УДК 620.179.16

ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ПРОДОЛЬНОЙ ВОЛНЫ В СЛОИСТОЙ СРЕДЕ С НЕОДНОРОДНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ НАПРАВЛЕНИЯХ РАСПРОСТРАНЕНИЯ

К.Е. Аббакумов[1,*], А.В. Вагин[1,]**

[1]Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина), Россия 197376 Санкт-Петербург, ул. Профессора Попова, 5
E-mail: [*]keabbakumov@etu.ru; [**]av.vagin@bk.ru

Поступила в редакцию 24.09.2019; после доработки 21.10.2019
Принята к публикации 01.11.2019

Исследовано распространение продольной волны в слоистой среде с неоднородными граничными условиями при двух вариантах геометрии распространения волны относительно слоев структуры: параллельно и перпендикулярно слоям. Выведены дисперсионные уравнения для продольной волны для рассматриваемых случаев распространения. Решены относительно волнового числа найденные дисперсионные уравнения для нахождения зависимостей эффективных скоростей продольной волны от относительной толщины слоя и параметров материалов. Полученные зависимости используются в задачах нахождения физико-механических характеристик среды на основе акустических измерений.

Ключевые слова: продольная волна, дисперсионное уравнение, слоистая среда, неоднородные граничные условия.

DOI: 10.31857/S0130308220010030

ВВЕДЕНИЕ

Распространению продольных волн в слоистом микронеоднородном полупространстве уделяется большое внимание. Результаты анализа распространения продольных волн в микронеоднородной слоистой среде используются для задач определения и контроля основных физико-механических характеристик материала, что является важной задачей неразрушающего контроля качества материалов, изделий и конструкций, а также структуроскопии.

При четкой аналитической связи между параметрами волны и свойствами материала контролируемое свойство может быть определено с высокой степенью достоверности. Так, модуль Юнга, модуль сдвига, коэффициент Пуассона однозначно определяются по измеренным значениям скоростей распространения продольной и поперечной волн.

В [1] приведено исследование распространения продольных волн в мелкослоистой среде с однородными граничными условиями на границах слоев при распространении параллельно слоям структуры, результатом которого является вывод дисперсионного уравнения для продольной волны. Стоит отметить, что ранее в [2, 3] решение дисперсионного уравнения относительно волнового числа и построение зависимости скорости продольной волны от относительной толщины слоя материала и параметров сред приводили к некоторым ошибкам, которые заключались в том, что при увеличении относительной толщины слоя зависимость начинала спадать, что не подчиняется физическому смыслу при распространении волны в однородной среде.

Аналогично рассмотренному выше случаю, в [4, 5] рассматривается распространение продольной волны в слоистой неоднородной среде, где получены зависимости продольной волны, распространяющейся в структуре «сталь—сталь» с шероховатостью между прилегающими средами. Полученные результаты также разнятся с представлениями о распространении волн в неоднородных средах, так как полученные зависимости не отражают правильных значений скоростей распространения в поперечной плоскости исследуемой структуры.

Распространение плоских волн в слоистом композитном материале с начальными напряжениями периодической структуры рассматривается в [6, 7], где все результаты получены для полного контакта слоев, однако не приводится решение дисперсионного уравнения волны относительно волнового числа, что, в свою очередь, не дает четкой аналитической связи между параметрами распространяющейся волны (скорость) и свойствами контролируемого материала. Аналогичные исследования для случая полного проскальзывания слоев представлены в статье [8]. Поскольку в этих работах получены результаты для двух крайних случаев контакта между слоями, то представляет интерес их сравнение для оценки распространения волн при других видах степеней жесткости [9, 10].

Стоит отметить, что данное сравнение применительно к распространению волн в слоистом композите отсутствует в классической теории (без начальных напряжений) [11]. В [12] рассмотрено распространение волн в среде с периодически расположенными твердыми слоями при полном контакте. Результаты этих исследований также приведены в монографии [3].

Разнообразие конструкционных материалов, используемых в современном производстве чрезвычайно велико, и имеет устойчивую тенденцию к нарастанию. Расширение номенклатуры используемых материалов опирается на появление новых технологий, что, в свою очередь, сопровождается и появлением новых видов неоднородностей, для обнаружения которых необходимо создавать новые или совершенствовать уже имеющиеся средства контроля. Разработка таких средств контроля должна опираться на физические предпосылки, связанные с особенностями волновых процессов в неоднородных материалах.

Особый вид неоднородных сред представляют слоистые структуры, хорошо моделирующие свойства не только сред геологического происхождения, но и композиционных материалов, а также материалов, используемых в аддитивных технологиях. Для определения требуемых параметров в таких средах с помощью ультразвуковых средств контроля необходимо проводить предизмерительные изыскания, предпринимаемые с целью получения максимального количества информации о структуре исследуемой среды.

Целью статьи является вывод дисперсионного уравнения для продольной волны, распространяющейся параллельно и перпендикулярно слоям слоистой структуры с неоднородными граничными условиями. То есть необходимо рассмотреть два случая геометрии распространения продольной волны: распространение в неоднородной среде параллельно и перпендикулярно слоям. Однородная среда описывается граничными условиями, учитывающими полную передачу составляющих упругих смещений и упругих напряжений. В качестве неоднородной среды рассматриваем микронеоднородную структуру, описываемую граничными условиями, учитывающими неполную передачу составляющих упругих смещений при сохранении передачи упругих напряжений [13].

Под микронеоднородными слоистыми средами понимается слоистая структура, составленная из неоднородной слоистой среды и включений, расстояние между которыми и их размеры много меньше длины волны, распространяющейся в этой среде [14]. Среда, состоящая из чередующихся слоев двух однородных и изотропных веществ, называется слоистой. Если слоистая среда рассматривается в среднем, то есть когда слои структуры достаточно тонкие, причем условие тонкости слоев означает, что их толщины малы по сравнению с длинами волн сжатия и сдвига в материалах этих сред, то она рассматривается уже как однородная, но анизотропная, при этом такая среда называется мелкослоистой [1, 3].

Микронеоднородные слоистые среды, изготовление которых не имеет каких-либо технологических трудностей, а свойства могут быть очень разнообразны (анизотропия скоростей распространения и поглощений как для волн сжатия, так и для волн сдвига), представляют несомненный практический интерес в акустике, авиации и космической технике, сейсмологии, акустооптике.

Описание распространения волн в слоистых средах. Рассмотрим модель слоистого полупространства с чередующимися слоями толщиной a и b, параметрами ρ, λ, μ — для первой среды и $\bar{\rho}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}$ — для второй среды (рис. 1). В качестве первой среды рассматриваем сталь, в качестве второй — графит. Общая толщина слоя принимается равной 1 мм, а частота ультразвука при моделировании процессов определения скорости волны на основе акустических измерений — 1 МГц.

На рис. 1 ρ — плотность среды, λ, μ — параметры Лямэ. Аналогичные параметры для второй среды обозначаем с чертой сверху.

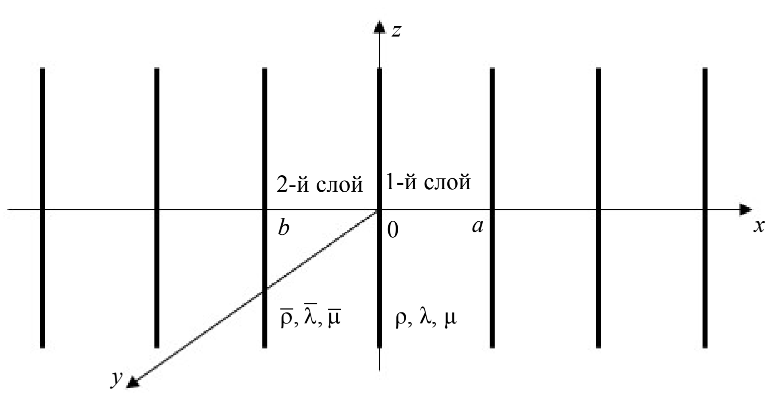

Рис. 1. Модель слоистой структуры.

Слоистая среда, представленная на рис. 1, в отношении своих упругих свойств является кристаллом гексагональной симметрии, то есть для описания ее полного упругого поведения необходимо и достаточно задать пять упругих постоянных. Однако среда с микротрещинами может быть описана с помощью эффективных динамических модулей упругости, расчет которых является непростой задачей и достигается на основе методов статистической механики [15] и метода самосогласованного поля [16].

Волновое уравнение для продольной волны, распространяющейся в слоистой структуре, имеет следующий вид:

$$\rho\frac{\partial^2\xi_l}{\partial t^2}-\left(\lambda+2\mu\right)\Delta\xi_l=0,$$

где ξ_l — вектор продольного смещения, $\Delta\xi_l = \mathrm{graddiv}(\xi_l)$.

Общее решение для волнового уравнения для продольной волны запишем через частное решение, которое разделено на косинусную (симметричную) и синусоидальную (несимметричную) части относительно середины слоев [3].

Для слоя материала 1 имеем следующие выражения для продольных смещений в направлении оси x и z:

$$\xi_{lx}=P(z)e^{-ikx},\quad \xi_{lz}=\frac{P'(z)}{ik}e^{-ikx},\quad \xi_{tx}=-\frac{Q'(z)}{ik}e^{-ikx},\quad \xi_{tz}=Q(z)e^{-ikx}, \qquad (1)$$

где ξ_{lx}, ξ_{lz} — продольные и ξ_{lx}, ξ_{lz} — поперечные смещения в направлении x и z соответственно, k — волновое число. Причем:

$$P\left(z\right)=A\cos\alpha\left(z-\frac{a}{2}\right)+B\sin\alpha\left(z-\frac{a}{2}\right),\ \alpha^2=k_l^2-k^2,$$
$$Q\left(z\right)=C\cos\beta\left(z-\frac{a}{2}\right)+D\sin\beta\left(z-\frac{a}{2}\right),\ \beta^2=k_t^2-k^2, \qquad (2)$$

где A, B, C, D — пока неопределенные постоянные; k_l, k_t — волновые числа продольной и поперечной волн соответственно.

Выражения для компонент тензора механических напряжений для первого слоя:

$$\sigma_{xz}=2\mu\left(P'(z)+\frac{k^2-\beta^2}{2ik}Q(z)\right)e^{-ikx},\quad \sigma_{yz}=0,\quad \sigma_{zz}=\left(\frac{\lambda k_l^2+2\mu\alpha^2}{ik}P(z)+2\mu Q'(z)\right)e^{-ikx}. \qquad (3)$$

Аналогичные параметры во второй среде для уравнений (1) — (3) обозначаются с чертой сверху.

Для описания поведения упругих смещений и механических напряжений на границах между слоями введем неоднородные граничные условия, описывающие неполную передачу компонент упругих смещений при сохранении передачи механических напряжений для каждого слоя структуры:

$$\xi_x(0)=\overline{\xi_x(0)}-\frac{\overline{\sigma_{xz}(0)}}{KGT},\quad \sigma_{xz}(0)=\overline{\sigma_{xz}(0)},$$
$$\xi_z(0)=\overline{\xi_z(0)}-\frac{\overline{\sigma_{zz}(0)}}{KGN},\quad \sigma_{zz}(0)=\overline{\sigma_{zz}(0)}, \qquad (4)$$

где KGT, KGN — тангенциальный и нормальный коэффициенты жесткости.

Нормальный коэффициент жесткости определяет передачу нормальных составляющих упругих смещений, а тангенциальный — передачу касательных составляющих. Коэффициенты жесткости зависят от коэффициента перфорации, характеризующего степень сплошности между прилегающими средами структуры «сталь—графит», а также от величины шероховатости.

Разрывы в передаче упругих смещений на плоской границе двух упругих полупространств возникают за счет совокупности взаимодействия выступов и впадин микрорельефа. Выступы и впадины микрорельефа можно смоделировать введением величины шероховатости в коэффициенты жесткости. Тогда смоделированная шероховатость будет определяться средним расстоянием между соседними неоднородностями на контактирующих поверхностях [17].

Построим графические зависимости нормального (рис. 2) и тангенциального (рис. 3) коэффициентов жесткости от величины шероховатости R_z.

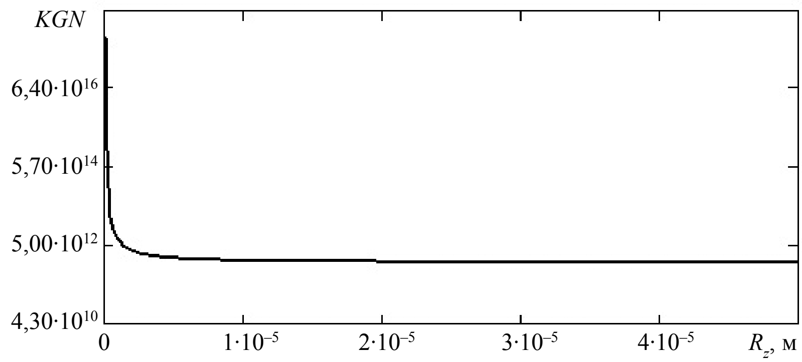

Рис. 2. Зависимость нормального коэффициента жесткости от величины шероховатости.

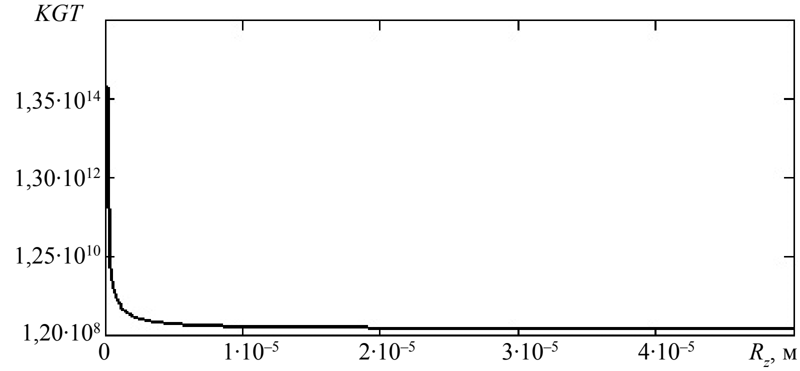

Рис. 3. Зависимость тангенциального коэффициента жесткости от величины шероховатости.

В данной работе при дальнейших расчетах величина шероховатости принималась равной R_z = 40 мкм, а среднее расстояние между соседними неоднородностями на контактирующих поверхностях равным 0,1 мкм.

Как видно из графических зависимостей на рис. 2 и 3, при R_z = 40 мкм оба коэффициента жесткости имеют минимальные значение, что говорит о нарушенной сплошности между средами, которая обуславливается наличием выступов и впадин на поверхности рассматриваемых сред.

Введем в рассмотрение также граничные условия периодичности, которые описывают непрерывное поведение упругих смещений и механических напряжений на границе слоев:

$$\begin{aligned} &\xi_x(a) = \overline{\xi_x(b)},\ \sigma_{xz}(a) = \overline{\sigma_{xz}(b)}, \\ &\xi_z(a) = \overline{\xi_z(b)},\ \sigma_{zz}(a) = \overline{\sigma_{zz}(b)}, \end{aligned} \tag{5}$$

то есть указанные величины в первом слое при $z = a$ должны равняться тем же величинам во втором слое при $z = b$. Подставляя компоненты для упругих смещений (1) и механических напряжений (3) в неоднородные граничные условия (4), получаем 8 уравнений для постоянных $A, B, C, D, \overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D},$ которые распадаются на продольную и поперечную волны [18].

Распространение продольной волны параллельно слоям. Пусть в направлении оси z распространяется продольная волна. Для продольной волны коэффициенты B и C в первой и во второй среде равны 0. Тогда с учетом условия $B = C = \overline{B} = \overline{C} = 0$ продольные смещения в (1) будут четны относительно средины слоев, благодаря чему в слоистой структуре будет иметь место только сжатие. Тогда подставляя соответствующие четные компоненты упругих смещений и механических напряжений в неоднородные граничные условия, получаем четыре уравнения для продольной волны [1]:

$$Aik\cos\left(\alpha\frac{a}{2}\right)-D\beta\cos\left(\beta\frac{a}{2}\right)=\bar{A}\left[ik\cos\left(\bar{\alpha}\frac{b}{2}\right)+\frac{2ik\bar{\mu}\bar{\alpha}\sin\left(\bar{\alpha}\frac{b}{2}\right)}{KGT}\right]+\bar{D}\left[\frac{\bar{\mu}\left(k^2-\bar{\beta}^2\right)\sin\left(\bar{\beta}\frac{b}{2}\right)}{KGT}-\bar{\beta}\cos\left(\bar{\beta}\frac{b}{2}\right)\right],$$

$$A\alpha\sin\left(\alpha\frac{a}{2}\right)-Dik\sin\left(\beta\frac{a}{2}\right)=\bar{A}\left[\frac{\left(\bar{\lambda}\bar{k}_l^2+2\bar{\mu}\bar{\alpha}^2\right)\cos\left(\bar{\alpha}\frac{b}{2}\right)}{KGN}-\bar{\alpha}\sin\left(\bar{\alpha}\frac{b}{2}\right)\right]-\bar{D}\left\{ik\sin\left(\bar{\beta}\frac{b}{2}\right)-\frac{2ik\bar{\mu}\bar{\beta}\cos\left(\bar{\beta}\frac{b}{2}\right)}{KGN}\right\},$$

$$A2\mu\alpha ik\sin\left(\alpha\frac{a}{2}\right)+D\mu\left(k^2-\beta^2\right)\sin\left(\beta\frac{a}{2}\right)=-\bar{A}2\bar{\mu}\bar{\alpha}ik\sin\left(\bar{\alpha}\frac{b}{2}\right)+\bar{D}\bar{\mu}\left(k^2-\bar{\beta}^2\right)\sin\left(\bar{\beta}\frac{b}{2}\right),$$

$$A\left(\lambda k_l^2+2\mu\alpha^2\right)\cos\left(\alpha\frac{a}{2}\right)+D2\mu\beta ik\cos\left(\beta\frac{a}{2}\right)=\bar{A}\left(\bar{\lambda}\bar{k}_l^2+2\bar{\mu}\bar{\alpha}^2\right)\cos\left(\bar{\alpha}\frac{b}{2}\right)+\bar{D}2\bar{\mu}\bar{\beta}ik\cos\left(\bar{\beta}\frac{b}{2}\right).$$

Составим из этих четырех уравнений детерминант и приравняем его к нулю. Очевидно, что система четырех уравнений является однородной и совместной, то есть всегда имеет решение:

$$\begin{vmatrix}
ik\cos\alpha\left(\frac{a}{2}\right) & -\beta\cos\beta\left(\frac{a}{2}\right) & ik\cos\bar{\alpha}\left(\frac{b}{2}\right)+\frac{2\bar{\mu}\bar{\alpha}ik\sin\bar{\alpha}\left(\frac{b}{2}\right)}{KGT} & \frac{\bar{\mu}\left(\bar{k}^2-\bar{\beta}^2\right)\sin\bar{\beta}\left(\frac{b}{2}\right)}{KGT}-\bar{\beta}\cos\bar{\beta}\left(\frac{b}{2}\right)\\
\alpha\sin\alpha\left(\frac{a}{2}\right) & -ik\sin\beta\left(\frac{a}{2}\right) & \frac{\left(\bar{\lambda}\bar{k}_l^2+2\bar{\mu}\bar{\alpha}^2\right)\cos\bar{\alpha}\left(\frac{b}{2}\right)}{KGN}-\bar{\alpha}\sin\bar{\alpha}\left(\frac{b}{2}\right) & ik\sin\bar{\beta}\left(\frac{b}{2}\right)-\frac{2\bar{\mu}\bar{\beta}ik\cos\bar{\beta}\left(\frac{b}{2}\right)}{KGN}\\
2\mu\alpha ik\sin\alpha\left(\frac{a}{2}\right) & \mu\left(k^2-\beta^2\right)\sin\beta\left(\frac{a}{2}\right) & -2\bar{\mu}\bar{\alpha}ik\sin\bar{\alpha}\left(\frac{b}{2}\right) & \bar{\mu}\left(\bar{k}^2-\bar{\beta}^2\right)\sin\bar{\beta}\left(\frac{b}{2}\right)\\
\left(\lambda k_l^2+2\mu\alpha^2\right)\cos\alpha\left(\frac{a}{2}\right) & 2\mu\beta ik\cos\beta\left(\frac{a}{2}\right) & \left(\bar{\lambda}\bar{k}_l^2+2\bar{\mu}\bar{\alpha}^2\right)\cos\bar{\alpha}\left(\frac{b}{2}\right) & 2\bar{\mu}\bar{\beta}ik\cos\bar{\beta}\left(\frac{b}{2}\right)
\end{vmatrix}=0.$$

Решая данный определитель разложением по первой строке с учетом граничных условий периодичности (5), получим дисперсионное уравнение, определяющее значение скорости продольной волны $c_l=\omega/k$ (ω — частота):

$$4\left(\mu-\bar{\mu}\right)^2X\bar{X}\left[1-\frac{\bar{k}_l^2\operatorname{ctg}\left(\frac{\bar{\beta}b}{2}\right)}{KGN}\right]+\omega^2\rho\left[\frac{\omega^2\rho}{k^2}-4\left(\mu-\bar{\mu}\right)\right]\bar{X}\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\beta a}{2}\right)\left[1-\frac{k^2\operatorname{ctg}\left(\frac{\bar{\alpha}b}{2}\right)}{KGT}\right]+\omega^2\bar{\rho}\times$$
$$\times\left[\frac{\omega^2\bar{\rho}}{k^2}+4\left(\mu-\bar{\mu}\right)+\frac{\bar{\rho}k^2\operatorname{ctg}\left(\frac{\bar{\alpha}b}{2}\right)}{KGT}\right]X\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\bar{\beta}b}{2}\right)-\frac{\omega^4\rho\bar{\rho}}{k^2\bar{k}_l^2}\left[Y\operatorname{tg}\left(\frac{\bar{\beta}b}{2}\right)+\bar{Y}\operatorname{tg}\left(\frac{\beta a}{2}\right)\right]\left[1-\frac{\rho\bar{k}_l^2\operatorname{ctg}\left(\frac{\bar{\alpha}b}{2}\right)}{KGN}\right]=0, \tag{6}$$

где введены следующие обозначения:

$$X=k^2\operatorname{tg}\left(\frac{\beta a}{2}\right)+\alpha\beta\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha a}{2}\right),\ \bar{X}=k^2\operatorname{tg}\left(\frac{\bar{\beta}b}{2}\right)+\bar{\alpha}\bar{\beta}\operatorname{tg}\left(\frac{\bar{\alpha}b}{2}\right),$$

$$Y=k^2\operatorname{tg}\left(\frac{\beta a}{2}\right)-\bar{\alpha}\beta\operatorname{tg}\left(\frac{\bar{\alpha}b}{2}\right),\ \bar{Y}=k^2\operatorname{tg}\left(\frac{\bar{\beta}b}{2}\right)-\alpha\bar{\beta}\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha a}{2}\right).$$

Дисперсионное уравнение (6) определяет волновое число продольной волны при любых значениях толщин слоев рассматриваемой структуры «сталь—графит». Если в данном уравнении коэффициенты жесткости *KGT*, *KGN*→∞, что соответствует сплошному контакту на границе между средами, то получим дисперсионное уравнение для однородной среды, что соответствует результатам, полученным в [1].

Решим дисперсионное уравнение (6) относительно волнового числа и построим графическую зависимость скорости продольной волны c_l от относительной толщины слоя $n = \dfrac{a+b}{a}$ при распространении волны параллельно слоям (рис.4).

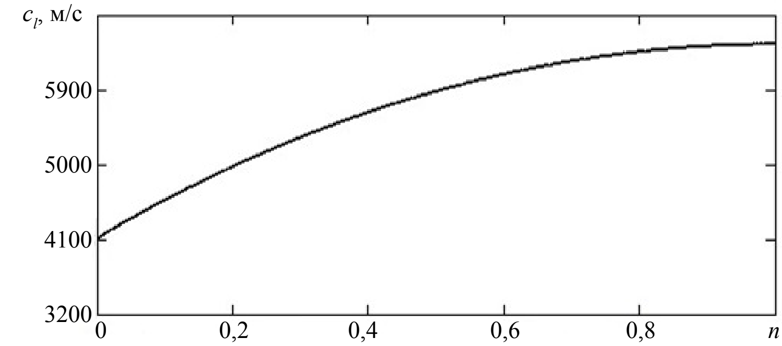

Рис. 4. Зависимость скорости продольной волны от относительной толщины слоя при распространении параллельно слоям.

Ранее, в [2, 3], вид данной графической зависимости приводил к некоторым ошибкам, которые заключались в том, что при увеличении относительной толщины слоя зависимость начинала убывать, то есть скорость продольной волны в структуре «сталь—графит» начинала стремиться к значению скорости в графите, что противоречит физическому смыслу при прохождении волны из более плотной среды (сталь) в более мягкую (графит). Полученная зависимость используется в задачах определения физико-механических характеристик (модуль упругости, коэффициент Пуассона, модуль Юнга) материалов на основе акустических измерений.

Распространение продольной волны перпендикулярно слоям. Пусть в направлении оси x распространяется продольная волна. Как уже было сказано, для такой волны коэффициенты B и C в первой и во второй средах равны 0. При распространении продольной волны перпендикулярно слоям, отличной от нуля будет только компонента упругого смещения $\xi_{lz}^{\perp} = P(z)e^{-ikx}$ [19]. Для случая поперечной волны, в которой смещение параллельно слоям, отличной от нуля будет компонента упругого смещения $\xi_{tz}^{\perp} = Q(z)e^{-ikx}$. При такой геометрии распространения волн, их распространение можно рассматривать независимо друг от друга [20].

Как известно из [21], если матрица-функция $A(t)$ периодична, то есть $A(t) \equiv A(t+T)$, то любая ее фундаментальная матрица $\Phi(t)$ имеет вид $\Phi(t) = \Psi(t)e^{Bt}$, где B — постоянная, а $\Psi(t)$ — непрерывно дифференцируемая функция. Данное утверждение описывает теорему Флоке.

Тогда, согласно теореме Флоке, в выражениях, описывающих распространение волн перпендикулярно слоистой структуре (1), величины $P(z)$ и $Q(z)$ должны быть периодическими функциями с периодом структуры $h = a + b$. Неоднородные граничные условия и условия периодичности должны выполняться для амплитуд $\xi_{lx}^{\perp}$ и $\sigma_{xz}^{\perp}$ в продольной волне, и для амплитуд $\xi_{tz}^{\perp}$ и $<\sigma_{zz}^{\perp}$ в поперечной волне.

Подставляя соответствующие компоненты для случая перпендикулярного распространения продольной волны в неоднородные граничные условия (4), получаем уравнения для коэффициентов A и D в первой и во второй средах:

$$Aik\cos\left(\alpha\frac{a}{2}\right) - D\beta\cos\left(\beta\frac{a}{2}\right) = \bar{A}\left[ik\cos\left(\bar{\alpha}\frac{b}{2}\right) + \frac{2ik\overline{\mu}\overline{\alpha}\sin\left(\bar{\alpha}\frac{b}{2}\right)}{KGT}\right] + \bar{D}\left[\frac{\bar{\mu}\left(k^2-\bar{\beta}^2\right)\sin\left(\bar{\beta}\frac{b}{2}\right)}{KGT} - \bar{\beta}\cos\left(\bar{\beta}\frac{b}{2}\right)\right],$$

$$A\cos\left(\alpha\frac{a}{2}\right)\left[1+\frac{1}{KGN}\left(\frac{\bar{\lambda}\bar{k}_l^2+2\bar{\mu}\bar{\alpha}^2}{ik}\right)\right]-D\sin\left(\beta\frac{a}{2}\right)=\bar{A}\cos\left(\bar{\alpha}\frac{b}{2}\right)-\bar{D}\left[\sin\left(\beta\frac{a}{2}\right)+2\bar{\mu}\bar{\beta}\cos\left(\bar{\beta}\frac{b}{2}\right)\right],$$

$$A4ik\mu\alpha\sin\left(\alpha\frac{a}{2}\right)-D\left(k^2-\beta^2\right)\sin\left(\beta\frac{a}{2}\right)=\bar{A}4ik\bar{\mu}\bar{\alpha}\sin\left(\bar{\alpha}\frac{b}{2}\right)-\bar{D}\left(k^2-\bar{\beta}^2\right)\sin\left(\bar{\beta}\frac{b}{2}\right),$$

$$A\left(\lambda k_l^2+2\mu\alpha^2\right)\cos\left(\alpha\frac{a}{2}\right)+D2\mu\beta ik\cos\left(\beta\frac{a}{2}\right)=\bar{A}\left(\bar{\lambda}\bar{k}_l^2+2\bar{\mu}\bar{\alpha}^2\right)\cos\left(\bar{\alpha}\frac{b}{2}\right)+\bar{D}2\bar{\mu}\bar{\beta}ik\cos\left(\bar{\beta}\frac{b}{2}\right).$$

Из полученных уравнений для коэффициентов A и D для первой и второй сред составим детерминант и приравняем его к нулю:

$$\begin{vmatrix} ik\cos\alpha\left(\frac{a}{2}\right) & -\beta\cos\beta\left(\frac{a}{2}\right) & ik\cos\bar{\alpha}\left(\frac{b}{2}\right)+\dfrac{2\bar{\mu}\bar{\alpha}ik\sin\bar{\alpha}\left(\frac{b}{2}\right)}{KGT} & \dfrac{\bar{\mu}\left(\bar{k}^2-\bar{\beta}^2\right)\sin\bar{\beta}\left(\frac{b}{2}\right)}{KGT}-\bar{\beta}\cos\bar{\beta}\left(\frac{b}{2}\right) \\ \cos\left(\alpha\frac{a}{2}\right)\left[1+\dfrac{1}{KGN}\left(\dfrac{\bar{\lambda}\bar{k}_l^2+2\bar{\mu}\bar{\alpha}^2}{ik}\right)\right] & -\sin\left(\beta\frac{a}{2}\right) & \cos\left(\bar{\alpha}\frac{b}{2}\right) & -\sin\left(\beta\frac{a}{2}\right)+2\bar{\mu}\bar{\beta}\cos\left(\bar{\beta}\frac{b}{2}\right) \\ 4ik\mu\alpha\sin\left(\alpha\frac{a}{2}\right) & -\left(k^2-\beta^2\right)\sin\left(\beta\frac{a}{2}\right) & 4ik\bar{\mu}\bar{\alpha}\sin\left(\bar{\alpha}\frac{b}{2}\right) & -\left(k^2-\bar{\beta}^2\right)\sin\left(\bar{\beta}\frac{b}{2}\right) \\ \left(\lambda k_l^2+2\mu\alpha^2\right)\cos\alpha\left(\frac{a}{2}\right) & 2\mu\beta ik\cos\beta\left(\frac{a}{2}\right) & \left(\bar{\lambda}\bar{k}_l^2+2\bar{\mu}\bar{\alpha}^2\right)\cos\bar{\alpha}\left(\frac{b}{2}\right) & 2\bar{\mu}\bar{\beta}ik\cos\bar{\beta}\left(\frac{b}{2}\right) \end{vmatrix}=0.$$

Решая данный определитель разложением по первой строке с учетом граничных условий периодичности (5), получим дисперсионное уравнение (7) для продольной волны, распространяющейся перпендикулярно слоям структуры «сталь—графит»:

$$\cos\left(k_l a\right)\cos\left(\bar{k}_l b\right)\left[\frac{\left(\lambda+2\mu\right)k_l}{KGT}+1\right]+\frac{1-\chi_1^2}{2\chi_1}\sin\left(k_l a\right)\sin\left(\bar{k}_l b\right)\left[\frac{\left(\bar{\lambda}+2\bar{\mu}\right)\bar{k}_l}{KGN}-1\right]-\cos\left[k\left(a+b\right)\right]=0, \quad (7)$$

где $\chi_1=\dfrac{\left(\bar{\lambda}+2\bar{\mu}\right)\bar{k}_l}{\left(\lambda+2\mu\right)k_l}$.

Если в данном дисперсионном уравнении (7) устремить коэффициенты жесткости к бесконечности, $KGT, KGN\to\infty$, что будет соответствовать распространению волны в однородной среде, которая описывается классическими неразрывными граничными условиями, то получим дисперсионное уравнение для волны в однородной среде, что согласуется с результатами, представленными в [3].

Дисперсионное уравнение (7) определяет волновое число для продольной волны $k_l^{\perp}=\omega/c_l^{\perp}$, распространяющейся перпендикулярно слоям структуры. Решая данное уравнение относительно волнового числа, можно построить графическую зависимость скорости продольной волны $c_l^{\perp}$ от относительной толщины слоя n (рис. 5).

Как видно из данной графической зависимости, значение скорости продольной волны в случае распространения перпендикулярно слоям при увеличении относительной толщины слоя начинает возрастать, что согласуется с экспериментальными данными, приведенными в [18, 22]. В случае однородной среды вид данной графической зависимости сохраняется, однако значение скорости продольной волны несколько выше, чем в неоднородной среде, что связано с наличием переотражений волн между слоями и рассеянием на структурных неоднородностях среды [23].

Имея полученные зависимости скорости продольной волны от относительной толщины слоя материала образца контроля, можно перейти к задаче о нахождении скорости поверхностной волны. Однако для рассмотрения этого случая необходимо знать скорости поперечных волн, вертикальной и горизонтальной поляризации. Контроль физико-механических характеристик материала с помощью поверхностной волны имеет очень важное значение, так как в этом случае с достаточной точностью можно получить интересующие характеристики [24]. Это обусловлено тем, что

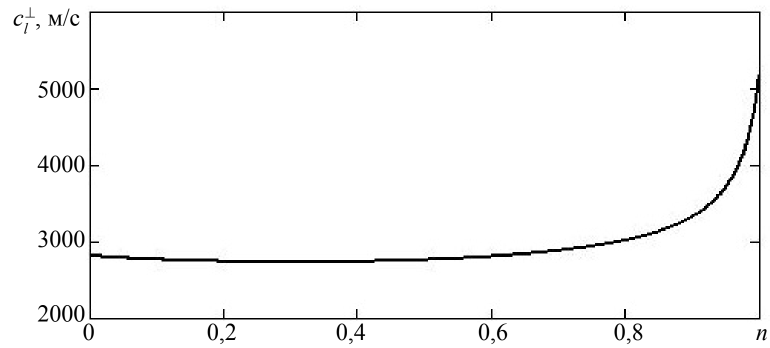

Рис. 5. Зависимость скорости продольной волны от относительной толщины слоя при распространении перпендикулярно слоям.

вся энергия поверхностной волны локализуется в приповерхностном слое образца контроля толщиной порядка двух длин волн, что дает существенную зависимость параметров поверхностной волны от свойств слоя, в котором она распространяется.

ВЫВОДЫ

1. Показано влияние на абсолютные значения фазовых скоростей продольных волн таких параметров микротрещин, как величина шероховатости, взаимодействующих в приближении «линейного скольжения» краев трещин и других неоднородностей среды.

2. Решена задача о нахождении скорости продольной волны при двух вариантах распространения (параллельно и перпендикулярно слоям) в неоднородной среде с объемной трещиноватостью путем решения относительно волнового числа дисперсионного уравнения.

3. Полученные зависимости используются применительно к задачам нахождения основных физико-механических характеристик материала на основе акустических измерений, а также в качестве основного материала для проведения предизмерительных изысканий с целью получения максимального объема информации без применения средств ультразвукового контроля.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аббакумов К.Е., Вагин А.В.* Волновые процессы в мелкослоистой среде // Изв. СПбГЭТУ «ЛЭТИ». 2018. № 8. С. 87—91.

2. *Рытов С.М.* Акустические свойства мелкослоистой среды // Акустический журн. 1956. Т. 2. № 1. С. 71—83.

3. *Бреховских Л.М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 340 с.

4. *Jose M.* Carcione anisotropic Q and velocity dispersion of finely layered media // Geophysical Prospecting. 1992. V. 40. P. 761—783.

5. *Luk'yashko O.A., Saraikin V.A.* Transient one-dimensional wave processes in a layered medium // Journal of Mining Science. 2007. V. 43. P. 145—158.

6. *Гузь А.Н.* Упругие волны в телах с начальными напряжениями. Киев: Наукова думка, 1986. 536 с.

7. *Brun M., Guenneau S., Movchan A.B., Bigoni D.* Dynamics of structural interfaces: Filtering and focussing effects for elastic waves // J. Mech. Physics Solids. 2010. V. 58. P. 1212—1224.

8. *Panasyuk O.N.* Propagation of Quasishear Waves in Prestressed Materials with Unbonded Layers // Int. Appl. Mech. 2011. V. 47. P. 276—282.

9. *Кристенсен Р.* Введение в механику композитов. М.: Мир, 1982. 336 с.

10. *Guz A.N., Rushitsky J.J.* Short Introduction to Mechanics of Nano-composites. Rosemead: Scien. and Academic Publishers, 2013. 280 p.

11. *Панасюк О.Н.* Анализ влияния граничных условий на распространение волн в слоистых композитных материалах // Прикладная механика. 2014. № 4. С. 52—58.

12. *Akbarov S.D., Guliev M.S., Kepceler T.* Propagation of axisymmetric waves in an initially twisted circular compound bimaterial cylinder with a soft inner and a stiff outer constituents // Mech. Comp. Mater. 2011. V. 46. P. 627—638.

13. *Khlybov A. A.* Studying the Effect of Microscopic Medium Inhomogeneity on the Propagation of Surface Waves // Russian Journal of Nondestructive Testing. 2018. V. 54. No. 6. P. 385—393. [*Хлыбов А.А.* Исследование влияния микронеоднородности среды на распространение поверхностных волн // Дефектоскопия. 2018. № 6. С. 3—10.]

14. *Петрашень Г.И.* Распространение волн в анизотропных упругих средах. Л.: Наука, 1980. 280 с.
15. *Чабан И.А.* Расчет эффективных параметров микронеоднородных сред методом самосогласованного поля // Акустический журн. 1965. № 1. С. 102—109.
16. *Чабан И.А.* Метод самосогласованного поля в применении к расчету эффективных параметров микронеоднородных сред // Акустический журн. 1964. № 3. С. 351—358.
17. *Аббакумов К.Е., Кириков А.В., Львов Р.Н.* Преломление упругих волн на плоской границе раздела с нарушенной адгезией твердых сред // Изв. СПбГЭТУ «ЛЭТИ». 2003. № 1. С. 10—17.
18. *Evel'son R.L.* A fine-layered medium of finite-thickness in an electromagnetic field // Journal of communications technology and electronics. 2015. V. 60. I. 6. P. 552—559.
19. *Вавакин А.С., Салганик Р.Л.* Эффективные упругие характеристики тел с изолированными трещинами, полостями и жесткими неоднородностями // Механика твердого тела. 1978. № 2. С. 95—107.
20. *Шермергор Т.Д.* Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977. 400 с.
21. *Floquet M.G.* Sur les equations differentielles lineaires a coefficients periodiques // Annales scientifiques de I'Ecole Normale Superieure. 1983. V. 12. P. 47—88.
22. *Купрадзе В.Д., Соболев С.Л.* Упругие волны на границах двух сред // Тр. Сейсмического ин-та АН СССР. 1930. № 10. С. 58—67.
23. *Викторов И.А.* Физические основы применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике. М.: Наука, 1996. 196 с.
24. *Викторов И.А.* Звуковые поверхностные волны в твердых телах. М.: Наука, 1981. 287 с.