

# ПРИМЕНЕНИЕ ПЛЕНОЧНЫХ ПЬЕЗОПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ ДЛЯ ВОЗБУЖДЕНИЯ И РЕГИСТРАЦИИ БЕГУЩИХ УПРУГИХ ВОЛН В СИСТЕМАХ АКТИВНОГО МОНИТОРИНГА ПРОТЯЖЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

© 2020 г. А.А. Еремин<sup>1,\*</sup>, Е.В. Глушков<sup>1,\*\*</sup>, Н.В. Глушкова<sup>1,\*\*\*</sup>

<sup>1</sup>*Институт математики механики и информатики, Кубанский государственный университет, Россия  
350040 Краснодар, ул. Ставропольская, 149  
E-mail: \*eremin\_a\_87@mail.ru; \*\*evg@math.kubsu.ru; \*\*\*nvg@math.kubsu.ru*

Поступила в редакцию 10.08.2020; после доработки 10.08.2020  
Принята к публикации 31.08.2020

В настоящее время активно развиваются технологии непрерывного ультразвукового мониторинга состояния протяженных конструкций с помощью бегущих упругих волн, возбуждаемых и регистрируемых сетью пленочных пьезоэлементов. Бегущие волны взаимодействуют с неоднородностями (дефектами) любой природы, выявляя их наличие, возникающими при дифракции отраженными и рассеянными волнами, а изменение их характеристик указывает на деградацию прочностных свойств материала в процессе эксплуатации. На основе измерений, проведенных на лабораторных образцах, демонстрируются возможности пленочных пьезоэлементов генерировать зондирующие сигналы различного вида, а также варьировать их амплитудно-частотными характеристиками в широком частотном диапазоне. Математическое моделирование волновых процессов проводится в рамках интегрального подхода, базирующегося на явном интегральном и асимптотическом представлении возбуждаемых волн через фурье-символ матрицы Грина рассматриваемой волноводной структуры. Приводятся данные экспериментальных измерений, подтверждающие применимость разработанной на этой основе упрощенной модели в двухмодовом диапазоне возбуждения фундаментальных волн Лэмба.

*Ключевые слова:* пьезоактуаторы, пьезосенсоры, волны Лэмба, матрица Грина.

**DOI:** 10.31857/S0130308220100036

## ВВЕДЕНИЕ

Многие элементы инженерных сооружений, требующих повышенного контроля состояния в процессе эксплуатации (аэрокосмические изделия, объекты атомной и химической промышленности, трубопроводы, емкости для хранения агрессивных веществ и др.), представляют собой протяженные тонкостенные конструкции. Наряду с традиционными методами ультразвукового (УЗ) неразрушающего контроля (НК) с помощью контактных [1] и бесконтактных (air-coupled) [2] УЗ преобразователей, перемещаемых вдоль поверхности, непрерывный мониторинг состояния таких конструкций может осуществляться с помощью бегущих упругих волн, возбуждаемых и регистрируемых сетью пленочных пьезоэлементов, которые встраиваются в конструкцию или размещаются на ее поверхности еще на этапе проектирования. Активные элементы сети (пьезоактуаторы) возбуждают бегущие волны (поверхностные акустические волны релеевского типа (ПАВ), антисимметричные и симметричные волны Лэмба, горизонтально-поляризованные SH-волны (волны Лява), интерфейсные волны Стоунли и др.). Они распространяются на сравнительно большие расстояния и взаимодействуют с неоднородностями (дефектами) любой природы, выявляя их наличие возникающими при дифракции отраженными и рассеянными волнами, которые регистрируются элементами сети. Их характеристики (частотный спектр, диаграммы рассеяния, резонансные частоты рассеяния и др.) зависят от местоположения, вида, размера и формы дефекта, т.е. несут информацию, необходимую для его обнаружения, локализации и оценки потенциальной угрозы. В отличие от традиционных методов НК (NDT — non-destructive testing), мониторинг бегущими волнами можно вести непрерывно без прекращения или ограничения эксплуатации inspected объекта.

Данные соображения легли в основу подхода, получившего в зарубежной литературе название guided wave Structural Health Monitoring (SHM) или активный мониторинг состояния конструкции бегущими волнами [3—5]. Теоретические и экспериментальные основы использования волн Лэмба для диагностики тонкостенных конструкций были заложены в 1960-е годы И.А. Викторовым, монография которого [6] стала одной из отправных точек развития SHM-технологий. Однако активные исследования и создание первых прототипов SHM-систем начались только в 1990-е годы, когда сложились необходимые технические условия: появление легких пленочных пьезоэлементов и микрокомпьютерных систем быстрой обработки данных.

Кроме того, в 1970—80-е годы активно развивались методы ультразвуковой акустической эмиссии (АЭ), основанные на регистрации событий АЭ, сопровождающих возникновение и рост трещин, распределенной сетью пассивных датчиков. В этом плане АЭ-методики, позволяющие непрерывно «слушать» конструкцию и локализовать места возникновения скрытых дефектов по времени прихода АЭ-сигнала к различным элементам сети, близки к методам волнового мониторинга с помощью SHM-систем. Главное отличие состоит в том, что SHM-технологии базируются не на пассивном прослушивании, а на активном мониторинге бегущими волнами.

Задачи регистрации рассеянных дефектами волн и обработки принятых сигналов примерно те же, что и в системах регистрации событий АЭ, но информация, полученная с помощью SHM-технологий, намного богаче, чем получаемая АЭ системами. Преимущество обеспечивается использованием пленочных пьезоэлементов, работающих в значительно более широком частотном диапазоне, чем традиционные узкополосные УЗ зонды, а также возможностью регулярного повторения зондирующих посылок (непрерывный мониторинг) с варьированием их частотными спектрами. При этом распространение бегущих волн на значительные расстояния позволяет контролировать большие площади относительно редкой сетью пьезоэлементов сети.

Еще одно (не являющееся преимуществом) отличие использования бегущих волн состоит в усложнении математического аппарата, требуемого для обработки полученных данных. В то время, как используемые в NDT объемные упругие волны не обладают дисперсией и, поэтому, их распространение, отражение и преломление хорошо описывается законами лучевой теории [7], в том числе и в многослойных [8], и анизотропных [9] средах, дисперсия бегущих волн приводит к изменению формы зондирующего сигнала в процессе распространения, что не дает возможности хорошо локализовать дефект по времени прихода рассеянных волн без учета зависимости их скорости от частоты. Кроме того, просвечивание объемными волнами проводится на сравнительно высоких частотах, на которых длина волны зондирующего сигнала меньше линейных размеров искомого дефекта, что позволяет достаточно четко оконтуривать зону повреждения [10] или получать томографическое изображение внутренних объектов [11].

В SHM длина бегущих волн существенно больше толщины элементов тонкостенных конструкций и, соответственно, скрытых в них повреждений. Поэтому для оценки размера дефекта, восстановления его формы и определения типа (трещина, полость, включение) требуется обработка принятых сигналов в рамках математических моделей, адекватно описывающих процессы возбуждения, распространения и дифракции бегущих волн в рассматриваемой слоистой структуре [12]. Для этой цели используются как аналитические методы (построение дисперсионных зависимостей и собственных форм нормальных мод, в том числе и для многослойных волноводов с анизотропией упругих свойств, наличием микроструктуры и т.п. [13,14]), так и численные методы, базирующиеся на сеточной аппроксимации, такие как метод конечных элементов (МКЭ). Последний используется для моделирования процесса возбуждения бегущих волн пленочным пьезоактуатором [15] и решения задач дифракции на препятствиях произвольной формы [16,17], однако анализ распространения волн в протяженных структурах с помощью МКЭ требует сравнительно больших вычисленных затрат, объем которых резко возрастает с ростом частоты. Но главное, МКЭ, как и другие сеточные методы, не дает физически наглядной волновой структуры решения, требуя дополнительной обработки численных результатов для выделения отдельных мод и определения их характеристик.

Обе эти задачи — моделирование действия пленочного пьезоактуатора и представление возбуждаемого волнового поля в виде суммы бегущих волн с амплитудными множителями, учитывающими характеристики источника, решаются в рамках интегрального подхода, базирующегося на представлении решения в виде контурного интеграла от произведения фурье-символов матрицы Грина рассматриваемой волноводной структуры и поверхностной нагрузки (контактных напряжений), моделирующей действие пьезоактуатора. Применение теории вычетов к этим интегралам дает представление в виде суммы бегущих волн с амплитудными множителями, однозначно определяемыми характеристиками волновода и источника.

Данный подход развивался в южно-российской школе волновой динамики Воровича—Бабешко [18, 19], в первую очередь, в приложении к задачам виброрейсморазведки и проектирования акустоэлектронных устройств на поверхностных волнах. Его потенциал был продемонстрирован и в ходе международного научного сотрудничества с группами, разрабатывающими и внедряющими SHM-технологии, которое было начато еще в 1990-е годы и особенно плодотворно развивалось в 2010-х годах [20—23]. Учитывая, что в отечественной литературе публикации по проблематике активного SHM на основе бегущих волн все еще сравнительно редки [24, 25], цель настоящей статьи — показать возможности пленочных пьезоэлементов и разрабатываемых

полуаналитических моделей на примере результатов, полученных в лаборатории волновой диагностики Института математики, механики и информатики КубГУ.

## ПЛЕНОЧНЫЕ ПЬЕЗОЭЛЕМЕНТЫ КАК АКТИВНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ И СЕНСОРЫ

Наиболее часто в SHM-приложениях используются пленочные пьезокерамические элементы круговой или прямоугольной формы толщиной от 0,2 до 1,0 мм, изготовленные на основе цирконата-титаната свинца (PZT) и его модификаций [4] (рис. 1а). Для этого материала характерны сильные пьезоэлектрические свойства и высокое значение диэлектрической проницаемости. Для приложений, в которых хрупкость пьезокерамических преобразователей является критическим недостатком, например, при установке пьезоэлемента на криволинейную поверхность или встраивании его между слоями композитного материала, разрабатываются гибкие пьезокомпозитные преобразователи: SMART Layer (Acellent Technologies Inc., США), DuraAct (PI Ceramic GmbH, Германия) (рис. 1б). Также развиваются технологии напыления или печати пленочных преобразователей специальными пьезочернилами непосредственно на контролируруемую конструкцию (материал PiezoPaint, Meggitt Sensing Systems, Дания).

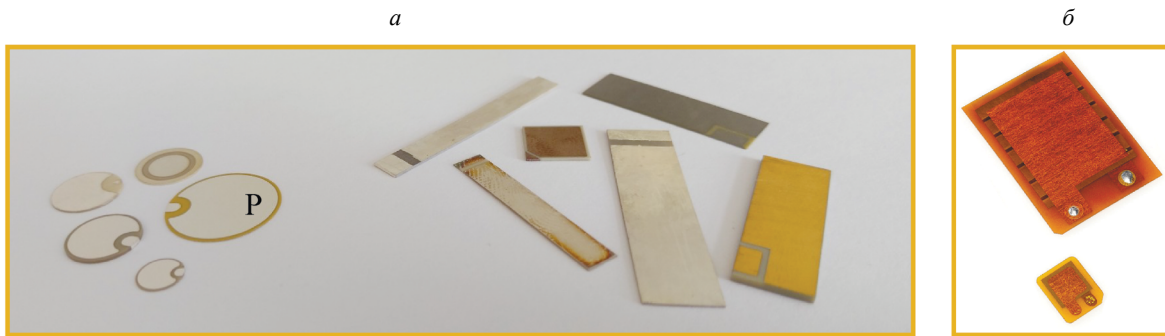


Рис. 1. Круговые и прямоугольные пленочные пьезокерамические элементы (PZT) (а); пьезоэлементы из гибкого материала DuraAct (б).

Для проведения экспериментов по возбуждению и измерению бегущих упругих волн с помощью пленочных пьезокерамических элементов достаточно сравнительно скромного набора оборудования. Во-первых, требуется генератор сигналов произвольной формы — управляющих посылок  $v_0(t)$  (Tektronix AFG 3021B) и цифровой запоминающий осциллограф (Tektronix TDS2014C или USB-устройство АКПП-75442B); здесь и далее в скобках указаны приборы, использованные для получения приведенных ниже результатов. В качестве дополнительных устройств, позволяющих улучшить соотношение сигнал/шум и, тем самым, обеспечить покрытие больших площадей разреженной сетью сенсоров, можно использовать высокочастотные амплитудные предусилители (Актаком AVA-1745), которые подключаются между генератором сигналов и пленочным пьезоэлементом, или постусилители напряжения, аналогичные тем, что используются в акустоэмиссионных системах (ГлобалТест GT200A).

В данной статье экспериментальные и теоретические результаты приводятся для образца из алюминия (пластина  $600 \times 600 \times 2$  мм<sup>3</sup>, модуль Юнга  $E = 70$  ГПа, коэффициент Пуассона  $\nu = 0,33$ , плотность  $\rho = 2700$  кг/м<sup>3</sup>), к поверхности которого приклеены 5 тонких вертикально поляризованных пьезопреобразователей круговой формы (PiCeramics GmbH, Германия; пьезокерамика PIC151, радиус  $a = 8$  мм, толщина  $d = 0,25$  мм) (рис. 2). Конструктивной особенностью этих преобразователей является форма электродов: электрод с нижней поверхности частично выведен наверх, что позволяет припаивать оба проводника (сигнальный и экран-заземление) к дневной поверхности пьезоэлемента (на рис. 1а такой тип элементов, использовавшихся в экспериментах, отмечен буквой «Р»). Пьезоэлементы P1-P4 расположены в вершинах квадрата  $200 \times 200$  мм<sup>2</sup>, моделируя типичный для SHM-мониторинга участок распределенной сети активных пьезосенсоров; пятый пьезоэлемент P5 приклеен в центре квадрата. Для уменьшения отражения от краев пластины вдоль них нанесен тонкий слой пластилина шириной около 40 мм.

Для идентификации геометрических параметров и типа дефектов, обнаруженных с помощью бегущих волн, а также для определения эффективных упругих модулей материала, важно иметь

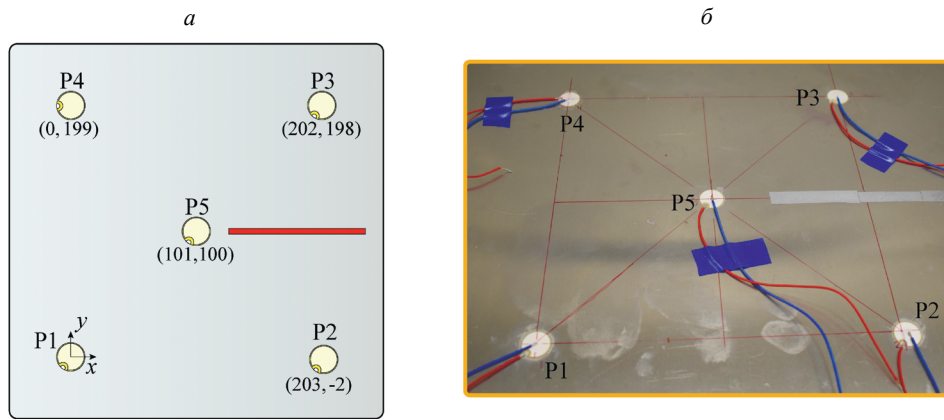


Рис. 2. Схематичное изображение экспериментального образца (а) и его фотография (б).

возможность генерировать и измерять волновые поля в достаточно широком диапазоне частот (от нескольких десятков до нескольких сотен килоггерц для элементов тонкостенных конструкций различной толщины). Пленочные пьезоэлементы предназначены для работы в широком диапазоне частот, позволяя, в зависимости от управляющих посылок, генерировать как узкополосные, так и широкополосные волновые пакеты. В то же время как при использовании традиционных контактных УЗ преобразователей резонансного типа для этого потребовалось бы несколько устройств с различными центральными частотами.

В качестве примера на рис. 3а в градиентной шкале показана амплитуда функции  $\log |H(f, \zeta)|$ , где  $H(f, \zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w(x, t) e^{i(\zeta x + 2\pi f t)} dx dt$  — результат применения частотно-волнового анализа к скорости вертикальных смещений  $w(x, t)$  на поверхности образца при возбуждении волнового поля пьезоэлементом P5;  $(f, \zeta)$  — плоскость частоты  $f$  и волнового числа  $\zeta$ . Измерение сигналов  $w(x, t)$  проводилось сканирующим лазерным виброметром Polytec PSV-500 вдоль горизонтального отрезка, идущего вправо от источника P5 (рис. 2); в рамках научного сотрудничества использовался лазерный виброметр Института механики Университета им. Гельмута Шмидта, Гамбург, Германия [22]. Для возбуждения колебаний на пьезоэлемент подавалась сверхширокополосная тональная посылка  $v_0(t)$  в форме прямоугольного импульса длительностью 0,2 мкс, усиленная до 100 В.

Локальные максимумы функции  $\log |H(f, \zeta)|$  (темные области на рис. 3а) указывают на дисперсионные кривые  $\zeta = \zeta_n(f)$ , описывающие зависимость волновых чисел возбуждаемых бегущих волн от частоты. Для наглядности штриховыми линиями показаны дисперсионные кривые волн

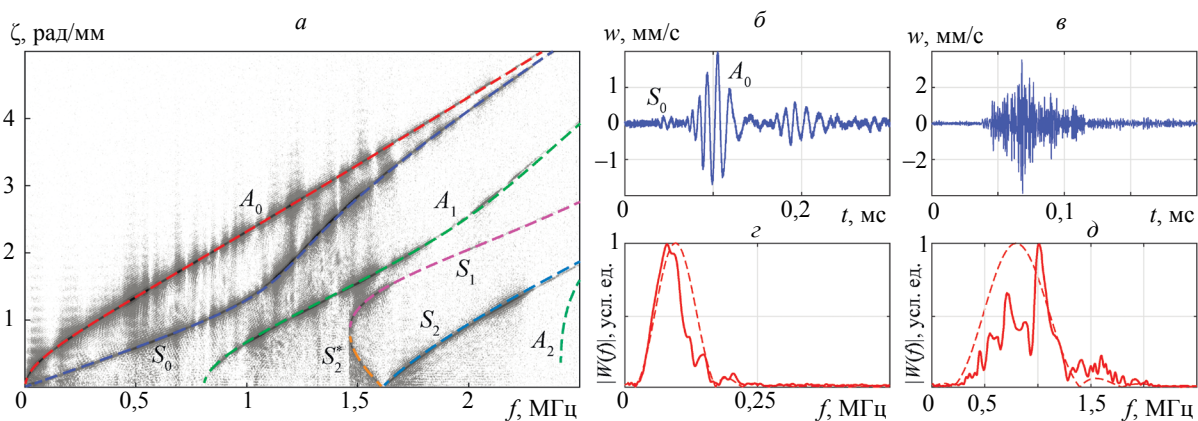


Рис. 3. Примеры использования пьезоэлементов: определение дисперсионных характеристик волн Лэмба (а); сигналы, возбуждаемые тональными посылками с центральной частотой  $f_c = 100$  и  $800$  кГц (б, в); амплитуды их частотных спектров (г, д), штриховыми линиями показаны спектры исходных посылок.

Лэмба (антисимметричные моды  $A_n$  и симметричные  $S_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ), рассчитанные с помощью программного комплекса WAVES-L [26]. Данный пример показывает, что пленочный пьезоэлемент позволяет генерировать бегущие волны как на низких частотах (темные области в левой части графика, соответствующие фундаментальным модам  $A_0$  и  $S_0$ ), так и на высоких частотах, достигающих 2 МГц (темные участки, соответствующие антисимметричной волне  $A_1$  и симметричным модам  $S_1$  и  $S_2$ ).

Работу актуатора в узкополосном режиме иллюстрируют графики сигналов  $w(t)$ , измеренных на расстоянии 200 мм от пьезоэлемента P5 (рис. 3б, в) и амплитуд их частотных спектров  $|W(f)|$ , нормированных к максимальному значению (рис. 3з, д, сплошные линии). В обоих случаях пленочный пьезоэлемент приводился в действие тональными посылками амплитудой 100 В в форме двух циклов синуса, модулированных синус-окном с центральной частотой  $f_c = 100$  кГц (рис. 3б, з) и 800 кГц (рис. 3в, д):

$$v_0(t) = \sin(2\pi f_c t) \sin(\pi f_c t / 2), \quad 0 < t < 2T, \quad T = 1 / f_c. \quad (1)$$

Штриховыми линиями на графиках (з) и (д) показаны амплитуды спектров исходных тональных посылок  $|V_0(f)|$ .

В случае низкочастотной посылки ( $f_c = 100$  кГц) на графике принятого сигнала несложно выделить волновые пакеты, соответствующие фундаментальным модам  $A_0$  и  $S_0$ , а также пакет волн, отраженных от границы образца, с максимумом амплитуды при  $t = 0,2$  мс (см. рис. 3б). В случае второй центральной частоты ( $f_c = 800$  кГц) спектр входного сигнала захватывает частотный диапазон правее точек отсечки высших мод  $A_1$ ,  $S_1$  и  $S_2$ , которые возбуждаются наряду с  $A_0$  и  $S_0$ . Для соотнесения отдельных участков волнового пакета той или иной моде проводится частотно-временной анализ регистрируемых сигналов, например, с использованием непрерывного вейвлет-преобразования [27, 28]:

$$W(t, f) = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-\infty}^{\infty} w(\tau) \psi^* \left( \frac{\tau - t}{T} \right) d\tau, \quad (2)$$

где  $\psi(t)$  — ядро вейвлет-преобразования, локализованное в окрестности нуля,  $T = 1/f$  — период колебаний, звездочкой обозначено комплексное сопряжение.

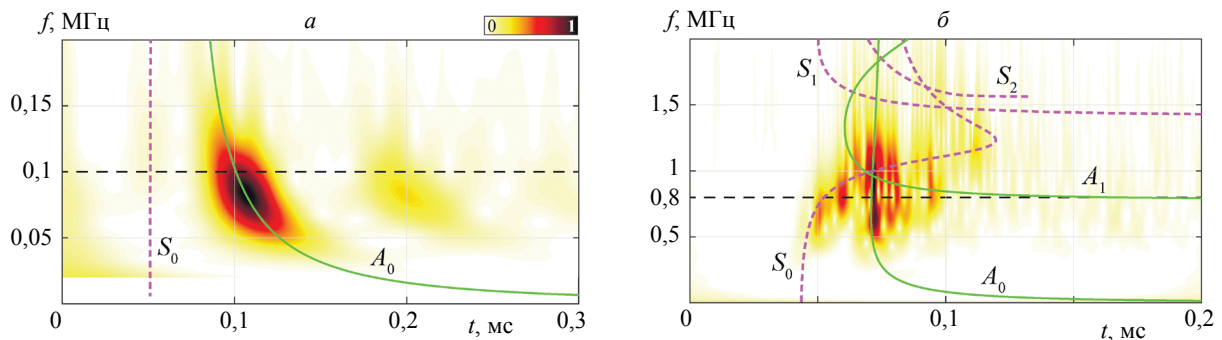


Рис. 4. Скалограммы сигналов, показанных на рис. 3б, в (графики а и б соответственно).

На рис. 4 приводится пример нормированных поверхностей  $|W(t, f)|$  (скалограмм сигналов  $w(t)$ ), полученных в результате применения преобразования (2) с ядром Габора  $\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sqrt{\frac{f_0}{\lambda}} \exp \left[ -\frac{(f_0/\lambda)^2}{2} t^2 + i f_0 t \right]$  к сигналам, приведенным на рис. 3б, в ( $f_0 = 1$  кГц,  $\lambda = \pi \sqrt{2/\ln 2}$ , время  $t$  задается в миллисекундах). Сплошными и штриховыми линиями на них нанесены теоретические частотные зависимости времени задержки  $t_{gr}(f)$  для антисимметричных и симметричных волн Лэмба, которые показывают ожидаемое время прихода соответствующих частотных компонент волнового пакета в точку регистрации. Время задержки обратно пропорционально групповой скорости:  $t_{gr}(f) = \frac{r}{c_{gr}(f)} + T_{sig} + T_{trig}$ , где  $r = 200$  мм — расстояние от центра актуатора P5 до точки измерения сигнала лазерным виброметром,  $c_{gr}(f)$  — частотная зависимость групповой скорости

соответствующей моды;  $T_{sig} = \frac{1}{f_c}$  — половина длительности тональной посылки  $v_0(t)$  в форме (1),  $T_{trig} = 4 \cdot 10^{-6}$  с — время задержки после получения триггер-сигнала блоком обработки сигналов лазерного виброметра. Горизонтальной штриховой линией показано значение центральной частоты управляющей посылки  $v_0(t)$ . Видно, что в двухмодовом частотном диапазоне локальные максимумы  $|W(t, f)|$  (темные участки на поверхностях рис. 4) хорошо согласуются с соответствующими теоретическими кривыми. В то же время, в окрестности частоты  $f = 1$  МГц у возбуждаемых одновременно мод  $S_0$ ,  $A_0$  и  $A_1$  (см. темные области на рис. 3а) близки значения групповых скоростей: на поверхности  $|W(t, f)|$  наблюдается типичная интерференционная картина (многочисленные темные пятна) [28].

Для иллюстрации возможности использования пленочных пьезоэлементов в качестве сенсоров на рис. 5 приводятся результаты измерения бегущих волн пьезоэлементом Р1 при их возбуждении элементом Р4. Показаны принятые нестационарные сигналы  $v(t)$  (электрическое напряжение, возникающее при деформации пьезопластины сенсора Р1, верхний ряд графиков) и амплитуды их частотных спектров  $|V(f)|$  (нижний ряд). На рис. 6 приводятся скалограммы этих сигналов.

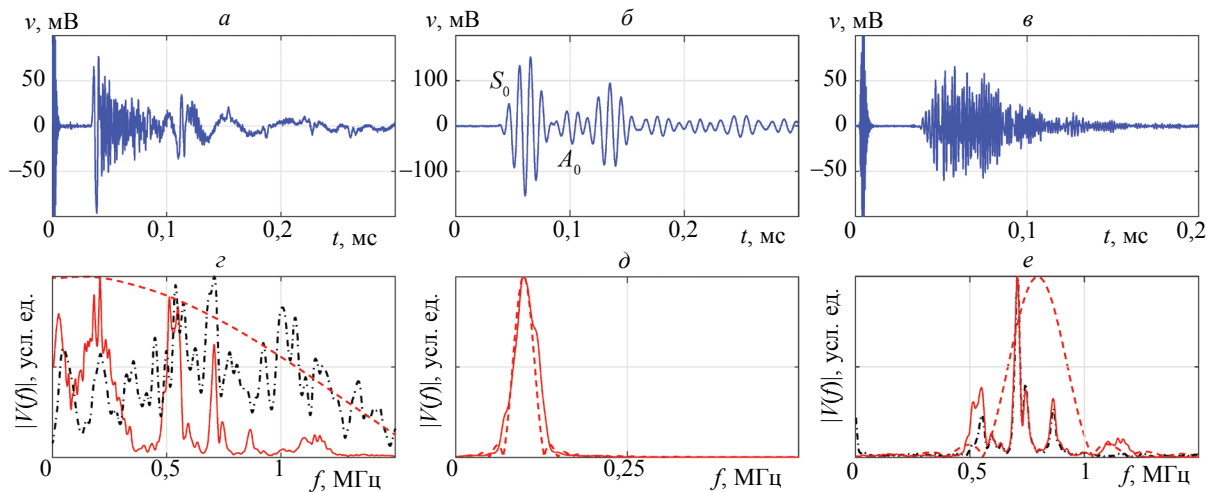


Рис. 5. Примеры использования пленочного пьезоэлемента в качестве сенсора.

В первом случае (рис. 5а, з) на актуатор подавалась широкополосная прямоугольная импульсная посылка длительностью 0,5 мкс и амплитудой 100 В. Во втором и третьем случаях использовались узкополосные посылки в форме пяти циклов синуса, модулированных окном Ханна, с теми же центральными частотами  $f_c = 100$  кГц (рис. 5б, д) и 800 кГц (рис. 5в, е), что и в примерах рис. 3:

$$v_0(t) = \frac{1}{2} \sin(2\pi f_c t) [1 - \cos(2\pi f_c t / 5)], \quad 0 < t < 5T, \quad T = 1 / f_c. \quad (3)$$

Амплитуды спектра исходных управляющих посылок показаны на рис. 5з—е штриховыми линиями.

Хотя амплитуда спектра широкополосной посылки очерчивается плавной монотонно убывающей кривой, в спектре принятого сигнала наблюдается типичное для размерных источников чередование локальных максимумов и минимумов, связанное со сложением волн, приходящих от разных краев пьезоактуатора в фазе или противофазе (рис. 5з). Для оценки диапазона чувствительности пленочного пьезоэлемента, используемого в качестве сенсора, на этом же рисунке штрихпунктирной линией показан спектр вертикальной скорости смещений поверхности  $|W(f)|$ , измеренной лазерным виброметром на таком же расстоянии 200 мм от преобразователя Р5 при его возбуждении посылкой (3). Сопоставление частотных диапазонов этих спектров показывает, что пленочный пьезосенсор менее чувствителен к высокочастотным компонентам волнового сигнала. Тем не менее в диапазоне частот до 1,25 МГц рассматриваемые пьезопреобразователи вполне способны детектировать как низкочастотные, так и высокочастотные волновые поля на значительных

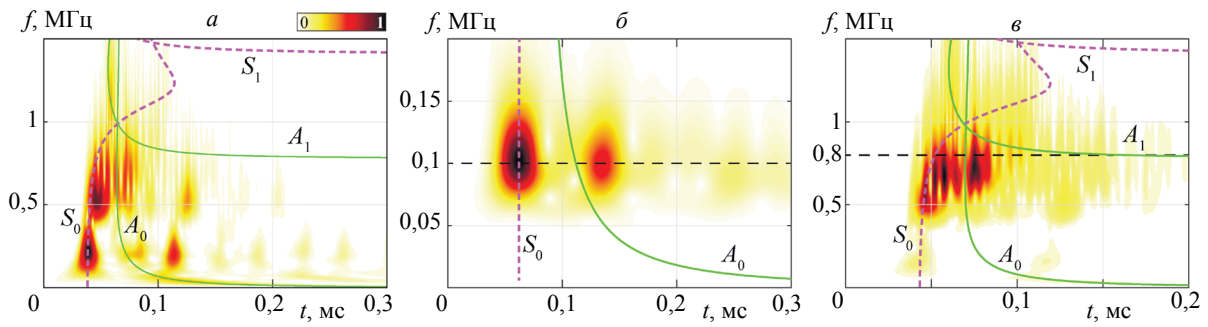


Рис. 6. Скалограммы сигналов, показанных на рис. 5а–в (графики а–в соответственно); здесь  $t_{gr} = \frac{r}{c_{gr}} + T_{sig}$ ,  $T_{sig} = 0,25 \cdot 10^{-6}$  с (а),  $T_{sig} = \frac{5}{2f_c}$  — половина длительности тональной посылки  $v_0(t)$  в форме (3) (б, в).

расстояниях от источника колебаний. Этот вывод подтверждают результаты измерения бегущих волн, генерируемых низкочастотной и высокочастотной узкополосной посылкой, приведенные на рис. 5б, в.

Для оценки значения амплитудного предусилителя на рис. 5е штрихпунктирной линией показан частотный спектр сигнала, полученного сенсором P1 при подаче на актуатор посылки (3) с исходным уровнем входных напряжений в диапазоне  $\pm 5$  В. Здесь хоть и наблюдается ухудшение соотношения «сигнал-шум», но порога чувствительности в 0,1 мВ у USB-осциллографа АКИП-75442В достаточно, чтобы надежно детектировать соответствующие напряжения. Регистрируемые сигналы вполне пригодны для анализа, и спектральные компоненты, соответствующие окрестности центральной частоты возбуждающей тональной посылки, почти не теряются.

Общий вид скалограмм (см. рис. 6) в целом аналогичен результатам, приведенным на рис. 4. Из особенностей можно отметить выделение сигнала, соответствующего высшей моде  $A_1$  (темная область на рис. 6а в окрестности частоты  $f = 1,2$  МГц и времени  $t = 60$  мкс).

### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Протяженный элемент конструкции (пластина толщины  $h$ ) моделируется упругим слоем или пакетом слоев (слоистый композит), занимающим в декартовой системе координат  $\mathbf{x} = (x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$  полубесконечный объем  $D: -\infty < x, y < \infty, -h \leq z \leq 0$ . Координатная плоскость  $(x, y)$  совпадает с дневной поверхностью слоя, начало координат находится в центре области  $\Omega$  — области контакта пьезоактуатора с поверхностью; ось  $z$  совпадает с внешней нормалью. Волновое поле, возбуждаемое в слое пьезоактуатором, описывается вектором смещения  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ . Верхняя и нижняя поверхности слоя  $z = 0$  и  $z = -h$  свободны от напряжений  $\boldsymbol{\tau} = (\tau_{xz}, \tau_{yz}, \sigma_z) = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$  за исключением области  $\Omega$ . При деформации пленочного пьезоэлемента под действием управляющей электрической посылки  $v_0(t)$  в этой области возникают контактные напряжения

$$\boldsymbol{\tau}|_{z=0} = \mathbf{q}(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (4)$$

генерирующие волновое поле  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ , которое с помощью обратного преобразования Фурье по круговой частоте  $\omega = 2\pi f$  выражается через частотный спектр  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega)$ :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (5)$$

В рамках интегрального подхода частотный спектр представляется в виде свертки матрицы Грина рассматриваемой слоистой структуры  $k(\mathbf{x})$  с вектором поверхностной нагрузки  $\mathbf{q}$  или, эквивалентно, в виде контурного интеграла обратного преобразования Фурье от произведения их Фурье символов  $K = F_{xy}[k]$  и  $\mathbf{Q} = F_{xy}[\mathbf{q}]$  [18,19,30,31]:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) = F^{-1}[K \cdot \mathbf{Q}] = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} K(\alpha_1, \alpha_2, z) \mathbf{Q}(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i(\alpha_1 x + \alpha_2 y)} d\alpha_1 d\alpha_2. \quad (6)$$

Здесь  $F_{xy}$  — оператор преобразования Фурье по горизонтальным координатам  $x, y$ ; контуры интегрирования  $\Gamma_1, \Gamma_2$  идут в комплексных плоскостях  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  вдоль вещественных осей, отклоняясь от них при обходе вещественных полюсов  $\zeta_n$  элементов матрицы  $K$ . Столбцами  $\mathbf{k}_j$  матрицы Грина  $k = (\mathbf{k}_1 | \mathbf{k}_2 | \mathbf{k}_3)$  являются решения рассматриваемой краевой задачи для сосредоточенных поверхностных нагрузок, приложенных вдоль осей координат:  $\tau|_{z=0} = \mathbf{i}_j \delta(x, y)$ ,  $j=1,2,3$ , где  $\mathbf{i}_j$  — координатные орты,  $\delta(x, y)$  — дельта-функция Дирака.

Алгоритмы построения матрицы  $K$  для слоистых волноводов различного вида (многослойные, анизотропные, градиентные) приводятся в работах [29—32] и цитируемых в них статьях. Там же выводятся асимптотики интегралов (6) в дальней зоне, которые дают явные аналитические представления для бегущих волн, возбуждаемых нагрузкой  $\mathbf{q}$ :

$$\mathbf{u}(r, \varphi, z) = \sum_n \mathbf{a}_n(\varphi, z) e^{i\zeta_n r} / \sqrt{\zeta_n r} + O((\zeta_n r)^{-3/2}), \quad \zeta_n r \rightarrow \infty, \quad (7)$$

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ r = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1 = \alpha \cos \gamma \\ \alpha_2 = \alpha \sin \gamma \\ \alpha = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}, \quad 0 \leq \varphi, \gamma < 2\pi. \end{cases}$$

Для рассматриваемой алюминиевой пластины (изотропный случай) значения полюсов  $\zeta_n$  не зависят от угловой координаты  $\gamma$ , и амплитудные коэффициенты  $\mathbf{a}_n$  могут быть представлены в следующем виде:

$$\mathbf{a}_n = \sqrt{\frac{i}{2\pi}} \operatorname{res} K(-\alpha, \varphi, z)|_{\alpha=\zeta_n} \mathbf{Q}_n, \quad \mathbf{Q}_n = \mathbf{Q}(-\zeta_n, \varphi). \quad (8)$$

В анизотропном случае (композитные пластины, слоистые волоконно-армированные углепластики и т.п.) полюса зависят от  $\gamma$ , что приводит к более сложному (но по-прежнему явному аналитическому) представлению коэффициентов  $\mathbf{a}_n$  через вычеты подынтегральной функции в этих полюсах [30,31].

Каждое из слагаемых ряда (7) описывает цилиндрическую волну, распространяющуюся от источника с фазовой скоростью  $c_n = \omega / \operatorname{Re} \zeta_n$  и, если полюс комплексный, с экспоненциальным затуханием  $e^{-\operatorname{Im} \zeta_n r}$ . Полюса  $\zeta_n$ , играющие в изотропном случае роль волновых чисел, определяются как корни уравнения

$$\Delta(\alpha, \omega) = 0 \Rightarrow \alpha = \zeta_n(\omega), \quad (9)$$

где  $\Delta$  — общий знаменатель элементов матрицы  $K$ . Уравнение (9) совпадает с характеристическим (дисперсионным) уравнением, которое получается в рамках модального анализа при подстановке искомого собственного решения в форме с разделенными переменными  $\mathbf{u} = \mathbf{b}(\varphi, z) e^{i\omega r}$  в уравнения динамической теории упругости и однородные граничные условия для рассматриваемого волновода. Амплитудные коэффициенты  $\mathbf{a}_n$  совпадают с точностью до постоянных множителей с модальными собственными формами  $\mathbf{b}_n$ , но в отличие от последних они определяются однозначно, учитывая не только строение и свойства волновода (через матрицу  $K$ ), но и характеристики источника (через множитель  $\mathbf{Q}$ ).

При использовании представления (6) помимо реализации алгоритмов вычисления матрицы  $K$  требуется информация о распределении контактных напряжений  $\mathbf{q}$ . В рамках интегрального подхода задача определения контактных напряжений сводится к интегральному уравнению Винера—Хопфа [18,19], а в общем случае решается с помощью МКЭ [15, 33—35]. При этом в случае тонких и гибких пьезонакладок связанная электромеханическая контактная задача сводится к интегро-дифференциальным уравнениям, для решения которых разработаны и реализованы полуаналитические методы [20]. Однако наименее затратным является использование функций  $\mathbf{q}(x, y)$ , заданных без решения контактной задачи, которые тем не менее дают приемлемые для использования в разложении (7) значения констант  $\mathbf{Q}_n$ . Диапазон практической применимости такого упрощенного подхода ограничен низкими и средними частотами, а с ростом частоты (например, когда длина волны становится меньше диаметра актуатора) отличие численных результатов от экспериментальных становится существенным. Ниже приводятся экспериментальные и теоретические результаты, указывающие на пределы практической применимости такой упрощенной модели.



В силу того, что при деформации растяжения-сжатия вертикально поляризованного тонкого пьезоэлемента нормальные контактные напряжения  $\sigma_z$  малы, а радиальные касательные напряжения  $\tau_{rz}$  концентрируются на границах области контакта, одной из популярных является аппроксимация функции  $\mathbf{q}$  набором дельта-функций, распределенных вдоль границы. В плоском случае (полосовой актуатор полуширины  $a$ :  $|x| < a$ ,  $|y| < \infty$ ) — это модель сосредоточенных сил (pin-forced model):

$$\tau_{rz} = \tau_{xz} = q_1(x) = \tau_0[\delta(x-a) - \delta(x+a)]. \quad (10)$$

Коэффициент  $\tau_0(\omega)$  настраивается в ней в соответствии со спектром заданной посылки  $V_0(\omega)$  и свойствами пьезонакладки [4]. Аналогично, в случае прямоугольных, круговых и кольцевых актуаторов задаются наборы нормальных к границе  $\Omega$  точечных касательных сил [21—23, 36]:

$$\tau_{rz} = q_r(x, y) = \sum_{j=1}^N q_j \delta(x - x_j, y - y_j), \quad \mathbf{x}_j = (x_j, y_j, 0) \in \partial\Omega \quad (11)$$

или функций с сингулярностью на границе. Для кругового актуатора радиуса  $a$  в качестве радиальной компоненты  $q_r$  вектора нагрузки  $\mathbf{q} = (q_r \cos\varphi, q_r \sin\varphi, 0)$  можно взять  $q_r = q_0 \sqrt{1 - (r/a)^2}$  или

$$q_r = q_0 \delta(r - a), \quad (12)$$

где  $\delta(r-a)$  — кольцевая дельта-функция, обладающая свойством

$$2\pi \int_0^{\infty} f(r) \delta(r-a) r dr = f(a).$$

Это свойство позволяет получить фурье-символ  $\mathbf{Q}$  и, соответственно, амплитудные коэффициенты бегущих волн  $\mathbf{a}_n$  в представлении (7) в явном виде:

$$\begin{aligned} u_r &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(1)}(z) H_1^{(1)}(\zeta_n r), \\ & \hspace{15em} r > a, \\ u_z &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(2)}(z) H_0^{(1)}(\zeta_n r), \\ \mathbf{a}_n &= (a_n^{(1)}, a_n^{(2)}) = -(i\zeta_n M_n(z), S_n(z)) \zeta_n^2 Q_n / 2. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь  $u_r = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$  — радиальная компонента вектора смещений  $\mathbf{u}$ ,  $H_m^{(1)}$ ,  $m = 0, 1$  — функции Ханкеля,  $M_n$  и  $S_n$  — вычеты в полюсах  $\zeta_n$  функций  $M(\alpha, z)$  и  $S(\alpha, z)$ , входящих в представление элементов матрицы  $K$  (их явный вид для однородного изотропного слоя приводится в [22]),

$$Q_n = 2\pi i q_0 \int_0^{\infty} \delta(r-a) J_1(\zeta_n r) r dr = i q_0 J_1(\zeta_n a), \quad (14)$$

$J_1$  — функция Бесселя первого порядка.

В отличие от представления (7), функции Ханкеля в рядах (13) не заменены их асимптотикой в дальней зоне, поэтому эти ряды дают точное решение для  $r > a$ . При вычислениях в них удерживается конечное число слагаемых, соответствующих вещественным и близким к вещественным комплексным полюсам  $\zeta_n$ .

При больших  $N$  модель точечных сил (11) дает те же результаты для кругового актуатора, что и представление (12), то есть они эквивалентны. При этом модель точечных сил более гибкая, позволяя описывать действие некруговых и неосесимметричных источников. С другой стороны, явный вид (14) для коэффициентов  $Q_n$ , определяющих амплитуды  $\mathbf{a}_n$ , позволяет сравнительно легко определить частоты их оптимального возбуждения («sweet spots» по терминологии работы [4]; см. также следующий раздел).

Наиболее общим подходом к моделированию работы пьезосенсора является решение связанной электромеханической задачи о набегании поверхностных волн на пьезонакладку или встроенный пьезоэлемент. Использование МКЭ или сведение к интегральному уравнению позволяет получить строгое численное решение этой задачи, но ценой значительных вычислительных

затрат. Поэтому, как и в случае актуатора, в инженерной практике расчеты обычно проводятся на основе упрощенных моделей.

В пленочных пьезосенсорах основной отклик дает деформация растяжения-сжатия в плоскости  $(x, y)$ :  $\varepsilon = \partial u_x / \partial x + \partial u_y / \partial y$ . В предположении, что смещения тонкой приклеенной пьезонакладки совпадают со смещениями поверхности волновода, генерируемый сенсором сигнал аппроксимируется интегралом от деформации поверхности в области контакта  $\Omega$  [36]:

$$V(f) = \frac{A}{S} \iint_{\Omega} \varepsilon dx dy. \tag{15}$$

Здесь  $A$  — коэффициент, выражающийся через электромеханические и упругие модули пьезонакладки,  $S$  — площадь области  $\Omega$ . Производные компонент вектора смещений вычисляются, используя точные интегральные представления (5), (6) (численное интегрирование, ближняя зона) либо представление в виде суммы бегущих волн (7), (13). Последнее позволяет как получать суммарный сигнал, так и анализировать вклад отдельных мод.

Отметим, что лазерный виброметр измеряет нормальную компоненту скорости смещения поверхности в точке регистрации сигнала:  $w(t) = \partial u_z / \partial t$ , поэтому частотный спектр полученных сигналов выражается через нормальную компоненту смещений (5), (7) или (13) без дополнительного интегрирования по области  $\Omega$ :  $\dot{W}(f) = -i\omega u_z(\mathbf{x}, \omega)$ .

### ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ВЕРИФИКАЦИЯ

При проведении экспериментальных измерений предварительно определялись частоты оптимального возбуждения и регистрации (sweet spots) фундаментальных мод  $A_0$  и  $S_0$  для используемых образцов (см. рис. 2). На рис. 7а, б приводятся графики амплитуды спектра  $|V_A(f)|$  и  $|V_S(f)|$  для волновых пакетов, приносимых модами  $A_0$  и  $S_0$ , рассчитанные по формуле (15) для соответствующих слагаемых разложения (13), взятых при  $r = 100$  мм. Сплошными линиями в логарифмической шкале показаны результаты для кругового осесимметричного источника, который моделируется кольцевой дельта-функцией (11) при условии импульсного нагружения:  $v_0(t) = \delta(t)$ . Штриховыми линиями показаны аналогичные результаты для модели актуатора, учитывающей нарушение круговой симметрии из-за выведенного на поверхность электрода. В этом случае источник моделируется набором точечных сил (11), расставленных вдоль границы области  $\Omega_L$ , имеющей вид круга с лункой (штриховая линия на рис. 7в) [23]. Полярный угол  $\beta$  указывает направление от источника к приемнику.

Частотные зависимости, приведенные на рис. 7, иллюстрируют типичное для размерных источников чередование диапазонов максимального и минимального возбуждения каждой моды.

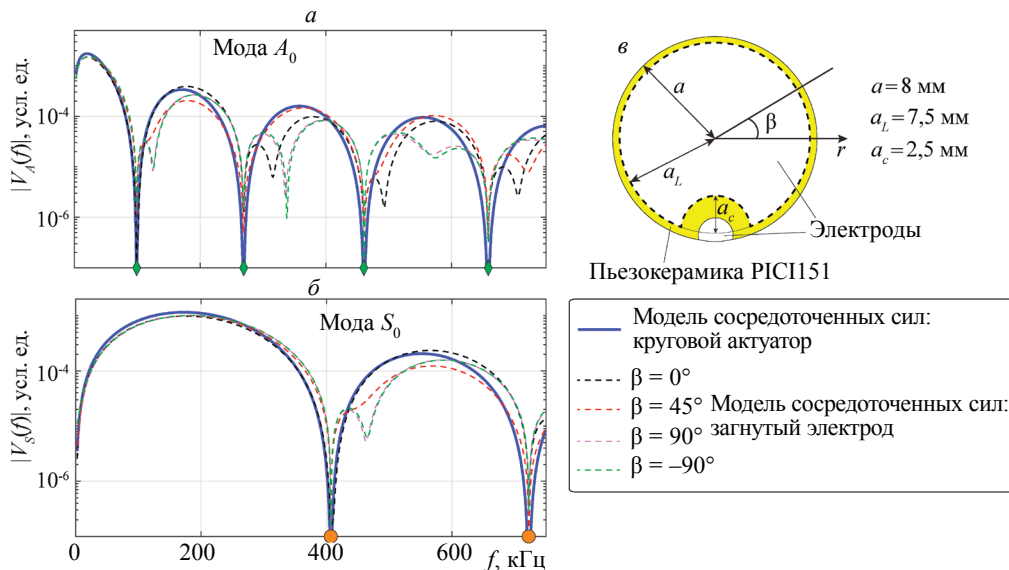


Рис. 7. Частотные спектры  $|V_A(f)|$  и  $|V_S(f)|$  для мод  $A_0$  (а) и  $S_0$  (б), рассчитанные в рамках модели точечных сил для кругового актуатора (сплошные линии) и при различной ориентации неосесимметричного источника (штриховые линии); форма кругового актуатора с выведенным на поверхность электродом заземления (в).

Для кругового источника (12) частоты максимумов и минимумов фактически определяются графиком функции Бесселя  $J_1$ , входящей в представление (14) амплитудного коэффициента  $Q_n$ . В рамках данной упрощенной модели волна Лэмба, соответствующая полюсу  $\zeta_n$ , не возбуждается на тех частотах, на которых  $\zeta_n a = r_j$ , где  $r_j, j = 1, 2, 3, \dots$  — нули функции Бесселя:  $J_1(r_j) = 0$  (на частотных осях они отмечены маркерами). При моделировании источника набором точечных сил (11), коэффициенты  $Q_n$  уже не выражаются через функцию Бесселя  $J_1$ , но спектры принятых сигналов (штриховые линии) по-прежнему минимальны в окрестности частот, отмеченных маркерами. Графики, приведенные на рис. 7а, б показывают, что в рассматриваемой части двухмодового диапазона  $0 < f < 600$  кГц неосесимметричность, связанная с выведенным электродом, не меняет положения точек минимума, но с ростом частоты отличие от осесимметричного решения становится все заметнее, особенно для частотного отклика  $|V_A(f)|$ . Ниже результаты экспериментальной верификации приводятся для компьютерной модели, учитывающей неосесимметричность источника.

Результаты измерений, подтверждающие теоретически предсказанные значения частот максимумов и минимумов возбуждения фундаментальных мод, а также соотношение амплитуд локальных максимумов, приводятся на рис. 8. Слева, на рис. 8а — результаты расчетов (фактически те же, что и на рис. 7, но не в логарифмическом масштабе, а нормированные на максимальные значения спектра моды  $A_0$ :  $\max|V_A(f)|$ ), справа, на рис. 8б — результаты измерения сенсором Р4 поверхностных волн, возбуждаемых элементом Р5 при импульсном нагружении прямоугольной посылкой  $v(t)$  длительностью 0,5 мкс, усиленной до амплитуды 100 В (также нормированные на экспериментальное значение  $\max|V_A(f)|$ ). Сплошными линиями показан спектр суммарного сигнала  $|V(f)|$ , штриховыми и штрихпунктирными линиями — спектры мод  $A_0$  и  $S_0$ . Такие же кривые получены и для сигналов, измеренных остальными сенсорами Р1, Р2 и Р3, расставленными по углам квадрата на том же расстоянии от источника Р5, что подтверждает воспроизводимость измерений и адекватность модели независимо от конкретного положения пьезоэлементов в сети и их ориентации.

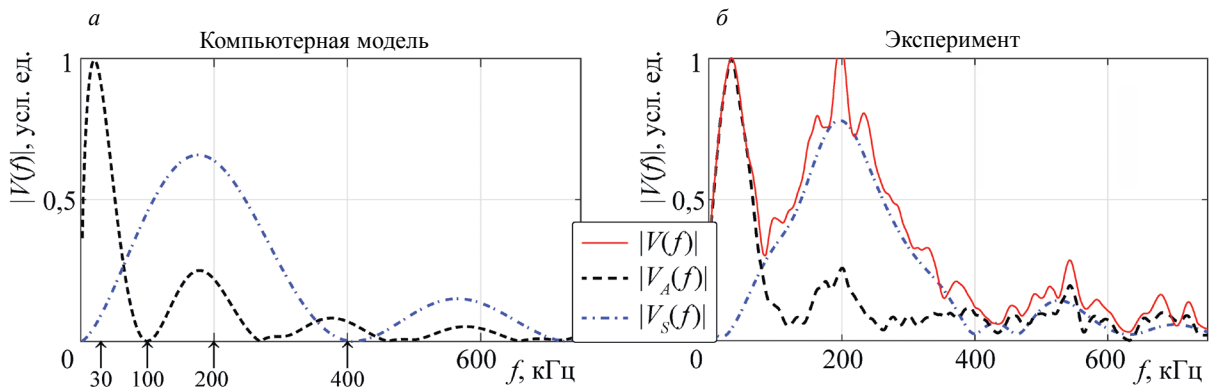


Рис. 8. Расчетные (а) и измеренные (б) нормированные частотные спектры сигналов, регистрируемых сенсором Р4 при импульсном нагружении актуатора Р5.

С ростом частоты групповые скорости мод стремятся к скорости волны Рэлея, сближаясь между собой. В результате, высокочастотные составляющие сигналов, принесенные к датчику волновыми пакетами разных мод, накладываются друг на друга (см., например, рис. 3в и рис. 5а), затрудняя выделение их частотных спектров. В приведенном примере сложности возникают при выделении спектра моды  $A_0$  при  $f > 400$  кГц (рис. 8б). Тем не менее сопоставление теоретических и экспериментальных результатов подтверждает хорошую предсказательную способность упрощенной модели в рассматриваемом двухмодовом диапазоне.

Стрелками на рис. 8а показаны частоты  $f = 30, 100, 200$  и  $400$  кГц, выбранные в качестве центральных для экспериментальной проверки моделирования нестационарных сигналов  $v(t)$ . Выбор этих частот обусловлен следующими соображениями:

частота  $f = 30$  кГц — первый локальный максимум спектра (sweet spot) антисимметричной моды  $A_0$ , причем в окрестности этой частоты  $S_0$  почти не возбуждается;

$f = 100$  кГц — минимум  $A_0$  и хорошая частота для возбуждения  $S_0$ ;

$f = 200$  кГц — первый локальный максимум спектра  $S_0$ , но при этом остается значительным и вклад  $A_0$ ;

$f = 400$  кГц — первый абсолютный минимум  $S_0$  и рядом третий максимум моды  $A_0$ , который намного меньше двух предыдущих, т.е. здесь уже трудно ожидать четкого проявления вклада  $A_0$  в экспериментальных данных.

На преобразователь P5 подавались узкополосные посылки (3) с выбранными центральными частотами  $f_c$ . Расчетные (сплошные линии) и измеренные (штриховые линии) нестационарные сигналы, принятые элементом P4, приведены в левой колонке рис. 9. В правой колонке показаны амплитуды частотных спектров исходных управляющих посылок  $|V_0(f)|$  (сплошные линии) и расчетных спектров  $|V_A(f)|$  и  $|V_S(f)|$ , нормированные на их глобальный максимум (штриховые и штрихпунктирные линии). Отметим, что спектры принятых сигналов равны произведению спектра посылки  $V_0$  на спектры, рассчитанные для импульсной посылки ( $V_0 \equiv 1$ ), приведенные на рис. 7 и 8.

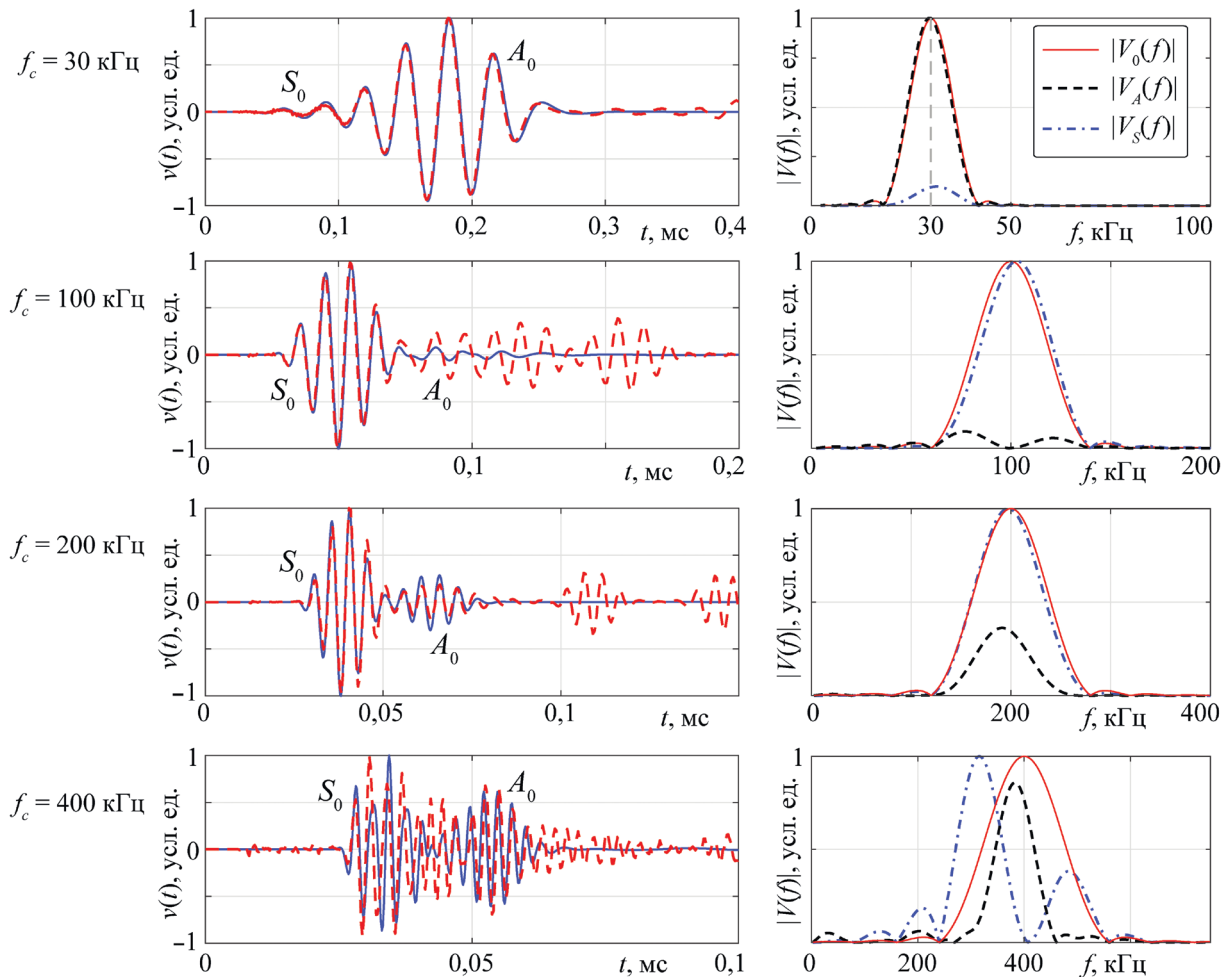


Рис. 9. Расчетные (сплошные линии) и экспериментальные (штриховые линии) нестационарные сигналы, регистрируемые сенсором P4 при возбуждении актуатора P5 узкополосными посылками (3) (левый столбец); соответствующие частотные спектры  $|V_0(f)|$ ,  $|V_A(f)|$  и  $|V_S(f)|$  (правый столбец).

Сопоставление с результатами эксперимента показывает хорошее совпадение для основных волновых пакетов, возбуждаемых на оптимальных частотах:  $A_0$  при  $f_c = 30$  кГц и  $S_0$  при  $f_c = 100$  и  $200$  кГц. Причем в последнем случае четко моделируется как основной для данной частоты волновой пакет  $S_0$ , так и приходящий чуть позже менее мощный сигнал  $A_0$ . Во втором и третьем случае при  $t > 0,1$  мс в экспериментальных данных наблюдаются всплески, которых нет на теоретических кривых. Они вызваны волнами, отраженными от краев пластины, которые не учитываются в используемой модели бесконечного упругого слоя. При необходимости их несложно добавить в математическую модель, поместив за пределами пластины мнимые источники зеркально относительно ее краев.

В последнем примере ( $f_c = 400$  кГц) волновые пакеты  $S_0$  и  $A_0$  все еще достаточно разнесены по времени, и поэтому вклад каждой из мод в расчетный сигнал хорошо различим. Однако в целом волновая картина уже существенно усложнена и экспериментальные данные сильно зашумлены. Тем не менее на временных отрезках прохождения основных пакетов по-прежнему наблюдается совпадение теоретических и экспериментальных сигналов по числу колебаний и их относительной амплитуде.

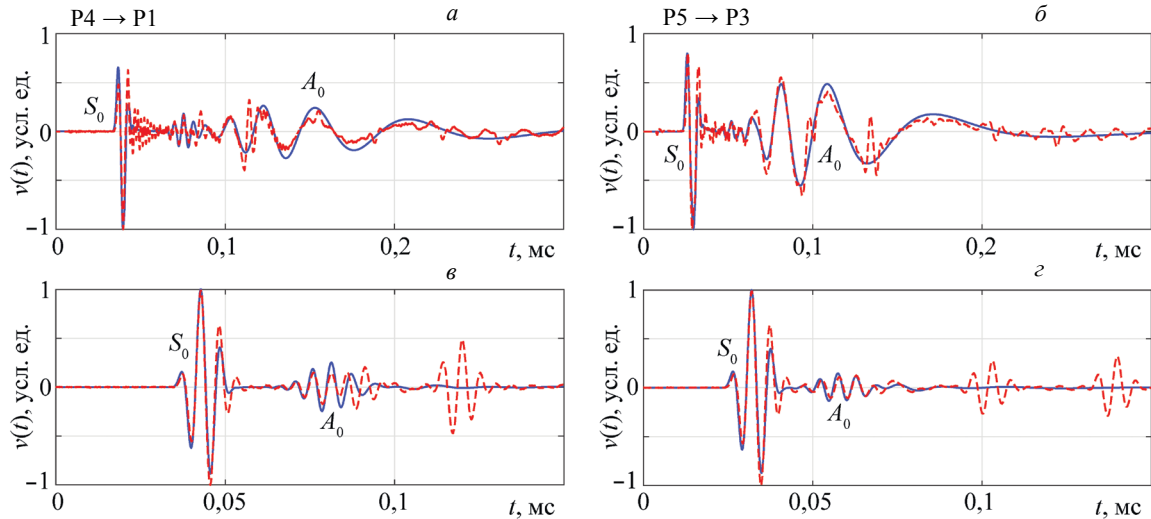


Рис. 10. Примеры моделирования (сплошная линия) и экспериментальной верификации (штриховая линия) сигналов для различных видов широкополосных и узкополосных тональных посылок и пар актуатор—сенсор.

Рис. 10 иллюстрирует возможность моделирования нестационарных сигналов для других видов управляющих посылок и пар актуатор — сенсор: (а) — широкополосное возбуждение прямоугольным импульсом длительностью 3 мкс и (б) — 4 мкс; (в, г) — узкополосное возбуждение посылкой (1) с центральной частотой  $f_c = 160$  кГц; (а, в) — пара P4 → P1 и (б, г) — пара P5 → P3. Как и ранее, при  $t > 0,1$  мс в экспериментальных результатах (штриховые линии) наблюдаются всплески, вызванные неучитываемыми в модели отраженными волнами, в то время как для идущих от источника основных волновых пакетов совпадение хорошее.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На образце, моделирующем типичный для SHM задач участок распределенной сети активных пьезосенсоров, проведены измерения, демонстрирующие возможность пленочных пьезоэлементов генерировать и принимать зондирующие сигналы различного вида, а также варьировать их амплитудно-частотными характеристиками в широком частотном диапазоне. Для рассматриваемых волновых процессов разработана и реализована компьютерная модель, базирующаяся на явных интегральных и асимптотических представлениях. Проведена экспериментальная верификация, подтверждающая применимость упрощенной версии данной модели (без строгого решения контактной задачи) для изотропных (металлических) образцов в двухмодовом частотном диапазоне. Возможность численного моделирования волноводных структур более сложного строения (слоистость, анизотропия, градиентность и др.) показана в работах [29—32].

Работа выполнена в рамках проекта № 0685-2020-0017 государственного задания Минобрнауки России № 075-00187-20-02 от 07.04.2020.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Базулин Е.Г. Применение метода двойного сканирования в ультразвуковом неразрушающем контроле металлов для восстановления изображений модельных дефектов // Дефектоскопия. 2007. № 3. С. 54—68.

2. Kim J.-Y., In C.-W., Sun K.H., Song J.S., Lee J.-H. Imaging defects in laminate composite plates using focused shear waves generated by air-coupled transducer // *Composite Structures*. 2016. V. 152. P. 891—899.
3. Raghavan A., Cesnik C.E.S. Review of guided-wave Structural Health Monitoring // *The Shock and Vibration Digest*. 2007. V. 39. P. 91—114.
4. Giurgiutiu V. 2014 Structural Health Monitoring with Piezoelectric Wafer Active Sensors, 2nd Edition. New-York: Elsevier Academic Press, 2014. 1032 p.
5. Mitra M., Gopalakrishnan S. Guided wave based Structural Health Monitoring: a review // *Smart Mater. Struct.* 2016. V. 25. No. 053001. P. 1—27.
6. Викторов И.А. Физические основы применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике. М.: Наука, 1966. 168 с.
7. Бабич В.М., Киселев А.П. Упругие волны. Высокочастотная теория. СПб.: БХВ-Петербург, 2014. 320 с.
8. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 343 с.
9. Ogilvy J.A. A layered media model for ray propagation in anisotropic inhomogeneous materials // *Applied Mathematical Modelling*. 1990. V. 14. No. 5. P. 237—247.
10. Hauffe A., Hähnel F., Wolf K. Comparison of algorithms to quantify the damaged area in CFRP ultrasonic scans // *Composite Structures*. 2020. V. 235. No. 111791. P. 1—11.
11. Немытова О.В., Ринкевич А.Б., Перов Д.В. Сравнительная классификация дефектов с использованием методов ультразвуковой томографии и оценки мгновенной частоты эхосигнала // *Дефектоскопия*. 2013. № 6. С. 3—12.
12. Willberg C., Duczek S., Vivar-Perez J.M., Ahmad Z.A.B. Simulation methods for guided wave-based Structural Health Monitoring: a review // *Applied Mechanics Reviews*. 2015. V. 67. No. 010803. P. 1—20
13. Nayfeh A.H. The general problem of elastic wave propagation in multilayered anisotropic media // *J. Acoust. Soc. Am.* 1991. V. 89. No. 4. P. 1521—1531.
14. Lowe M. Matrix techniques for modeling ultrasonic waves in multilayered media // *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control*. 1995. V. 42. P. 525—542.
15. Ha S., Chang F.-K. Optimizing a spectral element for modeling PZT-induced Lamb wave propagation in thin plates // *Smart Mater. Struct.* 2010. V. 19. No. 015015. P. 1—11.
16. Hasegawa K., Koshiya M., Suzuki M. Finite-element solution for scattering of lamb waves by asymmetrically located discontinuities in an elastic plate waveguide // *Electronics and Communications in Japan (Part II: Electronics)*. 1986. V. 69. No. 9. P. 70—80.
17. Casadei F., Rimoli J., Ruzzene M. Multiscale finite element analysis of elastic wave scattering from localized defects // *Finite Elements in Analysis and Design*. 2014. V. 88. P. 1—15.
18. Ворович И.И., Бабешко В.А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.
19. Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 343 с.
20. Glushkov E., Glushkova N., Kvasha O., Seemann W. Integral equation based modeling of the interaction between piezoelectric patch actuators and an elastic substrate // *Smart Mater. Struct.* 2007. V. 16. P. 650—664.
21. Glushkov E.V., Glushkova N.V., Kvasha O.V., Lammering R. Selective Lamb mode excitation by piezoelectric coaxial ring actuators // *Smart Mater. Struct.* 2010. V. 19. No. 035018. P. 1—7.
22. Glushkov E., Glushkova N., Lammering R., Eremin A., Neumann M.-N. Lamb wave excitation and propagation in elastic plates with surface obstacles: proper choice of central frequencies // *Smart Mater. Struct.* 2011. V. 20. No. 015020. P. 1—11.
23. Moll J., Golub M., Glushkov E., Glushkova N., Fritzen C.-P. Non-axisymmetric Lamb wave excitation by piezoelectric wafer active sensors // *Sensors and Actuators A*. 2012. V. 174. P. 173—180.
24. Бурков М.В., Еремин А.В., Любутин П.С., Бяков А.В., Панин С.В. Применение ультразвуковой методики с использованием волн Лэмба для контроля состояния образцов алюминиевого сплава В96ц3Т12 // *Дефектоскопия*. 2017. № 12. С. 3—15.
25. Burkov M.V., Lyubutin P.S., Vyako A.V. Lamb Wave Ultrasonic Detection of Barely Visible Impact Damages of CFRP // *Russian Journal of Nondestructive Testing*. 2019. V. 55. No. 2. P. 89—101. [Бурков М.В., Любутин П.С., Бяков А.В. Применение ультразвуковой методики с использованием волн Лэмба для обнаружения малозаметных ударных повреждений углепластиков // *Дефектоскопия*. 2019. № 2. С. 3—15.]
26. Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Фоменко С.И., Еремин А.А., Евдокимов А.А., Новиков О.И. Программный комплекс WAVES-L для моделирования и визуализации волновых процессов в упругом слое // *Вестник ЮУрГУ ММП*. 2019. Т. 12. № 1. С. 110—121.
27. Kishimoto K., Inoue H., Hamada M., Shibuya T. Time frequency analysis of dispersive waves by means of wavelet transform // *Journal of Applied Mechanics*. 1995. V. 62. P. 841—846.
28. Перов Д.В., Ринкевич А.Б. Локализация отражателей в пластинах при ультразвуковом контроле волнами Лэмба // *Дефектоскопия*. 2017. № 4. С. 27—41.
29. Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Еремин А.А., Михаськив В.В. Метод слоистых элементов в динамической теории упругости // *Прикладная математика и механика*. 2009. Т. 73. Вып. 4. С. 622—634.

30. Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Кривонос А.С. Возбуждение и распространение упругих волн в многослойных анизотропных композитах // Прикладная математика и механика. 2010. Т. 74. Вып. 3. С. 419—432.
31. *Glushkov E., Glushkova N., Eremin A.* Forced wave propagation and energy distribution in anisotropic laminate composites // *J. Acoust. Soc. Am.* 2011. V. 129. No. 5. P. 2923—2934.
32. Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Фоменко С.И., Жанг Ч. Поверхностные волны в материалах с функционально-градиентными покрытиями // Акустический журнал. 2012. Т. 58. № 3. С. 370—385.
33. *Quaegebeur N., Ostiguy P.-C., Masson P. R.* Hybrid empirical/analytical modeling of guided wave generation by circular piezoceramics // *Smart Mater. Struct.* 2015. V. 24. No. 035003. P. 1—10.
34. Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Евдокимов А.А. Гибридная численно-аналитическая схема для расчета дифракции упругих волн в локально неоднородных волноводах // Акустический журнал. 2018. Т. 64. № 1. С. 3—12.
35. *Golub M.V., Shpak A.N.* Semi-analytical hybrid approach for the simulation of layered waveguide with a partially debonded piezoelectric structure // *Applied Mathematical Modelling.* 2019. V. 65. P. 234—255.
36. *Raghavan A., Cesnik C.E.S.* Finite-dimensional piezoelectric transducer modeling for guided wave based structural health monitoring // *Smart Mater. Struct.* 2005. V. 14. P. 1448—1461.
-