

## ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА МАГНИТОСТАТИКИ В ПОЛЯХ НАСЫЩЕНИЯ

© 2019 г. В.В. Дякин<sup>1</sup>, О.В. Кудряшова<sup>1,\*</sup>, В.Я. Раевский<sup>1,\*\*</sup>

<sup>1</sup>Институт физики металлов имени М.Н. Михеева УрО РАН, Россия 620108 Екатеринбург,  
ул. С. Ковалевской, 18

E-mail: \*kudryashova\_ov@imp.uran.ru; \*\*raevskii@imp.uran.ru

Поступила в редакцию 31.05.2019; после доработки 28.06.2019

Принята к публикации 05.07.2019

Получены интегродифференциальные уравнения, решения которых определяют форму намагниченного до насыщения произвольного ферромагнитного тела или полости в нем без априорного предположения о принадлежности занимаемых ими областей какому-либо конкретному геометрическому классу. Доказана однозначность такого определения для широкого класса практически встречающихся случаев. В качестве важного иллюстративного примера получены аналитические формулы для определения результирующего поля ферромагнитного тела шаровой формы, из которых положение и размеры тела определяются однозначно.

*Ключевые слова:* основное уравнение магнитостатики, прямая и обратная задача, проблема единственности, магнитный неразрушающий контроль.

DOI: 10.1134/S013030821910004X

### ВВЕДЕНИЕ

Многие задачи математической физики условно делятся на прямые и обратные. Обобщая, прямые задачи сводятся к получению следствий явления при заданных его причинах и параметрах участвующих объектов, а обратные — к получению характеристик причины явления и/или параметров указанных объектов по заданным (измеренным) следствиям. Обратные задачи возникают, в основном, по той причине, что не всякий объект доступен прямому непосредственному изучению, а потому о его свойствах приходится судить по косвенным их проявлениям.

Прямая задача магнитостатики заключается в нахождении напряженности результирующего магнитного поля внутри и вне магнетика произвольной формы при заданных геометрических и физических параметрах исследуемой конфигурации — форме и размерах магнетика, его магнитной проницаемости, величине и направлении внешнего поля. Однако для задач неразрушающего магнитного контроля наибольший интерес представляют обратные задачи магнитостатики — по заданному внешнему полю и известному (измеренному) результирующему полю в некоторой доступной для измерения конечной области вне магнетика восстановить «исходные данные» — геометрические (форма магнетика, форма и размеры дефектов и полостей) и/или физические (магнитная проницаемость) характеристики магнетика.

При решении обратной задачи магнитостатики возникают две серьезные проблемы. Первая из них заключается в частой (и достаточно типичной для обратных задач вообще) неединственности ее решения, когда конфигурации с различными наборами геометрических и физических параметров магнетиков приводят к одному и тому же результирующему полю в области его возможного измерения, что является причиной принципиальной невозможности однозначного определения указанных параметров. Эти вопросы достаточно подробно обсуждены, например, в [1—6]. Вторая проблема состоит в необычайной сложности (математического характера) прямого непосредственного решения обратной задачи в ее общей постановке. Различные подходы к практическому решению этой задачи обсуждены, например, в [7—13]. Большинство из них основываются на многократном решении прямых задач (либо оригинальными численно-аналитическими методами, либо с использованием универсальных программных пакетов типа ANSYS, ELCUT, FEMM) для различных (но априори фиксированных!) геометрических форм магнетика и форм возможных дефектов в них (шары, полупространства, эллипсоиды, цилиндры, плоскопараллельные полосы и др.) с целью выявления закономерностей поведения результирующих магнитных полей в зависимости от местоположения магнетика и дефектов в нем, а также от их размерных и ориентационных геометрических параметров. Другие подходы используют либо метод минимизации функционала отклонения измеренного распределения магнитного поля от рассчитанных (опять же описанным выше многократным решением прямой задачи) полей «эталонного» дефекта, либо построение интерполяционных формул (на основе решения прямых задач или данных натурального эксперимента), выражающих зависимость результирующего поля от тех или иных параметров дефектов.

В настоящей работе исследуется обратная задача для тела из ферромагнетика во внешнем поле, при котором его намагниченность достигает насыщения. Это приводит к упрощению общей математической модели, что позволяет доказать как единственность решения обратной задачи для указанной конфигурации, так и указать подход ее непосредственного решения без априорного предположения о типе геометрической формы магнетика и формы возможного дефекта в нем в виде полости.

## 1. ФИЗИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Исследованы две конфигурации магнетиков, характерные для задач магнитного неразрушающего контроля. Первая (назовем ее «конфигурация А») такова. Имеется сплошной магнетик, занимающий пространственную область  $\Omega$  с граничной поверхностью  $S$ , к которому приложено внешнее поле  $\mathbf{H}^0$  с известным распределением (рис. 1). Допустим, что область  $\Omega$  (то есть форма поверхности  $S$ ) не наблюдаема визуально (магнетик внутри непрозрачного немагнитного тела). Измерение напряженности результирующего магнитного поля тоже, возможно, не может быть осуществлено в непосредственной близости от тела, а потому считаем, что такие измерения доступны в некоторой конечной области  $G$  вне  $\Omega$ . Задача состоит в том, чтобы по известной напряженности  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$  результирующего поля в области  $G$  восстановить положение, форму и размеры области магнетика  $\Omega$  и/или распределение в ней магнитной проницаемости  $\mu$ .

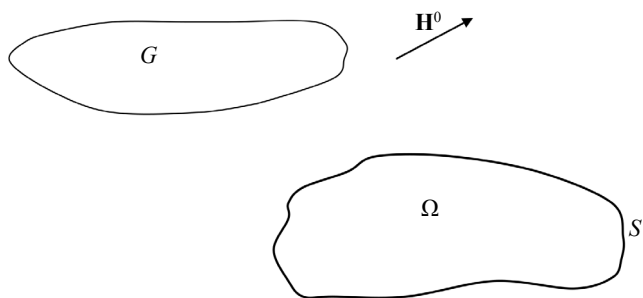


Рис. 1. Сплошной магнетик.

Опишем вторую исследуемую конфигурацию (назовем ее «конфигурация В»). Имеется магнетик известной формы, занимающий область  $\Omega_1$  с граничной поверхностью  $S_1$ . Внутри находится воздушная полость (дефект), занимающая некоторую недоступную для наблюдения область  $\Omega$  ( $\Omega \subset \Omega_1$ ) с поверхностью  $S$  (рис. 2). К системе приложено заданное внешнее поле  $\mathbf{H}^0$ , а напряженность  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$  результирующего поля может быть измерена в некоторой области  $G$  вне тела. Задача состоит в том, чтобы по известной напряженности  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$  результирующего поля в области  $G$  восстановить положение, форму, размеры полости  $\Omega$  и/или распределение в магнетике магнитной проницаемости  $\mu$ . Отметим, что в такой постановке нас, естественно, будут интересовать только односвязные области  $\Omega$  (то есть без внутренних «дыр»).

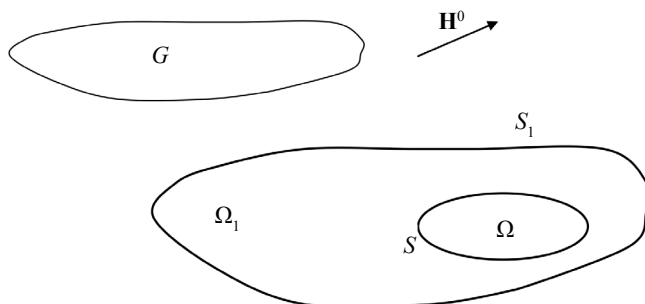


Рис. 2. Магнетик с полостью.

В данном разделе сформулирована физическая постановка обратной задачи магнитостатики в достаточно общем ее виде. В настоящей работе предлагается подход к решению частного случая этой задачи: определение формы ферромагнитного изделия (для конфигурации А) или формы воздушной полости в нем (для конфигурации В) при наличии внешнего поля специального вида.

## 2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для решения прямых и обратных задач магнитостатики мы исходим из ее основного интегродифференциального уравнения

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) - \nabla \operatorname{div} \int_T \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' = \mathbf{H}^0(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus S, \quad (2.1)$$

которое эквивалентно исходной системе уравнений Максвелла для случая магнитостатики (см. [14, с. 16, 17]), но обладает по сравнению с ней рядом преимуществ (обсужденных, например, в [5], [15]) как в отношении теоретического исследования, так и для проведения конкретных численных расчетов. В уравнении (2.1) введены следующие обозначения:  $T$  — пространственная область с граничной поверхностью  $S$ , занятая магнетиком;  $\mathbf{H}^0(\mathbf{r})$  — напряженность приложенного внешнего поля;  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$  — напряженность результирующего поля;  $\mathbf{M}(\mathbf{r})$  — возникающая в магнетике намагниченность, связанная с напряженностью поля внутри магнетика известным соотношением  $\mathbf{M}(\mathbf{r}) = (\mu - 1)\mathbf{H}(\mathbf{r})$  ( $\mu$  — магнитная проницаемость). Обратная задача для уравнения (2.1) ставится в следующей формулировке: по известной напряженности внешнего поля  $\mathbf{H}^0(\mathbf{r})$  и известной (измеренной) напряженности результирующего поля  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$  в некоторой доступной для измерения конечной области  $G$  восстановить форму области магнетика  $T$  (что включает и форму возможных дефектов в нем) и/или его магнитную проницаемость  $\mu$ . Здесь и в дальнейшем под формой тела будем понимать не только геометрическую принадлежность формы, но и соответствующие размеры и положение в пространстве (локализацию). Во введении были описаны основные трудности при исследовании обратной задачи такого рода — возможная (принципиальная) неединственность, а также сложность создания алгоритма ее «прямого» решения без опоры на решения множества прямых задач для магнетиков (и дефектов в нем) конкретных геометрических форм. Ниже будет рассмотрен частный случай описываемой задачи, для которого удастся эти проблемы преодолеть.

## 3. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ФЕРРОМАГНЕТИКА В ПОЛЕ НАСЫЩЕНИЯ

Пусть магнетик (в конфигурации А или В) является ферромагнитным телом, находящемся в постоянном внешнем поле с напряженностью  $\mathbf{H}^0$ , величина которого такова, что тело находится в состоянии насыщения. В этом случае его намагниченность  $\mathbf{M}$  тоже постоянна по всему объему тела, сонаправлена напряженности внешнего поля и определяется только материалом изготовления тела (а потому считается известной). По сравнению с описанной в предыдущем разделе обратной задачей уравнения (2.1) для произвольного магнетика в произвольном внешнем поле в данном случае упрощение состоит в том, что известным оказывается не только постоянное внешнее поле, но и постоянный вектор намагниченности, сонаправленный с напряженностью внешнего поля, то есть известны постоянные векторы:

$$\mathbf{H}^0 = \{H_1^0, H_2^0, H_3^0\}, \quad \mathbf{M} = \{M_1, M_2, M_3\}. \quad (3.1)$$

Кроме того, в данном случае магнитная проницаемость  $\mu$  никак не фигурирует, а определению подлежит лишь форма поверхности  $S$ , являющейся в конфигурации А границей ферромагнитного тела, а в конфигурации В — границей воздушной полости в нем.

В конфигурации А сплошного магнетика из уравнения (2.1) получаем соотношение

$$\nabla \operatorname{div} \int_{\Omega} \frac{\mathbf{M}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' = 4\pi(\mathbf{H}(\mathbf{r}) - \mathbf{H}^0), \quad \mathbf{r} \in G, \quad (3.2)$$

в котором напряженность результирующего поля  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$  в области  $G$  и постоянные векторы (3.1) известны, а определению подлежит форма области  $\Omega$  (то есть форма ее граничной поверхности  $S$ ).

В конфигурации В уравнение (2.1) имеет вид:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) - \nabla \operatorname{div} \int_{\Omega_1 \setminus \Omega} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' = \mathbf{H}^0(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in G,$$

откуда легко получить соотношение

$$\nabla \operatorname{div} \int_{\Omega} \frac{\mathbf{M}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' = 4\pi(\mathbf{H}^0 - \mathbf{H}(\mathbf{r})) + \nabla \operatorname{div} \int_{\Omega_1} \frac{\mathbf{M}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}', \quad \mathbf{r} \in G, \quad (3.3)$$

в котором правая часть и постоянный вектор  $\mathbf{M}$  суть известные величины, а найти требуется форму граничной поверхности  $S$  полости  $\Omega$ .

Таким образом, как в конфигурации А, так и в конфигурации В задача сводится к следующей: из уравнения вида

$$\nabla \operatorname{div} \int_{\Omega} \frac{\mathbf{M}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' = \mathbf{F}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in G, \quad (3.4)$$

в котором известны постоянный вектор  $\mathbf{M}$  и определенная в области  $G$  вектор-функция  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  (это правая часть (3.2) или (3.3) в конфигурации А или В соответственно), а найти необходимо форму односвязной (то есть без «дыр») ограниченной граничной области  $\Omega$  (то есть форму ее поверхности  $S$ ), лежащей вне области измерения поля  $G$ . Эта задача и будет предметом исследования в следующих разделах. Прежде всего будет исследован вопрос единственности решения этой задачи.

#### 4. СВЕДЕНИЕ К ВОПРОСУ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ГРАВИМЕТРИИ

Поскольку проблема единственности решения обратной задачи гравиметрии изучена досконально, то в этом разделе к этой проблеме будет сведен вопрос единственности сформулированной выше обратной задачи для уравнения (3.4). Для удобства выберем декартову систему координат так, чтобы ось  $z$  была сонаправлена постоянному вектору внешнего поля  $\mathbf{H}^0$ . Тогда в этой системе координат  $\mathbf{H}^0 = \{0, 0, H^0\}$ , а  $\mathbf{M} = \{0, 0, M\}$ , где  $H^0 = |\mathbf{H}^0|$ ,  $M = |\mathbf{M}|$ . Уравнение (3.4) в этой системе координат имеет вид

$$\nabla \frac{\partial}{\partial z} P(\mathbf{r}) = \frac{1}{M} \mathbf{F}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in G, \quad (4.1)$$

где объемный (ньютоновский) потенциал

$$P(\mathbf{r}) := \int_{\Omega} \frac{d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (4.2)$$

а  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  — правая часть уравнения (3.4). Вопрос единственности решения обратной задачи для уравнения (4.1) состоит в однозначности определения из этого уравнения формы области интегрирования  $\Omega$  в (4.2). Если бы в уравнении (4.1) отсутствовала операция  $\nabla \frac{\partial}{\partial z}$  перед объемным потенциалом, то мы бы получили досконально изученную задачу гравиметрии о единственности восстановления области интегрирования в ньютоновском потенциале по известным его значениям в некоторой области  $G$  вне гравитирующего тела  $\Omega$ . Для сведения к этой задаче докажем, что по известному (из уравнения (4.1)) значению  $\nabla \frac{\partial}{\partial z} P(\mathbf{r})$  в области  $G$  однозначно восстанавливается значение в этой области самого объемного потенциала  $P(\mathbf{r})$  в (4.2).

Предположим, что есть две конечные односвязные области  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ , для которых оба объемных потенциала:

$$P_1(\mathbf{r}) := \int_{\Omega_1} \frac{d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad P_2(\mathbf{r}) := \int_{\Omega_2} \frac{d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (4.3)$$

удовлетворяют уравнению (4.1), то есть имеют место соотношения:

$$\nabla \frac{\partial}{\partial z} P_1(\mathbf{r}) = \nabla \frac{\partial}{\partial z} P_2(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in G. \quad (4.4)$$

Выясним, при каких условиях можно при этом утверждать, что  $\Omega_1 = \Omega_2$ , то есть обратная задача для уравнения (4.1) разрешима однозначно. Из (4.4) следует, что для функции

$$Q(\mathbf{r}) := P_1(\mathbf{r}) - P_2(\mathbf{r}) \quad (4.5)$$

будет выполнено

$$\nabla \frac{\partial}{\partial z} Q(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in G,$$

а потому (область измерения  $G$  тоже предполагается односвязной)

$$\frac{\partial}{\partial z} Q(\mathbf{r}) = C, \quad C = \text{const}, \quad \mathbf{r} \in G. \quad (4.6)$$

Функция  $Q(\mathbf{r})$  в (4.5) является, как разность двух объемных потенциалов, гармонической в области  $\mathfrak{R}^3 \setminus (\bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2)$ , а потому таковой же является и функция  $\partial Q(\mathbf{r})/\partial z$ . В силу свойства единственности для гармонических функций [16, с. 89] из (4.6) вытекает, что тождество (4.6) выполняется во всей неограниченной области  $\mathfrak{R}^3 \setminus (\bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2)$ . Учитывая выражение (4.5) для функции  $Q(\mathbf{r})$  и тот факт, что объемные потенциалы на бесконечности стремятся к нулю вместе со своими производными (см., например, [17]), получаем, что  $C = 0$ , а потому

$$\frac{\partial}{\partial z} Q(\mathbf{r}) \equiv 0, \quad \mathbf{r} \in \mathfrak{R}^3 \setminus (\bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2). \quad (4.7)$$

Докажем отсюда, что  $Q(\mathbf{r}) = 0$ ,  $\mathbf{r} \in \mathfrak{R}^3 \setminus (\bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2)$ . Для этого окружим области  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  сферой  $|\mathbf{r}| = R$  большого радиуса  $R$  так, чтобы обе области  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  находились внутри этой сферы. Докажем, что  $Q(\mathbf{r}) = 0$  в точках этой сферы. Пусть  $A(x_0, y_0, z_0)$  — произвольная точка на ней. Без ограничения общности считаем  $z_0 \geq 0$ . Рассмотрим сужение  $Q(\mathbf{r})$  на луч, исходящий из  $A$  сонаправленно с осью  $z$ :  $f(z) := Q(x_0, y_0, z)$ ,  $z \geq z_0$ . Тогда из (4.7) следует  $f'(z) = 0$ , а потому  $f(z) = C$ ,  $C = \text{const}$ ,  $z \geq z_0$ . Учитывая упомянутое выше поведение объемных потенциалов на бесконечности, из (4.5) получаем  $C = 0$ . Поэтому  $Q(x_0, y_0, z_0) = f(z_0) = 0$ , что и требовалось. Таким образом, на упомянутой сфере  $P_1(\mathbf{r}) \equiv P_2(\mathbf{r})$ , а потому это тождество будет выполнено во всех точках вне областей  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  (см. например, [18]):

$$P_1(\mathbf{r}) = P_2(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \mathfrak{R}^3 \setminus (\bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2). \quad (4.8)$$

Отметим, что для выполнения (4.8) достаточно (и, естественно, необходимо) выполнение  $P_1(\mathbf{r}) \equiv P_2(\mathbf{r})$  в любой сколь угодно малой окрестности произвольной точки из области  $\mathfrak{R}^3 \setminus (\bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2)$ . Это сразу же следует из упомянутого выше свойства единственности для гармонических функций.

## 5. КЛАССЫ ОДНОЗНАЧНОСТИ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ МАГНИТОСТАТИКИ В ПОЛЯХ НАСЫЩЕНИЯ

Установленная в предыдущем разделе эквивалентность условий (4.4) и (4.8) позволяет свести вопрос единственности восстановления в полях насыщения формы ферромагнетика (или формы полости в нем) к хорошо изученному вопросу единственности восстановления формы гравитирующего тела по измерениям гравитационного поля вне его. В этом плане остается ответить на следующий вопрос: к каким классам областей должны принадлежать тела (точнее, односвязные области, ими занимаемые)  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ , чтобы была справедлива импликация

$$\Omega_1 \neq \Omega_2 \Rightarrow P_1(\mathbf{r}) \neq P_2(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \mathfrak{R}^3 \setminus (\bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2). \quad (5.1)$$

Этот вопрос, как было сказано выше, хорошо изучен, перечислим эти классы с соответствующими ссылками.

1. Тела  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  не пересекаются (и даже не имеют общих граничных точек):  $\bar{\Omega}_1 \cap \bar{\Omega}_2 = \emptyset$  (см. [19], [20]).

Далее рассмотрим классы пересекающихся областей.

2. Тела  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  звездны относительно некоторой общей внутренней точки (Теорема Новикова [21]).

Напомним, что область называется звездной относительно некоторой своей точки, если любой исходящий из нее луч пересекает ее границу только в одной точке (или, что эквивалентно, любой отрезок, соединяющий эту точку с произвольной точкой области, целиком ей принадлежит). Этот класс областей включает и все выпуклые тела с общей внутренней точкой, поскольку выпуклые области звездны относительно любой своей точки.

3. Общая часть  $\bar{\Omega}_1 \cap \bar{\Omega}_2$  звездна относительно какой-либо своей точки [20].

Это (достаточно слабое) требование только на общую часть областей, а вне этой части форма  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  может быть произвольной. Этот класс областей шире предыдущего.

4. Тела  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  обладают параллельными средними плоскостями и центр тяжести каждого из них находится внутри своего тела (теорема Сретенского, [21, с. 44]).

По определению, область обладает средней плоскостью, если существует такая плоскость (она и называется средней), что любая прямая, ей перпендикулярная, может пересекать границу области только в двух точках, лежащих по разные стороны от этой плоскости.

Таким образом, свойство единственности для обратной задачи магнитостатики в полях насыщения имеет место практически для всех встречающихся форм изделий и полостей в них.

## 6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ И РАЗМЕРОВ ШАРОВОГО ФЕРРОМАГНЕТИКА В НЕПРОЗРАЧНОЙ И НЕМАГНИТНОЙ СРЕДЕ

В качестве иллюстрации найдем решение прямой задачи для конфигурации, обозначенной в заголовке, и покажем однозначность решения соответствующей обратной задачи. Затем (в следующем разделе) исследуем задачу об определении формы произвольного ферромагнитного тела (или формы полости в нем) без всяких априорных предположений о ее геометрической принадлежности.

Пусть ферромагнитный шар  $\Omega$  радиуса  $R$  помещен в постоянное поле насыщения  $\mathbf{H}^0 = \{H_1^0, H_2^0, H_3^0\}$ , после чего в нем возникла постоянная намагниченность насыщения  $\mathbf{M} = \{M_1, M_2, M_3\}$ . В этом случае справедливо соотношение (3.4) с той же правой частью, что в уравнении (3.2). Найдем выражение для  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  ( $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$ ), вычисляя интеграл в левой части уравнения (3.4). Из этого уравнения следует, что

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \nabla \operatorname{div} J(\mathbf{r}), \quad (6.1)$$

где

$$J(\mathbf{r}) := \int_{\Omega} \frac{\mathbf{M}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' = \left( \int_{\Omega} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' \right) \cdot \mathbf{M}, \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}. \quad (6.2)$$

Сначала поместим начало декартовой системы координат в центр шара, в которой он задается соотношением  $\Omega = \{\mathbf{r} : |\mathbf{r}| < R\}$ . Тогда, согласно [22],

$$\int_{\Omega} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' = \frac{4\pi R^3}{3r}, \quad r := |\mathbf{r}| \geq R.$$

Подставляя значение этого интеграла в (6.2) и выполняя, в соответствии с (6.1), операции  $\nabla \operatorname{div}$ , получаем:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{4\pi R^3}{3r^5} \left[ 3(\mathbf{M} \cdot \mathbf{r}) \cdot \mathbf{r} - r^2 \cdot \mathbf{M} \right], \quad |\mathbf{r}| \geq R. \quad (6.3)$$

Рассмотрим теперь случай произвольного расположения декартовой системы координат, в которой заданы постоянное внешнее поле  $\mathbf{H}^0 = \{H_1^0, H_2^0, H_3^0\}$  и намагниченность  $\mathbf{M} = \{M_1, M_2, M_3\}$  шарового магнетика радиуса  $R$ , центр которого задан радиус-вектором  $\mathbf{r}_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$ . Совершая в (6.3) соответствующий сдвиг координат, получаем следующее выражение для  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  в (6.1), зависящее от параметров шара  $x_0, y_0, z_0$  и  $R$ :

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{4\pi R^3}{3|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^5} \left[ 3(\mathbf{M} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2 \cdot \mathbf{M} \right], \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| \geq R. \quad (6.4)$$

Из (3.2), (3.4) и (6.4) имеем

$$\frac{R^3}{3|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^5} \left[ 3(\mathbf{M} \cdot (\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)) \cdot (\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) - |\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^2 \cdot \mathbf{M} \right] = \mathbf{H}(\mathbf{r}) - \mathbf{H}^0, \quad |\mathbf{r}-\mathbf{r}_0| \geq R. \quad (6.5)$$

Векторное уравнение (6.5) эквивалентно трем скалярным уравнениям для определения искомых параметров шарового магнетика  $x_0, y_0, z_0$  и  $R$ :

$$\frac{R^3}{3|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^5} \left[ 3(\mathbf{M} \cdot (\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)) \cdot (x-x_0) - |\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^2 \cdot M_1 \right] + H_1^0 = H_1(\mathbf{r}), \quad (6.6)$$

$$\frac{R^3}{3|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^5} \left[ 3(\mathbf{M} \cdot (\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)) \cdot (y-y_0) - |\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^2 \cdot M_2 \right] + H_2^0 = H_2(\mathbf{r}), \quad (6.7)$$

$$\frac{R^3}{3|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^5} \left[ 3(\mathbf{M} \cdot (\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)) \cdot (z-z_0) - |\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^2 \cdot M_3 \right] + H_3^0 = H_3(\mathbf{r}), \quad (6.8)$$

где

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}, \quad |\mathbf{r}-\mathbf{r}_0| \geq R,$$

$$\mathbf{M} \cdot (\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) = M_1(x-x_0) + M_2(y-y_0) + M_3(z-z_0).$$

Из соотношений (6.6)—(6.8) видно, что при различных наборах параметров  $x_0, y_0, z_0$  и  $R$ , характеризующих размер и положение шара, нельзя получить тождественных (в произвольной области измерения  $G$  вне шара) компонент напряженности результирующего поля. Это говорит об однозначности решения соответствующей обратной задачи — определение этих параметров по результатам измерения результирующего поля. Практическое вычисление этих параметров требует в общем случае измерения какой-либо компоненты результирующего поля в четырех точках и решения соответствующей системы четырех уравнений с четырьмя неизвестными  $x_0, y_0, z_0$  и  $R$ , получаемой с использованием одного из уравнений (6.6)—(6.8).

## 7. ВЫВОД УРАВНЕНИЯ, ОПРЕДЕЛЯЮЩЕГО ФОРМУ ФЕРРОМАГНЕТИКА ИЛИ ФОРМУ ПОЛОСТИ В НЕМ

Нахождение формы ферромагнитного тела (или формы полости в нем) сводится к определению формы поверхности  $S$ , ограничивающей область тела (или область полости в нем)  $\Omega$ , которая фигурирует в качестве области интегрирования в уравнении (3.4) с известной функцией  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  в области измерения  $G$ . Предположим, что область  $\Omega$  является звездной относительно некоторой своей точки (ограничимся поиском областей такого вида), в которую поместим начало декартовой системы координат. В этом случае уравнение искомой замкнутой поверхности  $S$  в сферической системе координат  $(r, \theta, \varphi)$  может быть задано в виде:

$$S: \quad r = f(\theta, \varphi), \quad \theta \in [0, \pi], \quad \varphi \in [0, 2\pi), \quad (7.1)$$

где  $f(\theta, \varphi)$  — искомая функция, определяющая форму поверхности  $S$ . В декартовой системе координат такая поверхность задается параметрически

$$S: \quad x = f(\theta, \varphi) \sin \theta \cos \varphi, \quad y = f(\theta, \varphi) \sin \theta \sin \varphi, \quad z = f(\theta, \varphi) \cos \theta. \quad (7.2)$$

Применяя формулу Остроградского—Гаусса, с учетом (3.1) получаем, что

$$\operatorname{div} \int_{\Omega} \frac{\mathbf{M}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' = - \int_S \frac{\mathbf{M} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dS',$$

где  $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{r}')$  — вектор единичной внешней нормали к поверхности  $S$  в текущей точке интегрирования  $\mathbf{r}'$ . Тогда уравнение (3.4) можно переписать в виде:

$$\nabla \psi(\mathbf{r}) = -\mathbf{F}(\mathbf{r}), \quad \psi(\mathbf{r}) := \int_S \frac{\mathbf{M} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dS', \quad \mathbf{r} \in G. \quad (7.3)$$

Преобразуем в (7.3) поверхностный интеграл в двойной (см., например, [23]) с учетом вида задания поверхности  $S$  в (7.2). Вектор единичной нормали  $\mathbf{n} = \mathbf{N} / |\mathbf{N}|$ , где  $\mathbf{N}$  — вектор нормали, который в случае параметрического задания (7.2) поверхности  $S$  имеет вид  $\mathbf{N} = \{A, B, C\}$ , где

$$A \equiv A(\theta, \varphi) := \begin{vmatrix} y_\theta & z_\theta \\ y_\varphi & z_\varphi \end{vmatrix}, B \equiv B(\theta, \varphi) := \begin{vmatrix} z_\theta & x_\theta \\ z_\varphi & x_\varphi \end{vmatrix}, C \equiv C(\theta, \varphi) := \begin{vmatrix} x_\theta & y_\theta \\ x_\varphi & y_\varphi \end{vmatrix}, \quad (7.4)$$

где нижний индекс означает частную производную по соответствующей переменной. Находя из (7.2) вид этих производных и подставляя их в формулы (7.4), получаем:

$$A = f(\theta, \varphi)(f_\varphi(\theta, \varphi) \sin \varphi - f_\theta(\theta, \varphi) \sin \theta \cos \theta \cos \varphi + f(\theta, \varphi) \sin^2 \theta \cos \varphi), \quad (7.5)$$

$$B = f(\theta, \varphi)(f(\theta, \varphi) \sin^2 \theta \sin \varphi - f_\theta(\theta, \varphi) \sin \theta \cos \theta \sin \varphi - f_\varphi(\theta, \varphi) \cos \varphi), \quad (7.6)$$

$$C = f(\theta, \varphi)(f_\theta(\theta, \varphi) \sin^2 \theta + f(\theta, \varphi) \sin \theta \cos \theta). \quad (7.7)$$

Учитывая, что элемент площади в поверхностном интеграле (7.3) имеет вид  $dS' = \sqrt{A^2(\theta', \varphi') + B^2(\theta', \varphi') + C^2(\theta', \varphi')} d\theta' d\varphi'$ , получаем выражение для  $\psi(\mathbf{r})$  из (7.3) через двойной интеграл

$$\psi(\mathbf{r}) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{[M_1 A(\theta', \varphi') + M_2 B(\theta', \varphi') + M_3 C(\theta', \varphi')]}{[g(x, y, z, \theta', \varphi')]^{1/2}} d\theta' d\varphi', \quad (7.8)$$

где

$$g(x, y, z, \theta, \varphi) := (x - f(\theta, \varphi) \sin \theta \cos \varphi)^2 + (y - f(\theta, \varphi) \sin \theta \sin \varphi)^2 + (z - f(\theta, \varphi) \cos \theta)^2, \quad (7.9)$$

а выражения для  $A(\theta', \varphi')$ ,  $B(\theta', \varphi')$ ,  $C(\theta', \varphi')$  берутся из (7.5) — (7.7).

Вычисляя, в соответствии с (7.3), градиент от выражения (7.8) с учетом (7.9), получаем три интегральных уравнения относительно искомой функции  $f(\theta, \varphi)$ , каждое из которых может быть использовано для определения формы поверхности  $S$  тела или полости в нем:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{[M_1 A(\theta', \varphi') + M_2 B(\theta', \varphi') + M_3 C(\theta', \varphi')]}{[g(x, y, z, \theta', \varphi')]^{3/2}} \cdot (x - f(\theta', \varphi') \sin \theta' \cos \varphi') d\theta' d\varphi' = F_1(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in G, \quad (7.10)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{[M_1 A(\theta', \varphi') + M_2 B(\theta', \varphi') + M_3 C(\theta', \varphi')]}{[g(x, y, z, \theta', \varphi')]^{3/2}} \cdot (y - f(\theta', \varphi') \sin \theta' \sin \varphi') d\theta' d\varphi' = F_2(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in G, \quad (7.11)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{[M_1 A(\theta', \varphi') + M_2 B(\theta', \varphi') + M_3 C(\theta', \varphi')]}{[g(x, y, z, \theta', \varphi')]^{3/2}} \cdot (z - f(\theta', \varphi') \cos \theta') d\theta' d\varphi' = F_3(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in G, \quad (7.12)$$

где  $F_1(\mathbf{r})$ ,  $F_2(\mathbf{r})$  и  $F_3(\mathbf{r})$  суть компоненты известной вектор-функции  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \{F_1(\mathbf{r}), F_2(\mathbf{r}), F_3(\mathbf{r})\}$  — это правая часть (3.2) или (3.3) в конфигурации А или В соответственно, а  $g(x, y, z, \theta, \varphi)$ ,  $A(\theta', \varphi')$ ,  $B(\theta', \varphi')$ ,  $C(\theta', \varphi')$  определены (7.9), (7.5)—(7.7).

Эти уравнения можно упростить выбором системы координат. Направим ось  $z$  вдоль постоянного внешнего поля  $\mathbf{H}^0$ , тогда в этой системе координат  $\mathbf{H}^0 = \{0, 0, H^0\}$ , а  $\mathbf{M} = \{0, 0, M\}$ , где  $H^0 := |\mathbf{H}^0|$ , а  $M := |\mathbf{M}|$ . В соответствии с этим, подставляя в (7.8), (7.10) — (7.12)  $M_1 = 0$ ,  $M_2 = 0$ ,  $M_3 = M$ , получим:

$$\psi(\mathbf{r}) = M \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{C(\theta', \varphi')}{[g(x, y, z, \theta', \varphi')]^{1/2}} d\theta' d\varphi', \quad \mathbf{r} \in G,$$

$$M \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{C(\theta', \varphi')(x - f(\theta', \varphi') \sin \theta' \cos \varphi')}{[g(x, y, z, \theta', \varphi')]^{3/2}} d\theta' d\varphi' = F_1(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in G, \quad (7.13)$$



$$M \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{C(\theta', \varphi')(y - f(\theta', \varphi') \sin \theta' \sin \varphi')}{[g(x, y, z, \theta', \varphi')]^{3/2}} d\theta' d\varphi' = F_2(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in G, \quad (7.14)$$

$$M \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{C(\theta', \varphi')(z - f(\theta', \varphi') \cos \theta')}{[g(x, y, z, \theta', \varphi')]^{3/2}} d\theta' d\varphi' = F_3(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in G. \quad (7.15)$$

В этих уравнениях  $F_1(\mathbf{r})$ ,  $F_2(\mathbf{r})$ ,  $F_3(\mathbf{r})$  суть компоненты вектор-функции  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ , которая для конфигурации А имеет вид  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = 4\pi(\mathbf{H}(\mathbf{r}) - \mathbf{H}^0)$ , а для В:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = 4\pi(\mathbf{H}^0 - \mathbf{H}(\mathbf{r})) + M \nabla \frac{\partial}{\partial z} \int_{\Omega_1} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}'.$$

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение кратко сформулируем основные результаты.

1. В рамках изучения обратной задачи магнитостатики в полях насыщения получено и исследовано уравнение (3.4) для определения формы ферромагнитного тела или полости в нем.

2. Исследована проблема единственности решения сформулированной обратной задачи путем ее сведения к досконально изученной обратной задаче гравиметрии для объемного потенциала. В результате доказана однозначность определения из указанного уравнения формы ферромагнитного тела или полости в нем для широкого класса практически встречающихся ситуаций.

3. В качестве важного иллюстративного примера получены аналитические формулы (6.6)—(6.8) для определения результирующего поля ферромагнитного тела шаровой формы, помещенного в поле насыщения. Показана возможность однозначного определения из этих формул положения и размеров шарового ферромагнетика в непрозрачной и немагнитной среде.

4. Получены интегродифференциальные уравнения (7.10) — (7.15), решения которых в достаточно общих случаях определяют форму ферромагнитного тела или полости в нем без априорного предположения о принадлежности занимаемых ими областей какому-либо конкретному геометрическому классу.

Работа выполнена в рамках государственного задания по теме «Квант» («Quantum») № АААА-А18-118020190095-4 и при поддержке проекта №18-10-2-8 Программы УрО РАН.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Печенков А.Н., Щербинин В.Е. Некоторые прямые и обратные задачи технической магнитостатики. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2004. 177с.
2. Печенков А.Н., Щербинин В.Е. О решении обратной задачи магнитостатической томографии // Дефектоскопия. 2009. № 3. С. 37—55.
3. Печенков А.Н., Щербинин В.Е. К вопросу о неединственности решения обратной задачи магнитостатической дефектоскопии // Контроль. Диагностика. 2006. № 9. С. 59—60.
4. Печенков А.Н. О влиянии формы тела на единственность решения обратной задачи магнитостатической дефектоскопии // Дефектоскопия. 2006. № 10. С. 24—26.
5. Дякин В.В. Прямая и обратная задача магнитостатики // Дефектоскопия. 1996. № 3. С. 3—6.
6. Dyakin V.V., Kudryashova O.V., Raevskii V.Y. On the Well-Posedness of the Direct and Inverse Problem of Magnetostatics. Part 2 // Russian Journal of Nondestructive Testing. 2018. V. 54. No. 10. P. 687—697. [Дякин В.В., Кудряшова О.В., Раевский В.Я. К вопросу о корректности прямой и обратной задачи магнитостатики. Часть 2 // Дефектоскопия. 2018. № 10. С. 15—24.]
7. Реутов Ю.Я., Гобов Ю.Л., Лоскутов В.Е. О возможностях использования программы ELCUT в расчетах по дефектоскопии // Дефектоскопия. 2002. № 6. С. 34—40.
8. Загидулин Р.В., Дякин В.В., Дударев М.С., Щербинин В.Е. К определению геометрических размеров поверхностного дефекта // Физические методы и приборы НК. Тезисы докладов X Уральской научной технической конференции. Ижевск. 1989. С. 83.
9. Novoslugina A.P., Smorodinskii Ya.G. A calculation method for evaluating defect parameters in steel // Russian Journal of Nondestructive Testing. 2017. V. 53. No. 11. P. 765—771. [Новослугина А.П., Смородинский Я.Г. Расчетный способ оценки параметров дефектов в сталях // Дефектоскопия. 2017. № 11. С. 13—19.]

10. Дякин В.В., Раевский В.Я., Кудряшова О.В. Поле конечного дефекта в пластине // Дефектоскопия. 2009. № 3. С. 67—79.
11. Кротов Л.Н. Реконструкция границы раздела сред по пространственному распределению магнитного поля рассеяния. 1. Исследование свойств решения вспомогательной прямой задачи // Дефектоскопия. 2004. № 2. С. 76—82.
12. Кротов Л.Н. Реконструкция границы раздела сред по пространственному распределению магнитного поля рассеяния. 2. Постановка и метод решения обратной геометрической задачи магнитостатики // Дефектоскопия. 2004. № 6. С. 36—44.
13. Слесарев Д.А., Барат В.А., Чобану П.М. Снижение погрешности статистического метода оценки параметров дефектов в магнитной дефектоскопии // Дефектоскопия. 2012. № 1. С. 69—74.
14. Хижняк Н.А. Интегральные уравнения макроскопической электродинамики. Киев: Наукова думка, 1986. 279 с.
15. Дякин В.В. Математические основы классической магнитостатики. Екатеринбург: РИО УрО РАН, 2016. 403 с.
16. Тиман А.Ф., Трофимов В.Н. Введение в теорию гармонических функций. М.: Наука, 1968. 207 с.
17. Михлин С.Г. Курс математической физики. М.: Наука, 1968. 576 с.
18. Прилепко А.И. Обратные задачи теории потенциала (эллиптические, параболические, гиперболические уравнения и уравнения переноса) // Матем. заметки. 1973. Т. 14. № 5. С. 755—767.
19. Антонов В.А., Тимошкова Е.И., Холишевников К.В. Введение в теорию ньютоновского потенциала. М.: Наука, 1988. 269 с.
20. Прилепко А.И. Об обратных задачах теории потенциала // Дифф. уравнения. 1967. Т. 3. № 1. С. 30—44.
21. Алексидзе М.А. Приближенные методы решения прямых и обратных задач гравиметрии. М.: Наука, 1987. 334 с.
22. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981. 800 с.
23. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3. М.: Наука, 1966. 656 с.