами.

При таком рассмотрении плотность породы внутри слоя постоянна.

Вариант а) реализуется, если мы представим себе планету как нижнее полупространство; а вариант б) – в том случае, когда планета рассматри-

ваются как эллипсоид вращения или шар некоторого заданного среднего радиуса.

В качестве входных данных выступают изменения гравитационного поля, полученные в локальном или глобальном масштабе, а также значения гравитационного поля, вычисленные по модели MRO120D [11].

Наш метод опирается на априорную информацию о поле: на коэффициенты разложения гравитационного поля по сферическим функциям и на данные о предполагаемых глубинах залегания источников гравитационного поля. Информация такого рода является основой для построения аппроксимации гравитационного поля, которая может уточняться впоследствии. Источники поля — это точечные источники, координаты которых согласованы с местоположением выбранных расчетных точек.

Априорная информация о толщине коры считается известной, равно как и топографические данные. Таким образом, начальное распределение источников “аномального” гравитационного поля Марса нам известно. Еще раз подчеркнем, что простейшая модель коры — это некий однородный по плотности слой в пространстве (так называемое “пробное распределение масс”). Пробные гравитирующие массы мы можем “выметать” по Зидарову на две плоскости (в локальном варианте) либо на границу шарового слоя, охватывающего указанное распределение. При этом перемещать массы можно как на носитель (плоскость или сферу), лежащую внутри коры, так и на внешнюю по отношению к коре поверхность — все зависит от качества исходных данных, рельефа и других факторов. Полученное в результате выметания на поверхность распределение эквивалентных по внешнему гравитационному полю масс мы сравниваем с распределением, найденным из решения условно-вариационной задачи [13].

Аппроксимация компонент гравитационного поля и функций, описывающих топографию и толщину коры Марса, находится с помощью регионального варианта метода линейных интегральных представлений [13], который основан на идеализированном представлении планеты в виде шара радиуса R_0 . Реальная планета трактуется как область, расположенная внутри указанного выше шара и имеющая кусочно-непрерывную границу, незначительно отличающуюся от сферы радиуса R_0 . Предполагается, что на поверхности сферы заданы приближенные значения функции $V(x)$, гармонической вне этой сферы, на произвольном множестве $x^{(i)}$, $i = \overline{1, N}$:

$$f_{i,\delta} = f_i + \delta f_i,$$

$$f_i = V(x^{(i)}), \quad (4)$$

$$i = \overline{1, N}.$$

Поскольку функция $V(x)$ гармонична при $r > R_0$, имеет место следующее интегральное представление:

$$V(x) = \frac{R_0^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sigma(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi}{R_{\xi-x}} +$$

$$+ \frac{R_0^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{w(\vartheta, \varphi) (R_0 - r \cos \vartheta') \sin \vartheta d\vartheta d\varphi}{R_{\xi-x}^2}, \quad (5)$$

$$R_{\xi-x} = \sqrt{R_0^2 - 2R_0 r \cos \vartheta' + r^2},$$

$$\xi = R_0 (\cos \tilde{\varphi} \sin \tilde{\vartheta}, \sin \tilde{\varphi} \sin \tilde{\vartheta}, \cos \tilde{\vartheta}),$$

$$x = r (\cos \varphi \sin \vartheta, \sin \varphi \sin \vartheta, \cos \vartheta),$$

$$\cos \vartheta' = \sin \vartheta \sin \tilde{\vartheta} \cos(\varphi - \tilde{\varphi}) + \cos \vartheta \cos \tilde{\vartheta}.$$

Функция $\sigma(\vartheta, \varphi)$ в (5) называется плотностью простого слоя, распределенного на поверхности сферы радиуса R_0 , а функция $w(\vartheta, \varphi)$ — плотностью двойного слоя на той же поверхности. Через $R_{\xi-x}$ обозначено расстояние между переменной точкой ξ на сфере и точкой наблюдения x .

Для определения функций σ и w [14] ставится условно-вариационная задача с дополнительным, по сравнению с описанным в [13], функционалом качества решения. Искомые функции будут иметь вид

$$\sigma(\hat{\xi}) = \sum_{i=1}^N \lambda_i Q_i^{(1)}(\xi), \quad w(\hat{\xi}) = \sum_{i=1}^N \lambda_i Q_i^{(2)}(\xi),$$

$$\hat{\xi} = (\tilde{\vartheta}, \tilde{\varphi}), \quad \xi = (R_0, \tilde{\vartheta}, \tilde{\varphi}), \quad (6)$$

$$Q_i^{(1)}(\xi) = \frac{1}{R_{\xi-x^{(i)}}}, \quad Q_i^{(2)}(\xi) = \frac{R_0 - r_i \cos \vartheta'_i}{R_{\xi-x^{(i)}}^3}.$$

Для определения компонент вектора λ_i необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений

$$A\lambda = f_\delta = f + \delta f, \quad (7)$$

где, вообще говоря, под A понимается прямоугольная $M \times N$ матрица с действительными элементами a_{ij} , $i = \overline{1, M}$, $j = \overline{1, N}$, λ — это вектор, подлежащий определению; f — M -вектор описывающий полезный сигнал, символ f_δ означает, что поле содержит помеху, δf характеризует M -вектор случайного шума.

Основная вычислительная проблема заключается в нахождении устойчивых приближенных решений системы (7). Необходимо построение

регуляризирующих алгоритмов. Мы разработали ряд методик построения аппроксимаций потенциальных полей Земли и ее топографии [15] в рамках структурно-параметрического подхода, когда система (7) является недоопределенной, а число данных очень велико (десятки и сотни тысяч неизвестных).

В случае симметрической положительно полуопределенной матрицы $A = A^T > 0$ ее элементы имеют вид

$$\begin{aligned}
 a_{ij} &= a_{ji} = \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (Q_i^{(1)}(\xi) Q_j^{(1)}(\xi) + Q_i^{(2)}(\xi) Q_j^{(2)}(\xi)) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \\
 &= \frac{2\pi}{r_i r_j \sqrt{h_i h_j}} \left(1 + \frac{1}{4r_i r_j h_i h_j} \right) \times \\
 &\times F \left(2 \tan^{-1}(\sqrt{h_i h_j}), \sqrt{\frac{1 + \cos(\alpha_{ij})}{2}} \right) - \\
 &- \frac{\pi (3h_i^2 h_j^2 - 4h_i h_j \cos(\alpha_{ij}) + 1)}{r_i^2 r_j^2 h_i h_j \left(\sqrt{1 - 2h_i h_j \cos(\alpha_{ij}) + h_i^2 h_j^2} \right)^3}.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь $h_i = R_0/r_i$, $i = \overline{1, N}$, $h_j = R_0/r_j$, $j = \overline{1, N}$, α_{ij} – угол между векторами x_i и x_j . Функция $F(\varphi, k)$ – это эллиптический интеграл первого рода [13].

После построения аппроксимации нормальной компоненты гравитационного поля из решения системы (7)–(8) осуществлялся переход ко второму этапу новой методики решения нелинейных обратных задач: функции, определенные в (6), сравнивались с “выметанными” на границу шарового слоя (или слоев) массами. Если относительная погрешность не превышала нескольких процентов, то задача по определению объемных носителей в коре считалась решенной с достаточной степенью точности. Выметание выполнялось на границу области, представляющую собой шаровой слой различной толщины. Поскольку гравитационное поле задавалось на рельефе, то для обеспечения корректности процедуры выметания необходимо было сначала построить аналитическую модель гравитационного поля с помощью модифицированных S-аппроксимаций, с тем чтобы определить значения гравитационного поля на некотором удалении от поверхности планеты (на расстоянии порядка 1–2 км). После того как было построено аналитическое продолжение гравитационного поля, мы задавали положение верхней границы области выметания: она располагалась выше рельефа на расстоянии от 500 м до 1 км, но ниже области аналитического продолжения. Была выполнена серия математических экс-

периментов при различных положениях верхней и нижней границ области, в которых находились предполагаемые объемные источники гравитационного поля. Средняя плотность коры считалась постоянной и равной 2900 кг/м³.

Необходимо отметить следующее. Если нам известно распределение масс на сфере $\sigma(\vartheta, \varphi)$, то оно создает во внешнем по отношению к сфере пространстве такое же гравитационное поле, как и точечные источники, определяемые из системы уравнений:

$$\begin{aligned}
 \phi\sigma(\vartheta, \varphi) &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2\pi} \frac{m_i (\xi - r_i \cos \xi') / R}{R_{\xi-x_i}^3}, \\
 \xi &= (\vartheta, \varphi), \quad x_i = (r_i, \vartheta_i, \varphi), \\
 \cos \vartheta' &= \cos \vartheta \cos \vartheta_i + \sin \vartheta \sin \vartheta_i \cos(\varphi - \varphi_i).
 \end{aligned} \tag{9}$$

В формуле (9) через m_i обозначена точечная масса, характеризующаяся радиус-вектором x_i .

Соотношение (9) является определяющим при сравнении результатов выметания масс на некоторую внешнюю по отношению к источникам гравитационного поля поверхность и распределениями масс на той же поверхности, найденными с помощью метода модифицированных S-аппроксимаций. При этом считается, что точечные массы в (9) соответствуют пробному непрерывному объемному распределению источников:

$$m_i = \rho_i dv, \quad \rho_i \equiv \rho(x_i), \text{ где } dv \text{ – элемент объема.}$$

РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрено несколько модельных примеров. Аномальное поле аппроксимировалось суммой простого и двойного слоев, распределенных на нескольких сферах (от 2 до 15). Первоначально глубина залегания сфер варьировалась нами в пределах от 500 м до 35 км ниже минимальной отметки рельефа в рассматриваемом регионе. Число точек, по которым строились аппроксимации гравитационного поля, топографии и толщины коры в данной точке, было равно 1148. При решении системы (7) с помощью усовершенствованного метода блочного контрастирования наивысшая точность аппроксимации гравитационного поля, топографии и функции, описывающей толщину коры Марса на поверхности планеты, составила $\Delta = \frac{Ax - f_{\delta E}}{f_{\delta E}} = 10^{-9}$. На практике можно строить аналитические аппроксимации сигналов с меньшей точностью, однако, при решении нелинейных обратных задач геофизики более высокая точность является некоторой гарантией того, что будет найдено оптимальное (не обязательно единственное!) с учетом имеющейся априорной информации распределение масс.

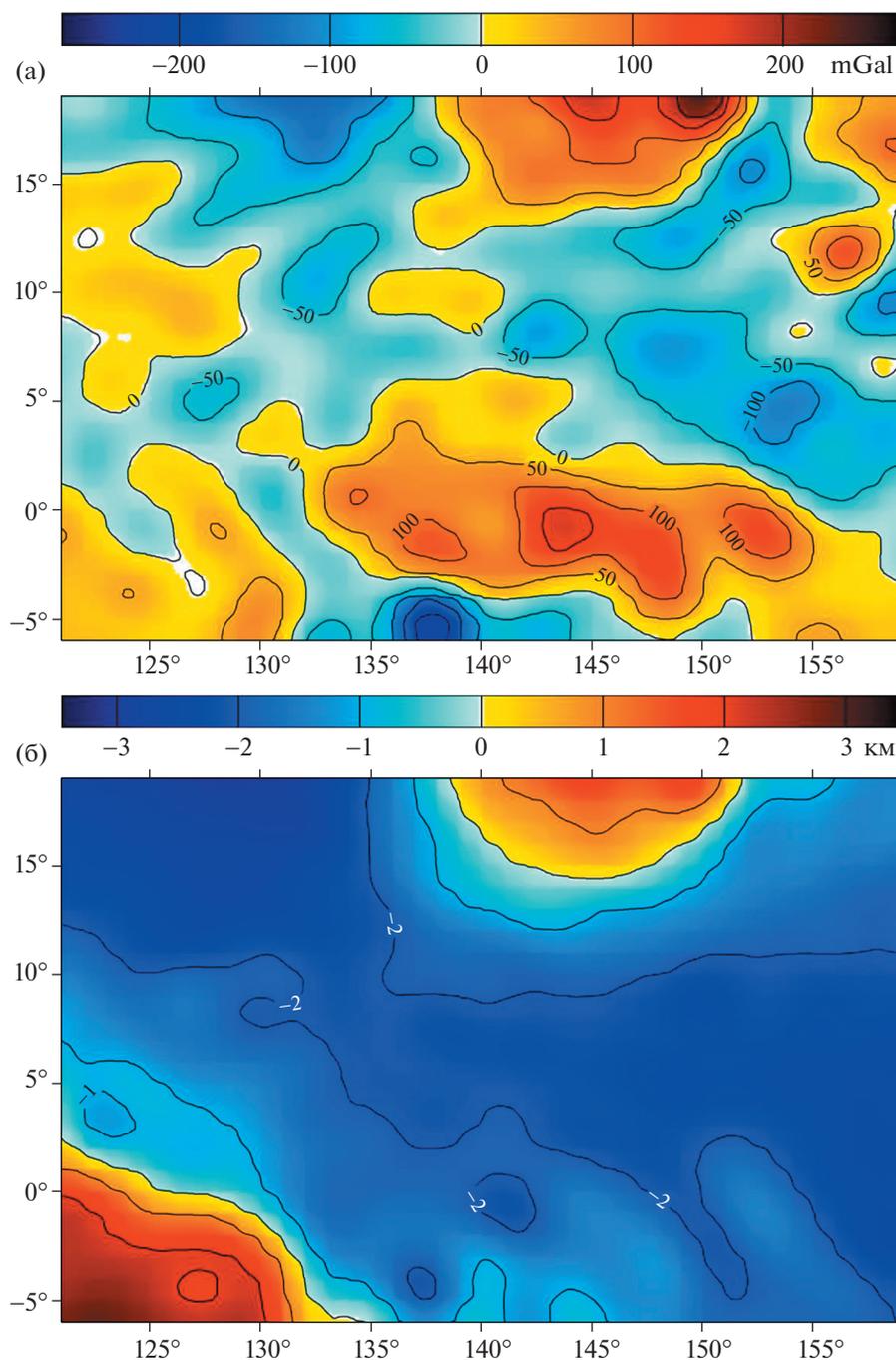


Рис. 1. (а) Гравитационное поле Марса, модель MRO120D [11], разложение по сферическим гармоникам до 90 порядка включительно. (б) Топография Марса [12], модель разложения по сферическим гармоникам до 90 порядка включительно. (в) Толщина коры Марса [7].

Мы рассмотрели участок 20° ю.ш. – 20° с.ш., 120° в.д. – 180° в.д. в юго-западной части равнины Элизий, в районе посадки миссии InSight (4.5024° с.ш., 135.6234° в.д.). Исходные значения взяты из глобальной модели гравитационного поля Марса [11], представляющей собой разложение по сферическим гармоникам до 90 порядка включительно, что соответствует пространствен-

ному разрешению на поверхности ~ 160 км. Нормальная производная гравитационного потенциала была вычислена нами в 1148 точках с пространственным разрешением в 1° . В качестве внешней поверхности Марса рассматривалась сфера радиусом 3393.5 км.

Выбранные для демонстрации в настоящей работе эквивалентные по внешнему гравитацион-

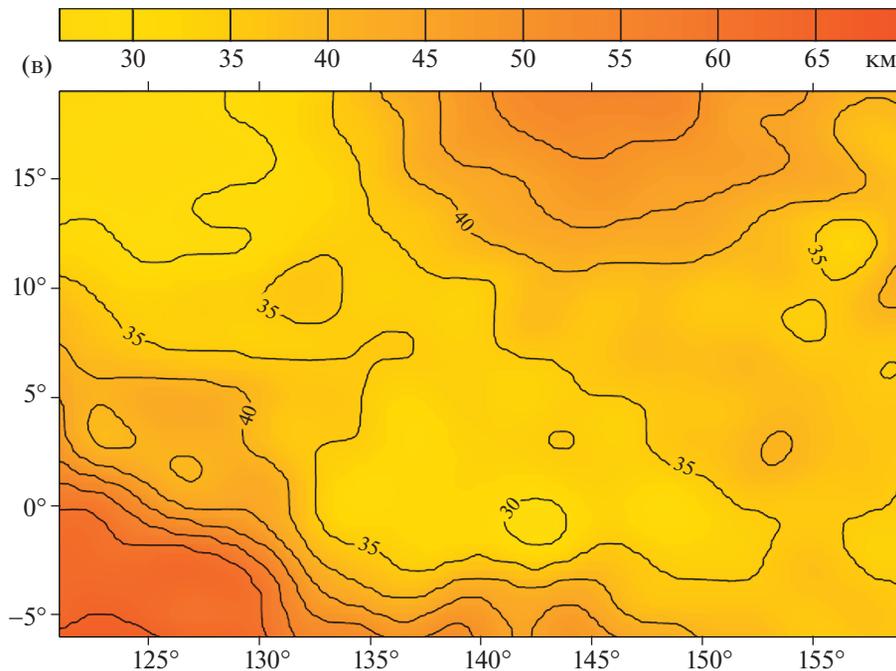


Рис. 1. Окончание

ному полю носители масс распределены на нескольких концентрических сферах, залегающих на глубинах от 1 км до 35 км ниже дневной поверхности, что соответствует предполагаемым границам марсианской коры [7]. В результате решения обратной задачи методом модифицированных S -аппроксимаций были получены гравитационное поле, топография и функция, описывающая границу “кора–мантия”.

На рис. 1 а–в приводятся карты изолиний соответственно гравитационного поля, топографии и средней толщины коры в исследуемом регионе. На рис. 2 а–б показаны относительные плотности эквивалентных по внешнему полю источников масс для гравитационного поля, топографии при различных расположениях носителей (сфер). Видно, что геометрические свойства распределения источников для гравитационного поля и топографии аналогичны, если выполнить сравнительный анализ на качественном уровне. Причина такой аналогии понятна: модели коры, топографии и гравитационного поля согласованы друг с другом. Значения относительных плотностей источников находятся в разумных, если можно так выразиться, пределах: на рисунках не наблюдается чересчур резких переходов от отрицательных к положительным величинам плотностей, что важно при построении метрологических аппроксимаций элементов полей, когда количественная информация об источниках поля отсутствует полностью.

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Поставленный авторами статьи математический эксперимент показал применимость модифицированных S -аппроксимаций в региональном варианте (когда учитывается сферичность планеты и появляется возможность изучения элементов потенциальных полей на значительных расстояниях от поверхности).

Пробное объемное распределение масс в коре было “выметано” на две сферы: радиус внешней сферы на 0.5–1 км превышал максимальную отметку рельефа, а радиус внутренней – был меньше минимального значения z -координаты границы “кора–мантия” на такую же величину. Напомним, что априорная информация о толщине коры в соответствии с моделью [7] нам известна. Гравитационное поле было рассчитано нами на рельефе (т.е. поверхности Марса), а также аналитически продолжено вверх на несколько уровней с помощью решения обратной задачи методом модифицированных S -аппроксимаций. В частности, на высоту, превышающую максимальную отметку рельефа на 0.5 и 1 км. Мы сравнивали по точечно значения плотности эквивалентных источников, полученной с помощью метода S -аппроксимаций, и плотности “выметанных” на соответствующую поверхность масс. Наилучший результат был достигнут при расположении внутренней сферы на расстоянии 30–34 км от поверхности Марса, если рассматривать Марс как сферу среднего радиуса 3393.5 км, и внешней сферы – расстоянии 3–4 км от максимальной топографи-

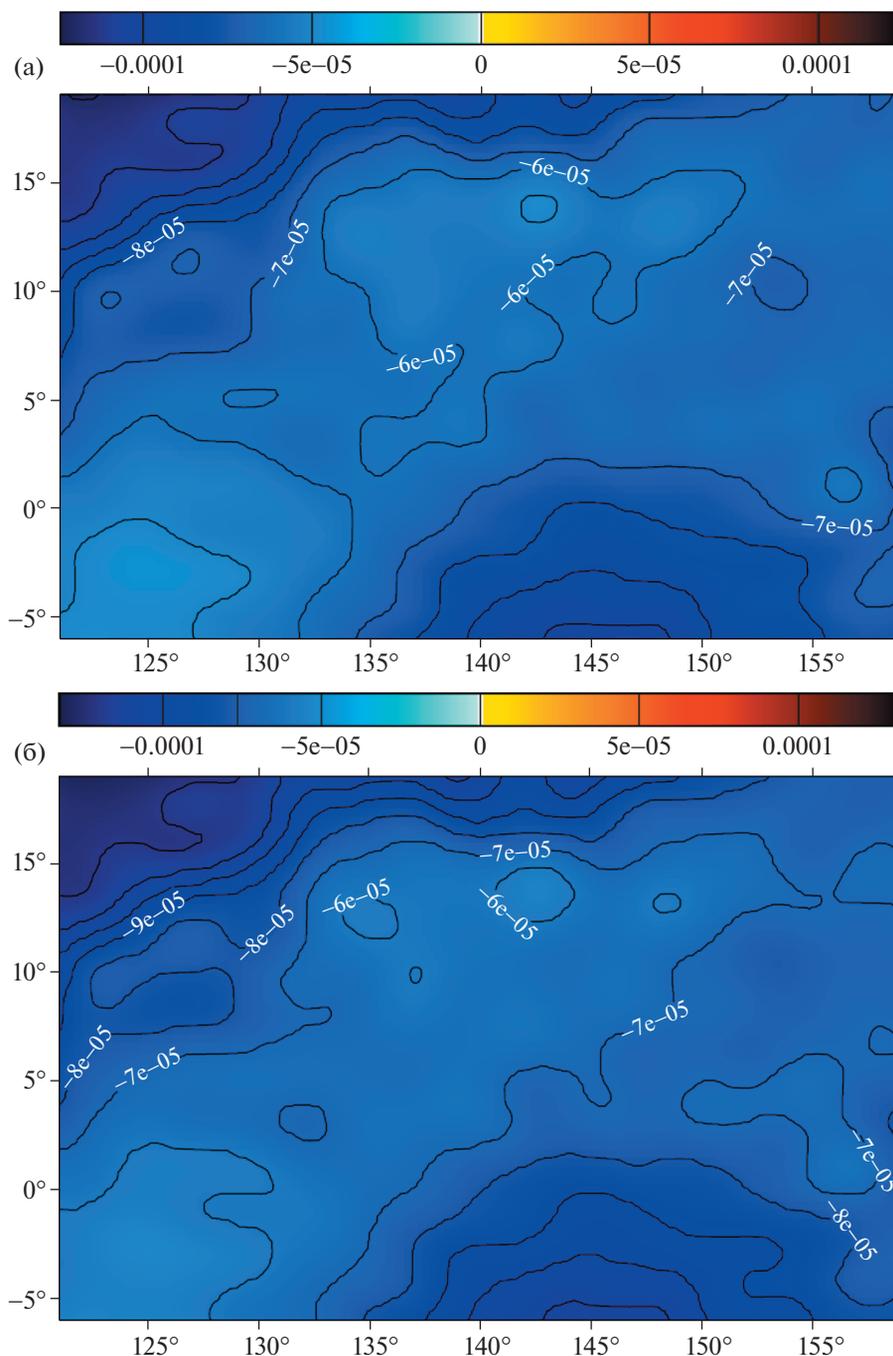


Рис. 2. (а) Относительное распределение плотностей эквивалентных источников для гравитационного поля, $h = -4$ км. (б) Относительное распределение плотностей эквивалентных источников для функции, описывающей топографию, $h = -0.34$ км.

ческой отметки. Наиболее равномерное распределение эквивалентных источников по глубине достигалось при выборе $n = 15$ сфер, на которых были сосредоточены массы. В этом случае показатель качества аппроксимации гравитационного поля, топографии и функции, описывающей границу “кора–мантия”, также был наилучшим:

$$\Delta = \frac{Ax - f_{\delta E}}{f_{\delta E}} = 10^{-9}. \text{ Целью данного исследования}$$

была апробация метода решения обратных нелинейных задач гравиметрии без многократного решения прямых, и она показала свою эффективность на модельных данных о гравитационном поле, топографии и функции, описывающей толщину коры. Пробное распределение объемных масс в коре Марса находится с относительной точностью 7–10%, при условии, что используются конечномерные аппроксимации функций, описывающих свойства источников. Расхождение

с результатами работы [9] показывает необходимость учета дополнительной информации о среде: геологических данных и данных сейсмологии.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Часть работ (выбор базовой модели коры Марса, регуляризирующие алгоритмы) выполнена по гос. заданию ИФЗ РАН. Часть работ (построение модифицированных аппроксимаций коры, топографии и гравитационного поля с учетом параметров, определенных при исследованиях магнитного поля) выполнена за счет гранта Российского научного фонда № 23-41-00002 и, <https://rscf.ru/project/23-41-00002/>. Часть работ (подготовка данных для расчетов) выполнена за счет гранта Российского научного фонда № 23-27-00392, <https://rscf.ru/project/23-27-00392/>.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Страхов В.Н., Керимов И.А., Степанова И.Э.* Разработка теории и компьютерной технологии построения линейных аналитических аппроксимаций гравитационных и магнитных полей. М.: ИФЗ РАН. 2009. 254 с.
2. *Зидаров Д.* О решении некоторых обратных задач потенциальных полей и их применение к вопросам геофизики. София: изд-во Болгарской АН. 1968. 143 с.
3. *Степанова И.Э., Керимов И.А., Раевский Д.Н., Шепетиллов А.В.* Комбинированный метод F-, S- и R-аппроксимаций при решении задач геофизики и геоморфологии // *Физика Земли*. 2018. № 1. С. 96–113.
4. *Гласко Ю.В.* Одна задача эквивалентного перераспределения масс // *Физика Земли*. 2012. № 2. С. 88–93.
5. *Kim D., Banerdt W.B., Ceylan S., et al.* // *Surface waves and crustal structure on Mars* // *Science*. 2022. V. 378. Iss. 6618. P. 417–421.
6. *Knapmeyer-Endrun B., Panning M.P., Bissig F., et al.* Thickness and structure of the martian crust from InSight seismic data // *Science*. 2021. V. 373. P. 438–443.
7. *Батов А.В., Менщикова Т.И., Гудкова Т.В.* Модельные вариации плотности коры Марса и Венеры методом чисел Лява // *Астрономический Вестник*. 2023. (в печати).
8. *Wieczorek M.* Create crustal thickness maps of planets from gravity and topography (*ctplanet*). 2021. <https://doi.org/10.5281/zenodo.4439426>
9. *Гудкова Т.В., Степанова И.Э., Батов А.В.* Модельные оценки плотностей неоднородностей в приповерхностных слоях Марса в зоне установки сейсмометра миссии InSight // *Астрон. Вестник*. 2020. Т. 54. № 1. С. 18–23.
10. *Pan L., Quantin C., Tauzin B., et al.* Crust stratigraphy and heterogeneities of the first kilometers at the dichotomy boundary in western Elysium Planitia and implications for InSight lander // *Icarus*. 2020. V. 338. 113511.
11. *Konopliv A.S., Park R.S., Folkner W.M.* An improved JPL Mars gravity field and orientation from Mars orbiter and lander tracking data // *Icarus*. 2016. V. 274. P. 253–260.
12. *Smith D.E., Zuber M.T., Frey H.V., et al.* Mars Orbiter Laser Altimeter: Experimental summary after the first year of global mapping of Mars // *J. Geophys. Res.* 2001. V. 106 (E10). P. 23689–23722.
13. *Strakhov V.N., Stepanova I.E.* Solution of gravity problems by the S-approximation method (regional version) // *Izvestiya. Physics of the Solid Earth*. 2002. V. 38. № 7. P. 535–544.
14. *Раевский Д.Н., Степанова И.Э.* Модифицированный метод S-аппроксимаций. Региональный вариант // *Физика Земли*. 2015. № 2. С. 44–56.
15. *Сальников А.М., Степанова И.Э., Гудкова Т.В., Батов А.В.* О построении аналитической модели магнитного поля Марса по спутниковым данным с помощью модифицированных S-аппроксимаций // *Доклады Российской академии наук. Науки о Земле*. 2021. Т. 499. № 1. С. 54–59.

A NEW COMBINED TECHNIQUE FOR SOLVING NONLINEAR GRAVITY PROBLEMS FROM PLANETARY TOPOGRAPHY, GRAVITY FIELD DATA AND CRUSTAL THICKNESS WITH THE USE OF THROWING OFF ALGORITHM

A. M. Salnikov^{a,b,#}, I. E. Stepanova^{a,##}, T. V. Gudkova^{a,###}, A. V. Batov^{a,b,####}, and A. V. Shchepetilov^c

^a*Schmidt Institute of Physics of the Earth of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

^b*Trapeznikov Institute of Control Sciences of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

^c*Lomonosov Moscow State University, Department of Physics, Moscow, Russian Federation*

[#]*E-mail: salnikov@ipu.ru*

^{##}*E-mail: tet@ifz.ru*

^{###}*E-mail: gudkova@ifz.ru*

^{####}*E-mail: batov@ipu.ru*

Presented by Academician of the RAS A.O. Gliko February 9, 2023

We test a new combined technique of solving nonlinear gravity problems using three types of datasets: gravity field, topography and crustal thickness in the Elysium Planitia region on Mars.

Keywords: regularization method, gravity field, topography, Mars