

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ИДЕНТИФИКАЦИИ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ТРЕЩИНЫ В УПРУГОМ СЛОЕ

© 2020 г. А.О. Ватульян^{1,*}, О.В. Явруян^{1,2,**}

¹Южный федеральный университет, Россия 344000 Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8а

²Южный математический институт ВНЦ РАН, Россия 362001 Владикавказ, ул. Ватутина, 53

E-mail: *vatulyan@aanet.ru; **yavruyan@mail.ru

Поступила в редакцию 03.08.2020; после доработки 27.08.2020

Принята к публикации 04.09.2020

Рассмотрена обратная геометрическая задача идентификации внутреннего криволинейного дефекта в ортотропном упругом слое. Идентификация параметров дефекта (местоположение, глубина залегания, размер, ориентация) осуществлена по данным акустического анализа полей смещений и их характеристик, измеренных на части верхней границы слоя. Рассматривается установившийся режим колебаний и два случая — антиплоские и плоские колебания полосы. Предложен эффективный асимптотический подход к исследованию прямой и обратной задач для трещин малого относительного размера. Предлагаемая схема позволяет существенно упростить решение прямой задачи и свести решение обратной задачи к нахождению параметров дефекта из трансцендентных уравнений. Представлены численные результаты вычислительных экспериментов.

Ключевые слова: слой, трещина, идентификация, колебания, асимптотический метод, установившийся режим, упругий.

DOI: 10.31857/S0130308220100048

ВВЕДЕНИЕ

Постоянное усиление требований к надежности и безопасности работы оборудования промышленного и ответственного назначения предопределяет широкое применение приборов неразрушающего контроля качества и стимулирует развитие математических схем и методик обработки данных, полученных с их использованием.

Существующие современные методы неразрушающего контроля хорошо себя зарекомендовали в задачах обнаружения дефектов в телах и элементах конструкций. Это ультразвуковые, радиоволновые, тепловые, радиационные, магнитные методы [1—5].

Ультразвуковой контроль занимает лидирующую позицию среди методик неразрушающего контроля [6]. Ультразвуковые методики сводятся к последующей математической обработке полученного сигнала, который несет в себе информацию о внутренних дефектах, и установлении математической связи между выходными измеренными и аналитическими данными.

С математической точки зрения задачи обнаружения дефектов в телах и конструкциях сводятся к определению геометрических параметров

В настоящий момент прямые и обратные задачи обнаружения дефектов в конечных телах изучены достаточно подробно. В отдельную категорию работ можно отнести исследования обратных задач идентификации дефектов в стержневых и балочных элементах [7—11], пластинах [12, 13]. Подобный интерес обусловлен широким использованием соответствующих элементов в различных конструкциях, а также возможностью апробировать предлагаемые схемы для исследований тел с более сложной геометрией.

Рассмотрены как статические [6], так и динамические задачи для балочных и стержневых элементов с дефектами [7, 8]. В большинстве работ в случаях динамического нагружения реконструкция дефектов осуществляется по значениям собственных частот или АЧХ при продольных, крутильных или поперечных колебаниях стержней.

В [13] разработана специальная модель Кригинга для прогнозирования местоположения трещины на лопасти ветряной турбины с использованием спектральных сдвигов в резонансных пиках лопасти.

Эффективная методика, предложенная в [14], для идентификации трещины (одной или нескольких), лежащей в некоторой плоскости, характеризующейся конечным числом параметров, предложена в работах [14—16]. В работе [17] эта концепция развита для идентификации плоских трещин в рамках трехмерной линейной теории упругости. Для увеличения точности расчетов авторы использовали полиномиальные тестовые функции вместо рядов Фурье.

Следующий широкий класс актуальных задач идентификации дефектов можно выделить в телах, содержащих бесконечно удаленную точку, — слоистые композиты, цилиндрические волноводы и т.д. [18—23]. Решение этого класса задач связано с использованием методов граничных интегральных уравнений с последующим обращением к оптимизационным алгоритмам для решения обратных задач. Однако стоит отметить, что процедура минимизации функционала невязки связана с многократным обращением к решению прямой задачи, что представляет собой достаточно сложную вычислительную и затратную задачу. При этом решение обратной задачи существенно упрощается при наличии некоторой априорной информации о характере трещины (форма, размер, локация), в частности, для трещин малого относительного размера. Основу такой упрощенной постановки составляет асимптотический анализ проблемы.

Так, в работах [24—25] обратные задачи идентификации дефектов решались с помощью асимптотического разложения поля в дальней зоне.

Стоит отметить, что обратные задачи идентификации множественных дефектов (двух и более) исследованы значительно меньше, нежели одиночные. Как правило, схемы исследования одиночных дефектов прикладываются к случаю нескольких дефектов (количество дефектов известно), при этом предполагается, что каждый отдельный дефект из серии дефектов представляет собой малый дефект и находятся они «далеко» друг от друга [26—27].

Асимптотический анализ волновых полей в ортотропной полосе с дефектом осуществлен в работах [21, 22, 28—30]. В работе [21] рассмотрена упругая полоса, ослабленная «малой» полостью. Решена прямая и обратная задачи на базе асимптотического анализа проблемы. В [22] исследована задача об идентификации прямолинейной трещины малой относительной длины в вязкоупругом слое. В [29] рассмотрена задача идентификации прямолинейной трещины в слое, в [30] — на стыке двух полуслоев.

Асимптотический анализ прямой и обратной задач об установившихся колебаниях слоя толщины h с внутренним трещиноподобным дефектом длины l сводится к исследованию задачи относительно безразмерных параметров $\varepsilon_1 = l/h$, $\varepsilon_2 = \omega h/c$ (c — скорость бегущей волны в среде) и $\varepsilon_3 = \omega l/c = \varepsilon_1 \varepsilon_2$ (ω — частота колебаний). Стоит отметить, что при решении обратной задачи следует рассматривать случай, когда в слое имеются бегущие волны, т.е. $\varepsilon_2 \geq \varepsilon_*$ (ε_* — критическая частота).

В работе проводится исследование обратной задачи идентификации криволинейной трещины в диапазоне изменения параметров $\varepsilon_1 \ll 1$, $\varepsilon_2 \geq \varepsilon_*$, что соответствует случаю трещин малых относительных размеров.

1. ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ДЛЯ СЛОЯ С ТРЕЩИНОЙ ПРОИЗВОЛЬНОЙ КОНФИГУРАЦИИ

Рассмотрим задачу об установившихся колебаниях ортотропного упругого слоя S толщины h . К части верхней границы слоя приложена нагрузка $p_j(x, t) = p_j(x)e^{-i\omega t}$ (ω — частота колебаний), нижняя грань слоя жестко закреплена. Слой ослаблен внутренней туннельной трещиной. Трещина моделируется математическим разрезом, берега дефекта не взаимодействуют и свободны от напряжений, поля перемещений на берегах трещины претерпевают скачки, и, согласно теории дислокаций, заменяются фиктивными массовыми силами f_i , $i = 1, 2, 3$.

Исследуемая задача с учетом установившегося режима колебаний описывается краевой задачей [29]:

$$\sigma_{ij,j} + \rho\omega^2 u_i + f_i = 0, \quad (1)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} u_{k,l}, \quad f_i = -[C_{ijkl} n_k^+ \chi_l \delta(\zeta)]_j;$$

$$\sigma_{i3}|_{S_{20}} = p_i, \quad \sigma_{i3} = 0, \quad x \in S_2 \setminus S_{20}, \quad u_i|_{S_1} = 0; \quad (2)$$

$$\sigma_{ij} n_j^\pm|_{S_0^\pm} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (3)$$

где S_1, S_2 — верхняя и нижняя поверхности слоя; S_0^\pm — берега трещины; ρ — плотность среды; C_{ijkl} — упругие характеристики среды; n_j^\pm — компоненты единичных векторов нормали к берегам трещины.

Прямая задача состоит в построении волновых полей смещений в слое при известных входных данных задачи (размеры и местоположение дефекта, возбуждающая нагрузка). При формулировке полей смещений в дальней зоне используется принцип предельного поглощения [31].

Обратная задача реконструкции дефекта сводится к определению параметров поверхности трещины по дополнительной информации о полях смещений измеренных на части верхней границы слоя S_{21} в режиме частотного или позиционного зондирования:

$$u_i(x_1, \omega_0)|_{S_{21}} = g_i(x_1, \omega_0), \quad S_{21} = \{x_1 \in [a, b], x_3 = h\}, \quad i = 1, 2, 3; \tag{4}$$

$$u_i(x_{10}, \omega)|_{\Omega} = f_i(x_{10}, \omega), \quad \Omega = \{\omega \in [\omega_1, \omega_2]\}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{5}$$

Пусть оси упругой симметрии ортотропного материала совпадают с осями системы координат, тогда исходная задача (1)—(5) распадается на две подзадачи — задачу об антиплоских колебаниях ортотропного слоя с трещиной произвольной конфигурации l , при этом ненулевая компонента поля смещения — $u_2 = u(x_1, x_3)$ и задачу о плоских колебаниях слоя с трещиной l , ненулевые компоненты поля смещения — $u_1 = u_1(x_1, x_3), u_3 = u_3(x_1, x_3)$.

Не нарушая общности рассуждений, рассмотрим случай сосредоточенной нагрузки величины p_0 , приложенной в точке верхней границы слоя.

2. РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ

На основании теоремы взаимности для упругого ортотропного слоя, с учетом построенных в [32] фундаментальных решений $U_i^{(m)}(x, \xi)$ и компонент тензора напряжений (сингулярных решений) $\sigma_{ij}^{(m)}$ для упругой среды, построено интегральное представление поля смещения

$$u_m(\xi) = u_m^s(\xi) + \int_l \sigma_{kl}^{(m)}(x, \xi) \chi_l n_k^+ dS_x, \quad \xi \in S, \tag{6}$$

в случае **антиплоской задачи** $m, l, i = 2, k, j = 1, 3$, для **плоской задачи** — $m, k, l, i, j = 1, 3$.

В представлении (6) эталонное поле $u_m^s(\xi)$ характеризует поле смещения в среде без дефекта, а интегральное слагаемое определяется наличием дефекта и несет в себе всю информацию о трещине.

Наиболее эффективной схемой определения скачков является сведение задачи к решению системы граничных интегральных уравнений (ГИУ) [32].

В случае антиплоской задачи получаем одно граничное интегральное уравнение (ГИУ) относительно функции раскрытия трещины:

$$\int_l K(x, y) \chi(x) dl_x = F(y), \quad y \in l. \tag{7}$$

В случае плоской задачи получаем систему ГИУ относительно компонент функции раскрытия:

$$\int_l K_{ji}(x, y) \chi_i(x) dl_x = F_j(y), \quad y \in l, \quad j, i = 1, 3. \tag{8}$$

Стоит отметить, что ядра ГИУ (7) и (8) представляют собой контурные интегралы. Контур интегрирования σ выбирается из принципа предельного поглощения [31]. При этом подынтегральные выражения содержат гиперсингулярную особенность и соответствующие интегралы перестают существовать в обычном смысле, становятся расходящимися и понимаются в смысле конечного значения по Адамару. Для выделения гиперсингулярной особенности в явном виде ядра подынтегральных выражений представляются в виде суммы гиперсингулярной (определяется функциональной особенностью подынтегрального выражения при $\alpha_1 \rightarrow \infty$) и регулярной частей.

В случае трещины, допускающей параметризацию конечным числом безразмерных параметров $\theta_m, m = 1 \dots N, x_j = q_j(t, \theta_m), y_j = q_j(\tau, \theta_m), t, \tau \in [-1, 1], q_1(t), q_3(t) \in C^1[-1, 1], q(t) = \sqrt{q_1'^2(t) + q_3'^2(t)} \neq 0$, одним из которых является параметр ε_1 , приходим к системе ГИУ следующего вида — для **антиплоской задачи**:

$$\int_{-1}^1 \left[\frac{G^{(1)}(t, \tau) + G^{(2)}(t, \tau)}{(t - \tau)^2} + K_1(t, \tau) \right] \tilde{\chi}(t) q(t) dt = \tilde{F}(\tau), \quad \tau \in [-1, 1]; \tag{9}$$

$$G^{(1)}(t, \tau) = \sqrt{v} \frac{(vq'_3(\tau)q'_3(t) - q'_1(\tau)q'_1(t))^2}{q(\tau)(vq'_3(\tau)q'_3(t) + q'_1(\tau)q'_1(t))^2};$$

$$G^{(2)}(\tau) = 2v\sqrt{v} \frac{(q'_3(\tau)q'_1(t) + q'_1(\tau)q'_3(t))q'_1(t)q'_3(t)}{q(\tau)(vq'_3(\tau)q'_3(t) + q'_1(\tau)q'_1(t))^2};$$

$$v = C_{66} / C_{44}, \tilde{\chi}(t) = \chi(x(t)), \tilde{F}(\tau) = F(y(\tau)), G^{(1)}, G^{(2)} \in C([-1, 1] \times [-1, 1]);$$

для плоской задачи:

$$\int_{-1}^1 \left[\frac{G_{ji}(t, \tau)}{(t - \tau)^2} + K_{ji}^{(1)}(t, \tau) \right] \tilde{\chi}_j(t) q(t) dt = \tilde{F}_i(\tau), \quad \tau \in [-1, 1]; \quad (10)$$

$$G_{ji}(t, \tau) = \sum_{m=1}^2 \left[2 \frac{\Delta_m^-(\tau)}{(\Delta_m^+(\tau))^2} M_{ji}^{(1)}(v_m, q'(t), q'(\tau)) - 4iv_m \frac{q'_1(\tau)q'_3(\tau)}{(\Delta_m^+(\tau))^2} M_{ji}^{(2)}(v_m, q'(t), q'(\tau)) \right],$$

$$\Delta_m^+(\tau) \neq 0, \quad \tau \in [-1, 1]; \quad \Delta_m^\pm(\tau) = v_m^2 q'_3(\tau) q'_3(t) \pm q'_1(\tau) q'_1(t);$$

$$v_{1,2} = \sqrt{(\gamma_1 - 2\gamma_7\gamma_5 - \gamma_7^2 \mp w) / (2\gamma_5)}, \quad w = \sqrt{(\gamma_7^2 - \gamma_1)(\gamma_7^2 - \gamma_1 + 4\gamma_5(\gamma_5 + \gamma_7))};$$

$$\tilde{\chi}_j(t) = \chi_j(x(t)), \quad \tilde{K}_{ji}^{(1)}(t, \tau) = K_{ji}^{(1)}(x(t), y(\tau)), \quad \tilde{F}_i(\tau) = F_i(y(\tau)),$$

$M_{ji}^{(1)}, M_{ji}^{(2)}$ — гладкие функции, зависящие от безразмерных характеристик материала ($\gamma_r, r = 1, 5, 7$) и от компонент вектора нормали в точках кривой.

В общем случае, системы ГИУ (9), (10) решаются с использованием метода граничных элементов, а также численных методов интегрирования гиперсингулярных интегралов. Подобная схема решения достаточно громоздка и требует учета ряда параметров (количество и расположение точек коллокаций, квадратурные схемы, численные методы решения систем линейных алгебраически уравнений (СЛАУ), от которых зависит точность решения систем ГИУ.

3. АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЗАДАЧИ

Асимптотический анализ задачи позволяет существенно упростить решение систем ГИУ и получить полуаналитические представления функций раскрытия трещины, что значительно сокращает время расчета и упрощает дальнейшее решение обратной задачи идентификации. Предлагаемый подход опирается на априорном предположении о малости относительного размера дефекта, т.е. осуществляется при условии $\epsilon_1 \rightarrow 0$. Асимптотический анализ систем ГИУ (9), (10) сводится к процедуре линеаризации ГИУ относительно этого параметра и приводит к упрощенной системе ГИУ с постоянными правыми частями и ядрами.

Рассмотрим для определенности случай, когда трещина моделируется кривой в классе окружностей, т.е. представляет собой дугу окружности в поперечном разрезе слоя вдоль оси дефекта.

Параметрическое уравнение такой кривой имеет вид:

$$\begin{aligned} x_1 &= R \cos(\theta_1 t + \theta_2) + x_{1c}, \\ x_3 &= R \sin(\theta_1 t + \theta_2) + x_{3c}, \quad t \in [-1, 1]. \end{aligned} \quad (11)$$

В качестве характерных параметров выбраны следующие характеристики: $R, x_c = (x_{1c}, x_{3c})$ — радиус окружности и координаты ее центра, определяющие местоположение дефекта относительно точки приложения нагрузки (глубина залегания дефекта и его удаленность); θ_1, θ_2 — «угловые» параметры дефекта, определяющие угол дуги сегмента окружности и угол наклона прямой, соединяющей центр окружности и середину дуги, относительно нижней границы полосы. Если обозначить углы, ограничивающие рассматриваемую дугу окружности через t_1, t_2 , то $\theta_1 = (t_2 - t_1)/2$, $\theta_2 = (t_2 + t_1)/2$.

Основным параметром асимптотического анализа служит относительная длина дефекта, в случае дефекта вида дуги окружности подобным параметром является отношение полудлины дуги к толщине слоя $\varepsilon = \varepsilon_1/h$, $\varepsilon_1 = R\theta_1$. Асимптотический анализ ГИУ (9), (10) приводит к интегральным уравнениям с постоянными правыми частями (знак волны в обозначениях опустим).

В случае **антиплоской задачи** получаем

$$\varepsilon_1^{-1} \int_{-1}^1 \frac{G(\theta_2)}{(t-\tau)^2} \chi(t) dt = F(\theta_2, \xi_c), \quad \tau \in [-1, 1], \tag{12}$$

которое имеет решение в классе ограниченных функций вида:

$$\chi(t) = \varepsilon_1 \sqrt{1-t^2} W_0(k, \xi_c, \theta_m), \quad W_0(k, \xi_c, \theta_2) = \frac{F(k, \xi_c, \theta_2)}{G(\theta_2)\pi}, \quad k^2 = \rho\omega^2 / C_{44}. \tag{13}$$

Здесь и в дальнейших выкладках через ξ_{1c} , ξ_{3c} обозначены параметры дефекта, характеризующие координаты середины трещины, определяющие расстояние средней точки трещины до осей Ox_3 и Ox_1 соответственно:

$$\xi_{1c} = R \cos(\theta_2) + x_{1c}, \quad \xi_{3c} = R \sin(\theta_2) + x_{3c}.$$

Для **плоской задачи** имеем

$$\varepsilon_1^{-1} \int_{-1}^1 \frac{G_{ji}(\theta_2)}{(t-\tau)^2} \chi_j(t) dt = F_i(\theta_{1,2}, \xi_c), \quad \tau \in [-1, 1], \quad i, j = 1, 3. \tag{14}$$

Система интегральных уравнений (14) имеет решения в классе ограниченных функций вида:

$$\chi_j(t) = \varepsilon_1 \sqrt{1-t^2} W_{0j}(k, \theta_m, \xi_c), \quad j = 1, 3; \tag{15}$$

$$W_{01}(k, \xi_c, \theta_2) = \frac{F_3(k, \xi_c, \theta_2)G_{13}(\theta_2) - F_1(k, \xi_c, \theta_2)G_{33}(\theta_2)}{G(\theta_2)} \quad (1 \leftrightarrow 3);$$

$$G(\theta_2) = G_{11}(\theta_2)G_{33}(\theta_2) - G_{13}(\theta_2)G_{31}(\theta_2).$$

В рамках асимптотического анализа задачи компоненты полей смещений на верхней границе в дальней зоне представимы в форме:

$$u_j(x_1, h) = u_j^s(x_1, h) + \varepsilon_1^2 \sum_{n=1}^N A_{jn}(k, \xi_c, \theta_m) e^{-i\alpha_n x_1} + O(e^{-\varepsilon x_1}), \quad m = 1, 2. \tag{16}$$

В представлении (16) $j = 2$ для антиплоской задачи, $j = 1, 3$ для плоской, α_n — набор чисел, имеющие конечное число N вещественных и счетное множество чисто мнимых значений. При этом количество бегущих волн в слое зависит от волнового числа k и определяется числом N . Именно эти моды колебаний несут основную информацию о дефекте и их исследование представляет особый интерес.

Стоит отметить, что в выражении (16) параметр ε_1 разделен от остальных параметров дефекта, что позволяет свести решение обратной задачи к последовательному определению характеристик трещины.

На основе асимптотического подхода и общего подхода, основанного на методе ГИУ проведены расчеты для слоя из аустенитной стали $C_{66} = 0,8225$, $C_{44} = 1,29(\times 10^{11} \text{ Н/м}^2)$, $\rho = 8,3 (\times 10^3 \text{ кг/м}^3)$, $\nu = 0,64$. На рис. 1 изображены графики, определяющие точность расчета функции раскрытия криволинейной трещины, полученные при помощи МГИУ (χ_j) и асимптотического метода (χ_A), в зависимости от параметра θ_1 для антиплоской задачи, $k = 6,0$, параметры трещины: $R = 0,1$; $\theta_2 = \pi/3$, $(x_1^c, x_3^c) = (0,5, 0,5)$, $\varepsilon_\chi = \max_{t \in [-1, 1]} |(\chi_A(t) - \chi_I(t)) / \chi_I(t)|$.

Как и следовало ожидать, с ростом параметра θ_1 увеличивается относительная погрешность расчета функции раскрытия. Далее, на рис. 2 приведены вещественная и мнимая части компонент поля смещений для плоской задачи, полученные методом ГИУ и по асимптотическому методу, $k = 4,9$, $R = 0,1$, $\theta_1 = 0,01$, $\theta_2 = 2\pi/3$, $\xi_c = (0,0, 0,5)$.

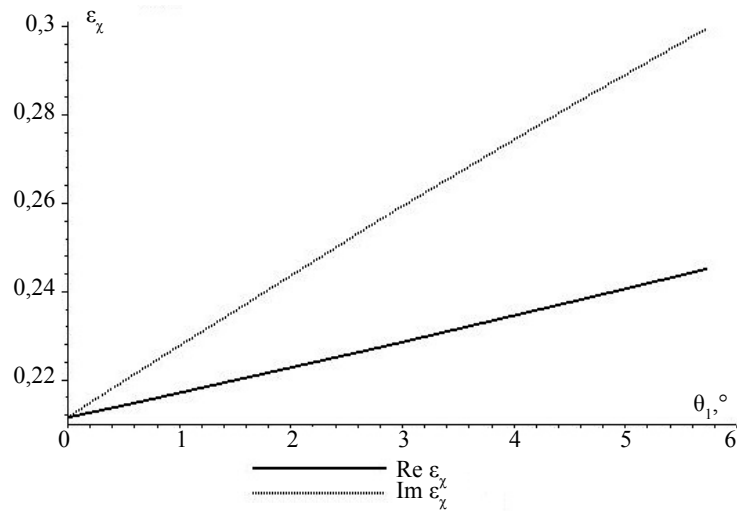


Рис. 1. Графики, характеризующие точность расчета функции раскрытия трещины при асимптотическом подходе относительно метода ГИУ.

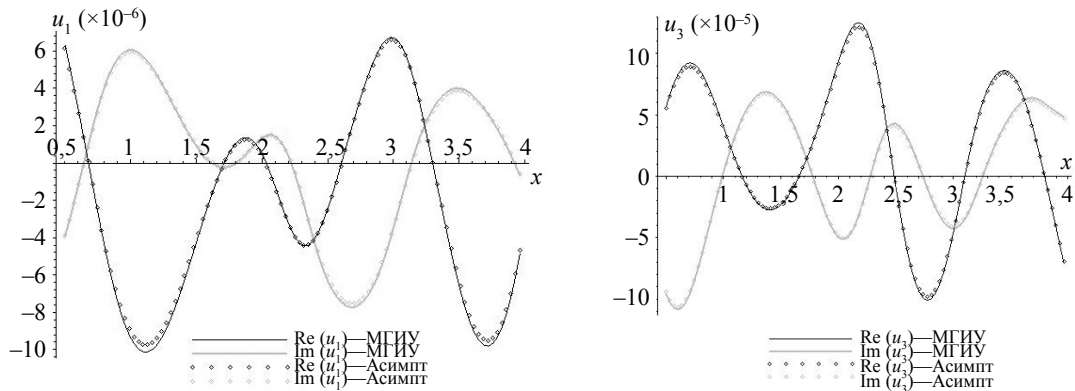


Рис. 2. Графики полей смещений на верхней границе полосы.

4. РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ИДЕНТИФИКАЦИИ В РАМКАХ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ПОДХОДА

Рассмотрим сначала схему поэтапного восстановления параметров дефекта для случая *антиплоской задачи*.

С учетом полученного выражения (16) амплитуды поля смещения справа от источника колебания принимают вид:

$$A_n = \varepsilon_1^2 \frac{F(k, \xi_{3c}, \theta_2)}{2h\nu G} (\nu \sin(\lambda_n^0 \xi_{3c}) \cos \theta_2 + \frac{i\lambda_n^0}{\beta_n} \cos(\lambda_n^0 \xi_{3c}) \sin \theta_2) e^{-i\alpha_n \xi_{1c}}; \quad (17)$$

$$\lambda_n^0 = \frac{\pi}{h} \left(n - \frac{1}{2}\right), \alpha_n = -\frac{\sqrt{k^2 - \lambda_n^0{}^2}}{\sqrt{\nu}}, \quad n = 1, 2 \dots$$

Заметим, что параметры трещины особым образом входят в выражение для амплитуд. Рассмотрим постановку обратной задачи, в которой в качестве дополнительной информации заданы амплитудные значения поля перемещения, измеренного на верхней границе слоя на частоте k_1 , когда в слое имеются две бегущие волны:

$$A_0^{(*)}(k_1), A_1^{(*)}(k_1), \text{ обозначим } \mu_1 + i\mu_2 = -\frac{A_0^{(*)}(k_1)}{A_1^{(*)}(k_1)}. \quad (18)$$

Тогда решение обратной задачи сводится к восстановлению новых 4 параметров: $\xi_{1c}, \xi_{3c}, \theta_2, \varepsilon_1$.

Этап 1. Восстановление параметров ξ_{1c}, ξ_{3c} . С учетом выражения (17), (18) получим комплексное уравнение относительно параметров x_{1c}, x_{3c}, θ_2 . Выделяя вещественную и мнимую части имеем однородную СЛАУ относительно вектор-функции $v = (\cos\theta_2, \sin\theta_2)$:

$$Av = 0, A = A(\mu_1, \mu_2, \xi_c), \tag{19}$$

из условия равенства нулю определителя системы (19) получаем трансцендентное уравнение относительно ξ_{1c}, ξ_{3c} :

$$\Delta_A(\xi_{1c}, \xi_{3c}) = 0. \tag{20}$$

Этап 2. Восстановление параметра θ_2 . После восстановления координат, характеризующих местоположение дефекта, приступим к реконструкции параметров, определяющих ее конфигурацию. Угол θ_2 можно найти из одного из уравнения СЛАУ (19). В результате имеем

$$\theta_2 = \pi - \arctg(A_{11}(\xi_c)/A_{12}(\xi_c)).$$

Этап 3. Восстановление параметра $\varepsilon_1 = R\theta_1$. Поскольку в выражении для амплитуд параметры R, θ_1 входят в виде произведения, то определить удастся лишь параметр $\varepsilon_1 = R\theta_1$ из вещественного либо комплексного значений амплитуд

$$\varepsilon_1^2 = \text{Re}(A_0^*) / \text{Re}(A_0(k, \xi_{1c}, \xi_{3c}, \theta_2)).$$

Отметим, что погрешность восстановления параметра ε_1 зависит от точности восстановления параметров, определенных ранее.

Предлагаемый подход реализован численно. В результате вычислительного эксперимента определены рабочие диапазоны предлагаемого подхода относительно геометрических параметров дефекта и свойств зондируемого сигнала. Результаты восстановления приведены в табл. 1 при следующих входных данных задачи: $k = 6,0, R = 0,1, \xi_c = (1,2, 0,6), t_1 = \pi/3, t_2 = t_1 + 2\theta_1$.

Таблица 1

Результаты восстановления параметров дефекта. Антиплоская задача

$2\theta_1$		$\varepsilon_{\xi_1}, \%$	$\varepsilon_{\xi_3}, \%$	$\varepsilon_{\theta_2}, \%$	$\varepsilon_{R\theta_1}, \%$
0,005		<<1	<<1	<<1	<<1
0,01		<<1	<<1	<<1	<<1
0,03		0,001	0,008	1,71	1,54
0,05	$k = 6,0$	25	33	13	>100
	$k = 6,5$	<<1	0,025	2,33	>100
0,12		0,4	10	5	12

Отметим, что процедура идентификация параметров ξ_{1c}, ξ_{3c} устойчива, погрешность идентификации составляет менее 1 %. При этом процедура идентификации рассыпается в случае, когда на входной частоте наблюдается следующая связь между значениями амплитуд на частоте, соответствующей волновому числу k : $\mu_1(k_1) \cong \mu_2(k_1)$. В таких случаях рекомендуется сменить частоту возбуждающей нагрузки. Исследована зависимость работоспособности асимптотического подхода в зависимости от значения параметра θ_1 (основной параметр асимптотического анализа, поскольку физически случаи $R \rightarrow 0$ не представляют существенного интереса), так для $\theta_1 \leq 0,1h$ погрешность восстановления составляет в большинстве случаев менее 5 %.

Рассмотрим теперь схему восстановления параметров дефекта для случая *плоской задачи*.

Пусть в качестве дополнительной информации заданы поля смещений, измеренные в двух точках верхней границы полосы $x_1^{(1)}, x_1^{(2)}$ на частоте, соответствующей волновому числу k :

$$\begin{aligned}\mu_1^{(1)} &= u_1(k, x_1^{(1)}, h), \mu_3^{(1)} = u_3(k, x_1^{(1)}, h); \\ \mu_1^{(2)} &= u_1(k, x_1^{(2)}, h), \mu_3^{(2)} = u_3(k, x_1^{(2)}, h).\end{aligned}$$

Амплитудные выражения компонент поля смещения имеют вид:

$$A_{jn} = \varepsilon_1^2 [A_{jn}^{(1)}(k, \xi_c, \theta_2)W_{01} + A_{jn}^{(3)}(k, \xi_c, \theta_2)W_{03}], \quad (21)$$

заметим, что как и в случае антиплоской задачи, они пропорциональны квадрату $\varepsilon_1 = R\theta_1$.

Этап 1. Восстановление трех параметров, характеризующих местоположение дефекта — $\xi_c = (\xi_{1c}, \xi_{3c}), \theta_2$.

Учтем, что выражения W_{01}, W_{03} не зависят от точки съема данных и получим систему комплексных трансцендентных уравнений:

$$\frac{\Delta_i(x_1^{(1)}, \xi_c, \theta_2)}{\Delta(x_1^{(1)}, \xi_c, \theta_2)} - \frac{\Delta_i(x_1^{(2)}, \xi_c, \theta_2)}{\Delta(x_1^{(2)}, \xi_c, \theta_2)} = 0, \quad i = 1, 3, \quad (22)$$

из которой определяются неизвестные значения ξ_c, θ_2 .

При решении системы трансцендентных уравнений (22), для нахождения трех неизвестных можно рассматривать два вещественных уравнения и одно комплексное (либо наоборот).

Этап 2. Восстановление параметра $\varepsilon_1 = R\theta_1$, характеризующий размер дефекта.

Соответствующая характеристика дефекта восстанавливается из выражения для полей смещений (16) либо из условия минимума функционала невязки.

Стоит отметить, что предлагаемая схема подразумевает восстановление каждого из параметров $R\theta_1$, однако, как показывают расчеты, эффективно восстанавливается только параметр $\varepsilon_1 = R\theta_1$, при этом сами параметры $R\theta_1$ восстанавливаются с точностью до множителя.

Таблица 2

Результаты восстановления параметров дефекта. Плоская задача

R		ξ_{1c}			ξ_{3c}			$\theta_2, 10^{-3}$			$\varepsilon_1 = R\theta_1, 10^2$		
ex	ex	ex	id	$\varepsilon_{\xi_{1c}}$	ex	id	$\varepsilon_{\xi_{3c}}$	ex	id	ε_{θ_2}	ex	id	$\varepsilon_{\varepsilon_1}$
ЗАГЛУБЛЕННАЯ ТРЕЩИНА													
0,1	0,015	0,5	0,5	<<1	0,15	0,149	<<1	2,1019	2,1056	<<1	0,075	0,0725	4
ТРЕЩИНА СРЕДНЕГО ЗАГЛУБЛЕНИЯ													
0,15	0,015	0,5	0,477	<<1	0,5	0,5	<<1	2,102	2,101	<<1	0,09	0,09	<<1
0,12	0,05	0,5	0,5	<<1	0,62	0,619	<<1	2,119	2,120	<<1	0,25	0,29	16
0,2	0,05	0,5	0,5	<<1	0,62	0,619	<<1	2,1194	2,122	<<1	0,5	0,45	10
0,2	0,15	0,5	0,503	0,66	0,62	0,62	<<1	2,169	2,158	0,5	1,5	1,5	<<1
0,2	0,2	0,5	0,505	0,9	0,62	0,623	0,5	2,194	2,166	1,3	2	1,8	10
0,2	0,3	0,5	0,506	1,4	0,62	0,632	1,94	2,24	2,159	3,5	3	2	32
ПРИПОВЕРХНОСТНАЯ ТРЕЩИНА													
0,1	0,0075	0,5	0,5	<<1	0,9	0,89	<<1	2,102	2,102	<<1	0,075	0,075	<<1

* ex — точные значения, id — восстановленные, ε_{om} — погрешность реконструкции параметра θ_m , %.

В табл. 2 приведены результаты решения обратной задачи по реконструкции параметров криволинейной трещины для полосы из аустенитной стали в зависимости от относительного размера дефекта и от глубины залегания трещины, т.е. параметра ξ_{3c} (рис. 3). Приповерхностная трещина — $\xi_{3c} = 0,9h$ и на рис. 3 соответствует расположению (1), среднее залегание — $\xi_{3c} = 0,5h$ или $\xi_{3c} = 0,62h$ и на рис. 3 соответствует расположению (2), заглубленная трещина — $\xi_{3c} = 0,15h$,

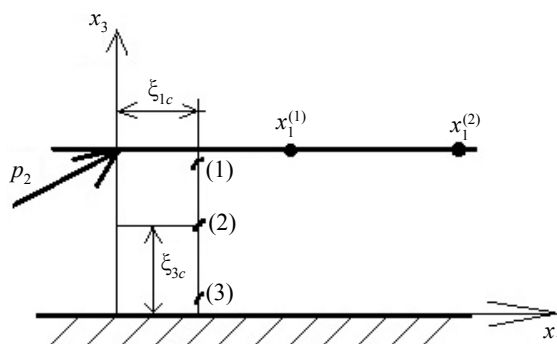


Рис. 3. Расположение трещин приповерхностной (1), трещины среднего заглубления (2) и заглубленной трещины (3).

на рис. 3 соответствует расположению (3). Точки позиционного зондирования: $x_1^{(1)} = 1,05$, $x_1^{(2)} = 2,1$, $k = 4,9$, параметры дефекта: $t_1 = 2\pi/3$, $t_2 = 2\pi/3 + 2\theta_1$. Как и следовало ожидать, с увеличением относительного размера дефекта, что соответствует увеличению параметра θ_1 , погрешность восстановления параметров дефекта увеличивается.

ВЫВОДЫ

Предлагаемая методика, основанная на асимптотическом анализе прямой и обратной задач в случае плоских и антиплоских колебаний, апробирована на модельной задаче идентификации параметров криволинейной трещины малой относительной длины. Как показывают результаты расчетов, предлагаемая схема эффективна при определении параметров дефекта для $\theta_1 \leq 0,1h$, при этом параметры ξ_c , θ_2 восстанавливаются с погрешностью менее 1% и для «больших» дефектов, когда $\theta_1 \leq 0,3h$. При этом для однозначной идентификации параметров дефекта в случае антиплоской задачи достаточно знать амплитудные значения бегущих волн на верхней границе слоя в режиме частотного зондирования, на частоте, когда в слое возникают две бегущие волны. В случае плоской задачи, для однозначного восстановления параметров дефекта, достаточно измерить волновое поле в двух точках верхней границы слоя на частоте, когда в слое имеются одна и более бегущих волн, при этом точки зондирования рекомендуется выбирать там, где поле смещения особенно чувствительно к изменениям параметров дефекта.

Полученные численные результаты подтверждают работоспособность и эффективность предлагаемого асимптотического подхода в задаче идентификации криволинейной трещины в слое.

Работа выполнена при частичной поддержке гранта Правительства РФ № 075-15-2019-1928.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Chulkov A.O., Vavilov V.P., Moskovchenko A.I. Active thermal testing of delaminations in heat-shielding structures // Russian Journal of Nondestructive Testing. 2019. V. 55. No. 3. P. 240—247.
2. Yan G., Stefano A., Matta E., Feng R. A novel approach to detecting breathing-fatigue cracks based on dynamic characteristics // J. Sound and Vibration. 2013. V. 332 No. 2. 407—422.
3. Аббасу А., Бушала Т., Абду А., Абдельхади Б. Определение параметров трехмерной трещины с помощью сигнала вихретокового датчика и быстрого алгоритма поиска // Дефектоскопия. 2020. № 5. С. 20—27.
4. Xin Wang, Nan Wu. Crack identification at welding joint with a new smart coating sensor and entropy // Mechanical Systems and Signal Processing. 2019. V. 124. P. 65—82.
5. Antipov A.G., Markov A.A. Detectability of rail defects by magnetic flux leakage method // Russian Journal of Nondestructive Testing. 2019. V. 55. № 4. P. 277—285.
6. Pei C., Yi D., Liu T., Kou X., Chen Z. Fully noncontact measurement of inner cracks in thick specimen with fiber-phased-array laser ultrasonic technique // NDT and E International. 2020. V. 113. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ndteint.2020.102273>
7. Shifrin E. Identification of a finite number of small cracks in a rod using natural frequencies // Mechanical Systems and Signal Processing. 2016. V. 70—71. P. 613—624.
8. Morassi A. Identification of a crack in a rod based on changes in a pair of natural frequencies // J. Sound and Vibration. 2001. V. 242. P. 577—596.

9. *Khiem N.T., Toan L.K.* A novel method for crack detection in beam-like structures by measurements of natural frequencies // *J. Sound and Vibration*. 2014. V. 333. P. 4084 — 4103
10. *Boukellif R., Ricoeur A.* Identification of crack positions and crack loading quantities strain gauge data by inverse problem solution // *Procedia Structural Integrity*. 2018. V. 13. P. 85—90.
11. *Shuai He, Ching-Tai Ng.* Guided wave-based identification of multiple cracks in beams using a Bayesian approach // *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2017. V. 84. P. 324—345.
12. *Awadallah M., El-Sinawi A.* Effect and detection of cracks on small wind turbine blade vibration using special Kriging analysis of spectral shifts // *Measurement*. 2020. V. 151. <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2019.107076>
13. *Zima B., Kedra R.* Detection and size estimation of crack in plate based on guided wave propagation // *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2020. V. 142. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2020.106788>
14. *Andrieux S., Abda A.B., Jaoua M.* On the inverse emergent plane crack problem // *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 1998. V. 21. No 10. P. 895—906.
15. *Капцов А.В., Шифрин Е.И.* Идентификация плоской трещины в упругом теле с помощью инвариантных интегралов // *МТГ*. № 3. 2008. С. 145—163.
16. *Ватульян А.О., Соловьев А.Н.* Об определении размера дефекта в составном упругом теле // *Дефектоскопия*. 2004. № 5. С. 15—23.
17. *Ferriera R., Kadrib M.L., Gosseleta P.* Planar crack identification in 3D linear elasticity by the reciprocity gap method // *Computer Methods in Applied Mechanics Engineering*. 2019. V. 355 P. 193—215.
18. *Golub M.V., Zhang Ch.* In-plane wave motion and resonance phenomena in periodically layered composites with a crack // *Wave Motion*. 2014. V. 51. No. 2. P. 308 — 322.
19. *Vatulyan A.O., Baranov I.V., Guseva I.A.* Identification of a crack-like flaw in an orthotropic layer // *Russian Journal of Nondestructive Testing*. 2001. T. 37. № 10. С. 718 — 722.
20. *Golub M. V., Boström A. E., Doroshenko O. V.* Modelling of Elastic Wave Propagation Through Damaged Interface via Effective Spring Boundary Conditions. *Advanced Materials*. 2018. P. 375 — 387. [doi:10.1007/978-3-319-78919-4_28](https://doi.org/10.1007/978-3-319-78919-4_28)
21. *Ватульян А.О., Беляк О.А.* К реконструкции малых полостей в упругом слое // *Дефектоскопия*. 2006. № 10. С. 33—39.
22. *Ватульян А.О., Азарова П. А., Явруян О. В.* Идентификация параметров наклонной прямолинейной трещины в вязкоупругом слое // *Механика композиционных материалов и конструкций*. 2008. № 3. С. 461—472.
23. *Баранов И.В., Ватульян А.О., Соловьев А.Н.* Об одном генетическом алгоритме и его применении в обратных задачах идентификации упругих сред // *Вычислительные технологии*. 2006. Т. 11. № 3. С. 14—26.
24. *Kang H., Kim E., Lee J.* Identification of elastic inclusions and elastic moment sensors by boundary measurements // *Inverse Problems*. 2003. V. 19. P. 703—724.
25. *Ammari H., Kang H., Kim E., Lim M.* Reconstruction of closely spaced small inclusions // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 2005. V. 42. P. 2408—2428.
26. *Kang H., Kim E., Lee J.Y.* Numerical reconstruction of a cluster of small elastic inclusions // *Inverse Problems*. 2007. V. 23. P. 23112324.
27. *Baratchart L., Ben Abda A., Ben Hassen F., Leblond J.* Recovery of pointwise sources and small inclusions in 2D domains and rational approximation // *Inverse Problems*. 2005. V. 21. P. 51 — 74.
28. *Ватульян А.О., Беляк О.А.* Обратная задача идентификации малого дефекта на основе асимптотического метода // *Дефектоскопия*. 2020. № 7. С. 3—9.
29. *Ватульян А.О., Явруян О.В.* Асимптотический подход в задачах идентификации трещин // *ПММ*. 2006. № 4. С. 714—724.
30. *Ватульян А.О., Явруян О.В.* Исследование обратных задач теории трещин с использованием асимптотического метода // *Экологический вестник научных центров ЧЭС*. 2018. Т. 15. № 2. С. 39—46.
31. *Ворович И.И., Бабешко В.В.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1989. С. 320.
32. *Баранов И.В., Булгурян О.В., Ватульян А.О.* Интегральные уравнения для упругого слоя с трещиной произвольной конфигурации и их исследование // *Вестник ДГТУ. Издательский центр ДГТУ*. 2004. Т. 4. № 3. С. 257—269.