УДК 620.179.15

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ РАДИАЦИОННЫХ ПРОЗРАЧНОСТЕЙ ОБЪЕКТА КОНТРОЛЯ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ СЭНДВИЧ-ДЕТЕКТОРОВ РЕНТГЕНОВСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

В.А. Удод[1,2,*], **С.Э. Воробейчиков**[1,**], **С.Ю. Назаренко**[2,***]

[1]*Национальный исследовательский Томский государственный университет,*
Россия 634050 Томск, пр-т Ленина, 36
[2]*Национальный исследовательский Томский политехнический университет,*
Россия 634050 Томск, пр-т Ленина, 30
*E-mail: *pr.udod@mail.ru; **sev@mail.tsu.ru; ***svetanaz@mail.ru*

Поступила в редакцию 28.10.2019; после доработки 03.12.2019
Принята к публикации 06.12.2019

Представлена математическая модель выходных сигналов сэндвич-детектора рентгеновского излучения. На основе данной модели разработаны две математические модели радиационных прозрачностей объекта контроля для сэндвич-детектора излучения, которые являются основой для теоретической оценки точности распознавания материалов при использовании соответствующей схемной реализации метода дуальных энергий. Принципиальное отличие между разработанными моделями состоит в том, что одна из них не учитывает, а другая — учитывает статистическую зависимость между выходными сигналами сэндвич-детектора. Даны рекомендации по предпочтению в использовании каждой из этих моделей.

Ключевые слова: рентгеновское излучение, досмотровый контроль, эффективный атомный номер, распознавание материалов, метод дуальных энергий, сэндвич-детектор.

DOI: 10.31857/S0130308220020049

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время метод дуальных энергий (МДЭ) широко используется для распознавания материалов в сканирующих системах цифровой рентгенографии (ССЦР), предназначенных для проведения досмотрового контроля [1—6]. Данный метод позволяет одновременно оценить два параметра объекта контроля (ОК) — эффективный атомный номер материала ОК и его массовую толщину [4, 7, 8]. Формально это достигается путем решения (относительно этих параметров) системы из двух уравнений, представляющих собой равенства теоретических и экспериментальных радиационных прозрачностей ОК для двух разных максимальных (либо эффективных) энергий рентгеновского излучения [4, 7].

Помимо досмотрового контроля на основе ССЦР МДЭ активно применяется и для медицинских целей [9], а также для диагностики материалов и изделий с помощью рентгеновских компьютерных томографов [10—14].

Схемы реализации МДЭ могут быть различными. Традиционная (классическая) схема выражается в том, что ОК просвечивается дважды, причем каждый раз при разной максимальной (эффективной) энергии в спектре рентгеновского излучения [4]. Другая схема реализации МДЭ заключается в однократном сканировании ОК пучком излучения, создаваемым источником, поочередно генерирующим импульсы высокой и низкой энергии [15]. Еще одна схема реализации МДЭ заключается в однократном сканировании ОК и регистрации прошедшего через него излучения сэндвич-детекторами, которые представляют собой комбинации из двух детекторов, расположенных друг за другом по направлению распространения квантов излучения и разделенных между собой фильтром (обычно в виде медной пластины) [1, 4, 9, 12, 16].

Учитывая широту использования ССЦР с сэндвич-детекторами излучения, в частности — при досмотре багажа и ручной клади в аэропортах [1], вполне закономерно возникает задача теоретической оценки потенциальной точности МДЭ, применяемого в данных системах для распознавания материалов досматриваемых объектов. Это, в свою очередь, порождает необходимость разработки математической модели радиационных прозрачностей ОК при использовании в ССЦР сэндвич-детекторов излучения, что и является целью проводимых в настоящей работе исследований. Для достижения поставленной цели сначала целесообразно привести описание математической модели выходных сигналов сэндвич-детектора излучения.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВЫХОДНЫХ СИГНАЛОВ СЭНДВИЧ-ДЕТЕКТОРА ИЗЛУЧЕНИЯ

Под выходными сигналами сэндвич-детектора излучения естественно понимать сигналы на выходе первого (переднего) и второго (заднего) детекторов, входящих в состав сэндвич-детектора излучения. Для их математического описания предположим, что ОК облучается узким веерным пучком рентгеновского излучения, которое регистрируется линейкой идентичных сэндвич-детекторов. Предположим также, что регистрация излучения происходит в аналоговом режиме. Тогда сигналы (в виде суммарных зарядов, Кл) $B_1(H)$ и $B_2(H)$ на выходе первого (переднего) и второго (заднего) детекторов отдельного сэндвич-детектора из линейки при наличии ОК с учетом квантового шума будут соответственно описываться, согласно [17], выражениями вида:

$$B_1(H) = \overline{B_1}(H) + N_1(H)\,;\, B_2(H) = \overline{B_2}(H) + N_2(H); \tag{1}$$

$$\overline{B_1}(H) = \gamma_c C_{\text{id}} \int\limits_0^{E_0} g(E, E_0) \exp(-m(E,Z)\rho H) \bar{E}_{ab1}(E) \varepsilon_1(E)\, dE; \tag{2}$$

$$\overline{B_2}(H) = \gamma_c C_{\text{id}} \int\limits_0^{E_0} g(E, E_0) \exp(-m(E,Z)\rho H - m(E,Z_1)\rho_1 H_1 - m(E,Z_f)\rho_f H_f) \cdot \bar{E}_{ab2}(E) \varepsilon_2(E)\, dE. \tag{3}$$

Здесь $\overline{B_1}(H), \overline{B_2}(H)$ — средние значения (математические ожидания) сигналов при наличии ОК на выходе первого и второго детекторов соответственно; H — толщина ОК (точнее — лучевой размер ОК, соответствующий отдельному определенному сэндвич-детектору из линейки); γ_c — коэффициент преобразования энергии рентгеновского излучения, поглощенной детектором, в электрический заряд, Кл/МэВ;

$$C_{\text{id}} = \frac{\psi(\Omega_{\text{det}})}{F^2} ST \tag{4}$$

— обобщенный параметр системы контроля, характеризующий источник и детектор (сэндвич-детектор) излучения; Ω_{det} — направление центрального луча от источника на сэндвич-детектор, то есть направление луча из центра фокусного пятна источника излучения на центр апертуры (поверхности приема излучения) сэндвич-детектора; $\psi(\Omega)$ — нормированное распределение источника излучения по направлениям Ω вылета квантов; S — площадь апертуры сэндвич-детектора; T — время измерения излучения; F — расстояние от источника до сэндвич-детектора; E_0 — максимальная энергия квантов испускаемых источником, МэВ; $g(E, E_0) = dN/dE$ — энергетический спектр рентгеновского излучения, создаваемого источником, по числу квантов, 1/(МэВ·с); $m(E, Z)$, $m(E, Z_1)$, $m(E, Z_f)$, $m(E, Z_2)$ — массовый коэффициент ослабления (МКО) излучения с энергией E для материала ОК, первого детектора, промежуточного фильтра и второго детектора соответственно, см²/г; Z, Z_1, Z_f, Z_2 — атомный номер (эффективный атомный номер) материала ОК, первого детектора, промежуточного фильтра и второго детектора соответственно; ρ, ρ_1, ρ_f, ρ_2 — плотность материала ОК, первого детектора, промежуточного фильтра и второго детектора соответственно, г/(см³); H_1, H_f, H_2 — толщина ОК, первого детектора, промежуточного фильтра и второго детектора соответственно, см; ρH, $\rho_1 H_1$, $\rho_f H_f$, $\rho_2 H_2$ — массовая толщина ОК, первого детектора, промежуточного фильтра и второго детектора соответственно, г/(см²); $\bar{E}_{ab1}(E), \bar{E}_{ab2}(E)$ — среднее значение поглощенной энергии, соответствующее одному зарегистрированному кванту с энергией E, для первого и второго детекторов соответственно, МэВ;

$$\varepsilon_1(E) = 1 - \exp(-m(E,Z_1)\rho_1 H_1)\,;\, \varepsilon_2(E) = 1 - \exp(-m(E,Z_2)\rho_2 H_2) \tag{5}$$

— эффективности регистрации квантов излучения с энергией E для первого и второго детекторов соответственно; $N_1(H), N_2(H)$ — шумы, обусловленные квантовой природой рентгеновского излучения, со средними значениями (математическими ожиданиями) $\bar{N}_1(H)$, $\bar{N}_2(H)$ и дисперсиями $\sigma^2[N_1(H)]$, $\sigma^2[N_2(H)]$, соответственно равными:

$$\bar{N}_1(H) = 0;\;\; \bar{N}_2(H) = 0; \tag{6}$$

$$\sigma^2\left[N_1(H)\right] = \sigma^2\left[B_1(H)\right] = \gamma_c^2 C_{\text{id}} \int\limits_0^{E_0} g(E, E_0) \exp(-m(E,Z)\rho H) \overline{E_{ab1}^2}(E) \varepsilon_1(E)\, dE; \tag{7}$$

$$\sigma^2\left[N_2(H)\right]=\sigma^2\left[B_2(H)\right]=$$

$$=\gamma_c^2 C_{\text{id}}\int\limits_0^{E_0} g(E,E_0)\exp(-m(E,Z)\rho H-m(E,Z_1)\rho_1 H_1-m(E,Z_f)\rho_f H_f)\cdot\overline{E_{ab2}^2}(E)\varepsilon_2\left(E\right)dE, \qquad (8)$$

где $\overline{E_{ab1}^2}(E)$, $\overline{E_{ab2}^2}(E)$ — средние квадраты поглощенной энергии для одного зарегистрированного кванта с энергией E для первого и второго детекторов соответственно, МэВ^2.

Величины $\overline{E}_{ab1}(E)$, $\overline{E}_{ab2}(E)$ и $\overline{E_{ab1}^2}(E)$, $\overline{E_{ab2}^2}(E)$ могут быть рассчитаны по эмпирическим формулам, представленным, например, в [18].

Средние значения (математические ожидания) и дисперсии сигналов $B_1(0)$ и $B_2(0)$ на выходе первого и второго детекторов при отсутствии ОК находятся из (2), (3), (6) — (8) подстановкой $H = 0$.

Совокупность соотношений (1)—(8) представляет собой математическую модель выходных сигналов $B_1(H)$ и $B_2(H)$ сэндвич-детектора излучения, которая является основой для построения математической модели радиационных прозрачностей ОК применительно к данному виду детекторов.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАДИАЦИОННЫХ ПРОЗРАЧНОСТЕЙ ОК ДЛЯ СЭНДВИЧ-ДЕТЕКТОРА ИЗЛУЧЕНИЯ

Под радиационной (радиоскопической) прозрачностью ОК понимается отношение сигнала на выходе детектора при наличии ОК к сигналу на выходе детектора при отсутствии ОК [5,7,19]. Согласно данному определению и модели (1)—(8), выражения для радиационных прозрачностей ОК d_1, d_2, соответствующих первому и второму детекторам, входящих в состав сэндвич-детектора излучения, будут иметь следующий вид:

$$d_1=\frac{B_1(H)}{B_1(0)}=\frac{\overline{B_1}(H)+N_1(H)}{\overline{B_1}(0)+N_1(0)}; \qquad (9)$$

$$d_2=\frac{B_2(H)}{B_2(0)}=\frac{\overline{B_2}(H)+N_2(H)}{\overline{B_2}(0)+N_2(0)}. \qquad (10)$$

В качестве сигналов на выходе первого и второго детекторов при отсутствии ОК, то есть сигналов $B_1(0)$ и $B_2(0)$, могут быть использованы их выборочные средние, полученные в предварительных экспериментах по выборкам большого объема, вследствие чего дисперсиями этих выборочных средних можно пренебречь. Исходя из этого, для дальнейшего исследования допустимо считать

$$B_1(0)=\overline{B_1}(0);\quad B_2(0)=\overline{B_2}(0); \qquad (11)$$

или, что равносильно,

$$N_1(0) = 0;\ N_2(0) = 0. \qquad (12)$$

После подстановки (11), (12) в (9), (10) соответственно получим:

$$d_1=\frac{B_1(H)}{\overline{B_1}(0)}=\frac{\overline{B_1}(H)+N_1(H)}{\overline{B_1}(0)}=\frac{\overline{B_1}(H)}{\overline{B_1}(0)}+\frac{N_1(H)}{\overline{B_1}(0)}=d_{t1}+\Phi_1; \qquad (13)$$

$$d_2=\frac{B_2(H)}{\overline{B_2}(0)}=\frac{\overline{B_2}(H)+N_2(H)}{\overline{B_2}(0)}=\frac{\overline{B_2}(H)}{\overline{B_2}(0)}+\frac{N_2(H)}{\overline{B_2}(0)}=d_{t2}+\Phi_2, \qquad (14)$$

где d_{t1} и d_{t2} — средние значения (математические ожидания) радиационной прозрачности ОК для первого и второго детектора соответственно; Φ_1 и Φ_2 — шумы радиационных прозрачностей ОК, обусловленные квантовой природой излучения, для первого и второго детекторов соответственно.

Величины d_1 и d_{t1} в (13) можно соответственно интерпретировать как экспериментальную и теоретическую радиационные прозрачности ОК для первого детектора, а величины d_2 и d_{t2} в (14) — соответственно как экспериментальную и теоретическую радиационные прозрачности ОК для второго детектора.

Выражения для прозрачностей d_{t1} и d_{t2} в развернутой форме получаются из (2), (13) и (3), (14) и имеют следующий вид:

$$d_{t1} = \frac{\int_0^{E_0} g(E,E_0)\exp(-m(E,Z)\rho H)\bar{E}_{ab1}(E)\varepsilon_1(E)dE}{\int_0^{E_0} g(E,E_0)\bar{E}_{ab1}(E)\varepsilon_1(E)dE}; \quad (15)$$

$$d_{t2} = \frac{\int_0^{E_0} g(E,E_0)\exp(-m(E,Z)\rho H - m(E,Z_1)\rho_1 H_1 - m(E,Z_f)\rho_f H_f)\bar{E}_{ab2}(E)\varepsilon_2(E)dE}{\int_0^{E_0} g(E,E_0)\exp(-m(E,Z_1)\rho_1 H_1 - m(E,Z_f)\rho_f H_f)\bar{E}_{ab2}(E)\varepsilon_2(E)dE}. \quad (16)$$

Из (2), (3), (6) — (8), (13), (14) несложно получить, что средние значения (математические ожидания) и дисперсии шумов Φ_1 и Φ_2 соответственно равны:

$$\bar{\Phi}_1 = 0; \quad \bar{\Phi}_2 = 0; \quad (17)$$

$$\sigma^2(\Phi_1) = \frac{\sigma^2[N_1(H)]}{[\bar{B}_1(0)]^2} = \frac{\int_0^{E_0} g(E,E_0)\exp(-m(E,Z)\rho H)\overline{E^2_{ab1}}(E)\varepsilon_1(E)dE}{C_{\text{id}}\left[\int_0^{E_0} g(E,E_0)\bar{E}_{ab1}(E)\varepsilon_1(E)dE\right]^2}; \quad (18)$$

$$\sigma^2(\Phi_2) = \frac{\sigma^2[N_2(H)]}{[\bar{B}_2(0)]^2} =$$

$$= \frac{\int_0^{E_0} g(E,E_0)\exp(-m(E,Z)\rho H - m(E,Z_1)\rho_1 H_1 - m(E,Z_f)\rho_f H_f)\overline{E^2_{ab2}}(E)\varepsilon_2(E)dE}{C_{\text{id}}\left[\int_0^{E_0} g(E,E_0)\exp(-m(E,Z_1)\rho_1 H_1 - m(E,Z_f)\rho_f H_f)\bar{E}_{ab2}(E)\varepsilon_2(E)dE\right]^2}. \quad (19)$$

Второй детектор в сэндвич-детекторе, согласно [20], вполне естественно полагать детектором полного поглощения в целях наиболее полного использования падающего излучения. В этом случае в соответствующих формулах следует положить

$$\varepsilon_2(E) = \bar{E}_{ab2}(E)\big/E = \overline{E^2_{ab2}}(E)\big/E^2 = 1. \quad (20)$$

Совокупность формул (13)—(20) выражает собой математическую модель радиационных прозрачностей ОК для сэндвич-детектора излучения. Она может быть использована для решения определенного круга задач, связанных с исследованием МДЭ применительно к рентгеновским сканирующим системам неразрушающего контроля, содержащим линейку сэндвич-детекторов.

Между тем, для более углубленного анализа МДЭ при использовании в ССЦР сэндвич-детекторов излучения модели (13)—(20) может оказаться недостаточно вследствие того, что она не учитывает статистическую зависимость между выходными сигналами $B_1(H)$ и $B_2(H)$ сэндвич-детектора. Эта зависимость может быть достаточно значительной, поскольку поток излучения, падающий на сэндвич-детектор, является общим для первого (переднего) и второго (заднего) детекторов излучения. Поэтому возникает необходимость разработки новой математической модели радиационных прозрачностей ОК для сэндвич-детектора излучения, которая бы учитывала статистическую зависимость его выходных сигналов.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАДИАЦИОННЫХ ПРОЗРАЧНОСТЕЙ ОК ДЛЯ СЭНДВИЧ-ДЕТЕКТОРА ИЗЛУЧЕНИЯ С УЧЕТОМ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ЗАВИСИМОСТИ ЕГО ВЫХОДНЫХ СИГНАЛОВ

Обозначим через $B_0(H)$ — суммарный заряд, падающий на сэндвич-детектор за время T при наличии ОК. Величина $B_0(H)$ может быть интерпретирована как сигнал на выходе идеального детектора излучения, под которым подразумевается гипотетический детектор полного поглощения, у которого геометрические размеры и расположение идентичны первому (переднему) детектору излучения.

Аналогично сигналам $B_1(H)$ и $B_2(H)$ величина (сигнал) $B_0(H)$ представима в виде

$$B_0(H) = \overline{B_0}(H) + N_0(H), \tag{21}$$

где

$$\overline{B_0}(H) = \gamma_c C_{\text{id}} \int_0^{E_0} g(E, E_0) \exp(-m(E, Z)\rho H) E dE \tag{22}$$

— среднее значение (математическое ожидание) сигнала на выходе идеального детектора (суммарного заряда, падающего на сэндвич-детектор) при наличии ОК; $N_0(H)$ — шум (обусловлен квантовой природой излучения), среднее значение (математическое ожидание) $\overline{N}_0(H)$ которого и дисперсия $\sigma^2[N_0(H)]$ соответственно равны:

$$\overline{N}_0(H) = 0;$$

$$\sigma^2\left[N_0(H)\right] = \sigma^2\left[B_0(H)\right] = \gamma_c^2 C_{\text{id}} \int_0^{E_0} g(E, E_0) \exp(-m(E, Z)\rho H) E^2 dE. \tag{23}$$

Для сигнала на выходе идеального детектора при отсутствии ОК среднее значение (математическое ожидание) и дисперсия находятся из (22), (23) подстановкой $H = 0$.

Для идеального детектора излучения радиационная прозрачность ОК по аналогии с (13), (14) запишется как

$$d_0 = \frac{B_0(H)}{\overline{B_0}(0)} = \frac{\overline{B_0}(H) + N_0(H)}{\overline{B_0}(0)} = \frac{\overline{B_0}(H)}{\overline{B_0}(0)} + \frac{N_0(H)}{\overline{B_0}(0)} = d_{t0} + \Phi_0, \tag{24}$$

где d_{t0} — среднее значение (математическое ожидание) радиационной прозрачности ОК; Φ_0 — шум радиационной прозрачности ОК, обусловленный квантовой природой излучения.

Величины d_0 и d_{t0} в (24) можно соответственно интерпретировать как экспериментальную и теоретическую радиационные прозрачности ОК для идеального детектора.

Развернутое выражение для d_{t0} выводится из (22) и имеет вид

$$d_{t0} = \frac{\int_0^{E_0} g(E, E_0) \exp(-m(E, Z)\rho H) E dE}{\int_0^{E_0} g(E, E_0) E dE}. \tag{25}$$

С учетом (22)—(24) несложно убедиться в справедливости следующих соотношений для среднего значения (математического ожидания) и дисперсии шума Φ_0:

$$\overline{\Phi}_0 = 0;\,; \quad \sigma^2(\Phi_0) = \frac{\sigma^2\left[N_0(H)\right]}{\left[\overline{B}_0(0)\right]^2} = \frac{\int_0^{E_0} g(E, E_0) \exp(-m(E, Z)\rho H) E^2 dE}{C_{\text{id}}\left[\int_0^{E_0} g(E, E_0) E dE\right]^2}. \tag{26}$$

Вполне очевидно, что сигнал $B_1(H)$ на выходе первого детектора составляет некоторую случайную часть суммарного заряда, падающего на сэндвич-детектор, то есть некоторую случайную часть сигнала $B_0(H)$ на выходе идеального детектора. Вследствие этого он может быть представлен в виде

$$B_1(H) = \alpha B_0(H), \tag{27}$$

где α — независимая от сигнала $B_0(H)$ случайная величина, распределенная на отрезке [0, 1]. При этом величина $(1 - \alpha)B_0(H)$ будет представлять собой суммарный заряд, который прошел через первый детектор за время T при наличии ОК. Исходя из этого, заряд $B_f(H)$, прошедший через фильтр, будет выглядеть как

$$B_f(H) = \beta(1-\alpha)B_0(H), \tag{28}$$

где β — независимая от α и $B_0(H)$ случайная величина, распределенная на отрезке [0, 1].

Предполагая (как и ранее выше), что второй детектор в сэндвич-детекторе является детектором полного поглощения, получаем, что $B_2(H) = B_f(H)$, откуда с учетом (28) будем иметь следующее выражение для сигнала $B_2(H)$:

$$B_2(H) = \beta(1-\alpha)B_0(H). \tag{29}$$

Перейдем от уравнений (27) и (29), связывающих сигналы на выходе первого и второго детекторов с сигналом на выходе идеального детектора (суммарного заряда, падающего на сэндвич-детектор), к соответствующим уравнениям для радиационных прозрачностей ОК, учитывая (13), (14) и (24):

$$d_1 = \alpha \frac{\overline{B_0}(0)}{\overline{B_1}(0)} d_0\,; \quad d_2 = \beta(1-\alpha)\frac{\overline{B_0}(0)}{\overline{B_2}(0)} d_0. \tag{30}$$

Из (13), (14), (17), (24) и (26) следует, что средние значения (математические ожидания) и вторые начальные моменты (средние квадраты) радиационных прозрачностей d_i (i = 0, 1, 2) будут соответственно равны:

$$\overline{d_i} = d_{ti}\,; \ \overline{d_i^2} = \sigma^2(\Phi_i) + d_{ti}^2, \ i = 0,\,1,\,2. \tag{31}$$

Используя уравнения (30), (31), найдем средние значения (математические ожидания) $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ и вторые начальные моменты (средние квадраты) $\overline{\alpha^2}$, $\overline{\beta^2}$ случайных величин α и β:

$$\overline{\alpha} = \frac{\overline{B_1}(0)}{\overline{B_0}(0)} \cdot \frac{d_{t1}}{d_{t0}}\,; \ \overline{\alpha^2} = \left[\frac{\overline{B_1}(0)}{\overline{B_0}(0)}\right]^2 \cdot \frac{\sigma^2(\Phi_1) + d_{t1}^2}{\sigma^2(\Phi_0) + d_{t0}^2}\,; \tag{32}$$

$$\overline{\beta} = \frac{\overline{B_2}(0)}{\overline{B_0}(0)} \cdot \frac{d_{t2}}{(1-\overline{\alpha})d_{t0}}\,; \ \overline{\beta^2} = \left[\frac{\overline{B_2}(0)}{\overline{B_0}(0)}\right]^2 \cdot \frac{\sigma^2(\Phi_2) + d_{t2}^2}{(1-2\overline{\alpha}+\overline{\alpha^2})(\sigma^2(\Phi_0) + d_{t0}^2)}. \tag{33}$$

Совокупность уравнений (30)—(33) служит теоретической основой, в частности, для проведения адекватного математического моделирования значений радиационных прозрачностей ОК, соответствующих первому и второму детекторам (в сэндвич-детекторе) с учетом статистической зависимости их выходных сигналов. При этом законы распределения случайных величин (шумов) Φ_i (i = 0, 1, 2) в случае использования аналогового режима регистрации излучения могут быть приняты, согласно [17], как нормальные (гауссовские). Что касается случайных величин α и β, то в качестве их законов распределений могут быть взяты бета-распределения. Параметры p и q (p, q > 0) данного распределения могут быть найдены методом моментов, то есть из системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{p}{p+q} = M_1, \\ \dfrac{p(p+1)}{(p+q)(p+q+1)} = M_2, \end{cases} \tag{34}$$

где левая часть первого из уравнений (34) и левая часть второго из уравнений (34) представляют собой, согласно [21], соответственно первый и второй начальные моменты бета-распределения; M_1, M_2 — первый и второй начальные моменты исследуемой случайной величины ($M_1=\overline{\alpha}, M_2=\overline{\alpha^2}$ для случайной величины α и $M_1=\overline{\beta}, M_2=\overline{\beta^2}$ для случайной величины β).

Для исследования разрешимости системы (34) относительно параметров p и q введем в рассмотрение функции $\tilde{M}_1(p,q)$, $\tilde{M}_2(p,q)$, определяемые как левые части первого и второго уравнений системы (34) соответственно. Вычислим теперь якобиан J преобразования переменных (p, q) в переменные (M_1, M_2):

$$J=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\tilde{M}_1(p,q)}{\partial p} & \dfrac{\partial\tilde{M}_1(p,q)}{\partial q} \\ \dfrac{\partial\tilde{M}_2(p,q)}{\partial p} & \dfrac{\partial\tilde{M}_2(p,q)}{\partial q} \end{vmatrix}=-\frac{pq}{(p+q)^3(p+q+1)^2}.$$

Очевидно, что на множестве $\{(p,q)\in R^2 \,|\, p,q>0\}$ якобиан отличен от нуля (является отрицательным). Следовательно, отображение множества $\{(p,q)\in R^2 \,|\, p,q>0\}$ на множество $\{(M_1,M_2)\in R^2 \,|\, 0<M_2<M_1<1\}$ векторной функцией $(\tilde{M}_1(p,q), \tilde{M}_2(p,q))$ является взаимнооднозначным. Поэтому, для фиксированной пары значений (M_1,M_2) из множества $\{(M_1,M_2)\in R^2 \,|\, 0<M_2<M_1<1\}$ решение системы уравнений (34) существует и единственно. Непосредственно проверкой легко убедиться, что это решение имеет следующий вид:

$$\begin{cases} p=M_1\dfrac{M_1-M_2}{M_2-M_1^2}, \\ q=(1-M_1)\dfrac{M_1-M_2}{M_2-M_1^2}. \end{cases} \tag{35}$$

Соотношения (35) позволяют находить параметры бета-распределений для случайных величин α и β.

Таким образом, нами получена совокупность уравнений (30)—(33), которая в сочетании с (21)—(29) и (34), (35) представляет собой математическую модель радиационных прозрачностей ОК для сэндвич-детектора излучения с учетом статистической зависимости его выходных сигналов.

Вопрос о том, какую из двух моделей (13)—(20) или (30)—(33) предпочтительнее использовать на практике, целесообразно решать отдельно в каждом конкретном случае, принимая во внимание степень значимости и сложности решаемой задачи. Первая из них проще, но при этом не учитывает статистическую зависимость выходных сигналов сэндвич-детектора излучения. Вторая, напротив — сложнее, но учитывает указанную зависимость.

В качестве некоторой рекомендации для выбора одной из этих двух моделей предлагается осуществить оценку коэффициента корреляции выходных сигналов сэндвич-детектора излучения при некоторых «типичных» условиях функционирования системы контроля. И по его величине сделать выбор в пользу той или иной модели.

ОЦЕНКА КОЭФФИЦИЕНТА КОРРЕЛЯЦИИ ВЫХОДНЫХ СИГНАЛОВ СЭНДВИЧ-ДЕТЕКТОРА ИЗЛУЧЕНИЯ

Коэффициент корреляции выходных сигналов $B_1(H)$ и $B_2(H)$ сэндвич-детектора излучения, согласно [22], есть выражение вида

$$r[B_1(H),B_2(H)]=\frac{\mathrm{cov}[B_1(H),B_2(H)]}{\sigma[B_1(H)]\sigma[B_2(H)]}, \tag{36}$$

где

$$\mathrm{cov}[B_1(H),B_2(H)]=\overline{B_1(H)\cdot B_2(H)}-\overline{B}_1(H)\cdot\overline{B}_2(H), \tag{37}$$

— ковариация между сигналами $B_1(H)$ и $B_2(H)$; $\overline{B_1(H)\cdot B_2(H)}$ — среднее значение (математическое ожидание) произведения $B_1(H)\cdot B_2(H)$; $\sigma[B_1(H)]$, $\sigma[B_2(H)]$ — средние квадратические отклонения сигналов $B_1(H)$ и $B_2(H)$ соответственно.

Как видно из (36) и (37), точное вычисление коэффициента корреляции невозможно вследствие того, что величина (среднее произведение) $\overline{B_1(H)\cdot B_2(H)}$ неизвестна, поскольку неизвестен совместный закон распределения сигналов $B_1(H)$ и $B_2(H)$. В этой связи нами предлагается оценить аналитически данный коэффициент. Для этого воспользуемся подходом, использованным нами ранее при построении математической модели радиационных прозрачностей ОК для сэндвич-детектора излучения с учетом статистической зависимости выходных сигналов $B_1(H)$ и $B_2(H)$ в предположении, что второй детектор в сэндвич-детекторе является детектором полного поглощения. В аналитическом виде данный подход представлен совокупностью формул (27) и (29).

При подстановке (27) и (29) в (37) с учетом независимости случайных величин α, β и сигнала $B_0(H)$ будем иметь следующий вид:

$$\operatorname{cov}\left[B_1(H),B_2(H)\right]=\overline{\alpha B_0(H)\beta(1-\alpha)B_0(H)}-\overline{B}_1(H)\cdot\overline{B}_2(H)=$$
$$=\overline{(\alpha-\alpha^2)\beta B_0^2(H)}-\overline{B}_1(H)\cdot\overline{B}_2(H)=(\overline{\alpha}-\overline{\alpha^2})\overline{\beta}\,\overline{B_0^2}(H)-\overline{B}_1(H)\cdot\overline{B}_2(H). \quad (38)$$

Из (27) и (29) с учетом независимости случайных величин α, β и сигнала $B_0(H)$ также следует:

$$\overline{B}_1(H)=\overline{\alpha B_0(H)}=\overline{\alpha}\overline{B}_0(H); \quad (39)$$

$$\overline{B_1^2}(H)=\overline{\alpha^2 B_0^2(H)}=\overline{\alpha^2}\cdot\overline{B_0^2}(H); \quad (40)$$

$$\overline{B}_2(H)=\overline{\beta(1-\alpha)B_0(H)}=\overline{\beta}(1-\overline{\alpha})\overline{B}_0(H). \quad (41)$$

Из (39)—(41) получаем:

$$\overline{\alpha}=\frac{\overline{B}_1(H)}{\overline{B}_0(H)};\quad \overline{\alpha^2}=\frac{\overline{B_1^2}(H)}{\overline{B_0^2}(H)};\quad \overline{\beta}=\frac{\overline{B}_2(H)}{(1-\overline{\alpha})\overline{B}_0(H)}=\frac{\overline{B}_2(H)}{\overline{B}_0(H)-\overline{B}_1(H)}. \quad (42)$$

При подстановке (42) в (38) запишем как

$$\operatorname{cov}\left[B_1(H),B_2(H)\right]=\left[\frac{\overline{B}_1(H)}{\overline{B}_0(H)}-\frac{\overline{B_1^2}(H)}{\overline{B_0^2}(H)}\right]\frac{\overline{B}_2(H)}{\overline{B}_0(H)-\overline{B}_1(H)}\overline{B_0^2}(H)-\overline{B}_1(H)\cdot\overline{B}_2(H)=$$

$$=\left[\frac{\overline{B}_1(H)}{\overline{B}_0(H)}\overline{B_0^2}(H)-\overline{B_1^2}(H)\right]\frac{\overline{B}_2(H)}{\overline{B}_0(H)-\overline{B}_1(H)}-\overline{B}_1(H)\cdot\overline{B}_2(H)=$$

$$=\frac{\overline{B}_2(H)}{\overline{B}_0(H)-\overline{B}_1(H)}\left[\frac{\overline{B}_1(H)}{\overline{B}_0(H)}\overline{B_0^2}(H)-\overline{B_1^2}(H)-\overline{B}_0(H)\overline{B}_1(H)+\overline{B}_1^{\,2}(H)\right]=$$

$$=\frac{\overline{B}_2(H)}{\overline{B}_0(H)-\overline{B}_1(H)}\left[\frac{\overline{B}_1(H)}{\overline{B}_0(H)}\overline{B_0^2}(H)-\overline{B_1^2}(H)-\overline{B}_0(H)\overline{B}_1(H)+\overline{B}_1^{\,2}(H)\right]=$$

$$=\frac{\overline{B}_2(H)}{\overline{B}_0(H)-\overline{B}_1(H)}\left[\frac{\overline{B}_1(H)}{\overline{B}_0(H)}\left(\overline{B_0^2}(H)-\overline{B}_0^{\,2}(H)\right)-\left(\overline{B_1^2}(H)-\overline{B}_1^{\,2}(H)\right)\right]=$$
$$=\frac{\overline{B}_2(H)}{\overline{B}_0(H)-\overline{B}_1(H)}\left\{\frac{\overline{B}_1(H)}{\overline{B}_0(H)}\sigma^2\left[B_0(H)\right]-\sigma^2\left[B_1(H)\right]\right\}. \quad (43)$$

При подстановке (43) в (36) окончательно получаем искомую аналитическую оценку коэффициента корреляции выходных сигналов $B_1(H)$ и $B_2(H)$ сэндвич-детектора излучения (в предположении, что второй детектор в сэндвич-детекторе является детектором полного поглощения):

$$r\left[B_1(H),B_2(H)\right]=\frac{\dfrac{\overline{B}_2(H)}{\overline{B}_0(H)-\overline{B}_1(H)}\left\{\dfrac{\overline{B}_1(H)}{\overline{B}_0(H)}\sigma^2\left[B_0(H)\right]-\sigma^2\left[B_1(H)\right]\right\}}{\sigma\left[B_1(H)\right]\sigma\left[B_2(H)\right]}. \quad (44)$$

Заметим, что оценка коэффициента корреляции (44) не меняется, если:

все $\overline{B}_i(H)$ $(i = 0, 1, 2)$ умножить на произвольную положительную константу P, в частности $P=\dfrac{1}{\gamma_c C_{\text{id}}}$;

все дисперсии $\sigma^2\left[B_i(H)\right]=\sigma^2\left[N_i(H)\right]$ $(i = 0, 1, 2)$ умножить на произвольную положительную константу Q, в частности $Q=\dfrac{1}{\gamma_c^2 C_{\text{id}}}$.

Приведем теперь примеры вычисления коэффициента корреляции выходных сигналов $B_1(H)$ и $B_2(H)$ сэндвич-детектора излучения на основе полученного выражения (44). С этой целью предположим, что в качестве тестовых материалов используются углерод, алюминий и железо (как это обычно и делается для рентгеновских систем досмотра багажа и ручной клади [17]). Предположим также, что сэндвич-детектор имеет следующую структуру [1]: первый (передний) детектор 0,3 мм CsI; промежуточный фильтр 0,7 мм Cu; второй (задний) детектор 5 мм CsI. Энергетический спектр рентгеновского излучения по числу квантов примем равным

$$g(E,E_0)=\frac{dN}{dE}=\frac{1}{E}\varphi(E,E_0),$$

где $\varphi(E,E_0)=\dfrac{dI}{dE}=E_0-E$ — энергетический спектр интенсивности I излучения источника (спектр Крамерса) при максимальной энергии в спектре E_0, 1/с. Максимальную энергию E_0 выберем равной 160 кэВ. Значения массовых коэффициентов ослабления заимствуем из базы данных [23].

С учетом принятых предположений получаем следующие значения коэффициента корреляции (44):

$$r_{\text{C}}(1)=0{,}25;\ r_{\text{C}}(5)=0{,}22;\ r_{\text{Al}}(1)=0{,}2;\ r_{\text{Al}}(5)=0{,}16;\ r_{\text{Fe}}(1)=0{,}11;\ r_{\text{Fe}}(5)=0{,}05. \quad (45)$$

Здесь нижний индекс у коэффициента корреляции r означает материал ОК, а число в скобках — толщину ОК в мм.

Как видно из (45), коэффициент корреляции выходных сигналов сэндвич-детектора излучения монотонно уменьшается как с ростом атомного номера материала ОК, так и его толщины. Это обусловлено, на наш взгляд, ужесточением пучка излучения вследствие чего он становится статистически более однородным. Вместе с тем сами значения коэффициента корреляции, в целом, оказываются сравнительно небольшие, что позволяет вполне обосновано использовать при исследовании МДЭ более простую модель (13)—(20) с целью получения некоторых первичных (номинальных) результатов, в частности, для распознавания тяжелых материалов (железо). В то же время максимальные значения коэффициента корреляции приходятся на легкие материалы (углерод) и могут достигать значительной величины (более 0,2). К этому следует добавить, что большая часть взрывчатых веществ относится к легким материалам и имеет эффективный атомный номер близкий к 7 [4]. Поэтому для углубленного анализа МДЭ применительно к распознаванию легких материалов целесообразно использовать более сложную модель (30)—(33).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье разработаны две математические модели радиационных прозрачностей объекта контроля для сэндвич-детектора рентгеновского излучения. При этом первая модель не учитывает, а вторая — учитывает статистическую зависимость выходных сигналов сэндвич-детектора. Получена аналитическая оценка коэффициента корреляции выходных сигналов сэндвич-детектора и приведены результаты вычислений его значений для типичных тестовых материалов, используемых при рентгеновском досмотре багажа и ручной клади. Согласно данным результатам, первая модель может быть использована при исследовании метода дуальных энергий с целью получения некоторых первичных (номинальных) результатов, в частности при распознавании тяжелых материалов, а вторая — при исследовании возможностей данного метода по распознаванию легких материалов, что особенно актуально для задач обнаружения взрывчатых веществ.

Разработанные модели являются основой, в частности для создания алгоритмов статистической оценки влияния шумов, обусловленных квантовой природой рентгеновского излучения, на точность распознавания материалов контролируемых объектов методом дуальных энергий при использовании в досмотровой системе контроля сэндвич-детекторов излучения. Данные алгоритмы, в свою очередь, могут позволить осуществить на практике, на стадии проектирования новой досмотровой системы, оптимальный по точности распознавания материалов контролируемых объектов выбор параметров отдельного сэндвич-детектора излучения, то есть оптимальный выбор материала и толщины первого (переднего) детектора, а также оптимальный выбор материала и толщины промежуточного фильтра.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rebuffel V., Dinten J.M.* Dual-energy X-ray imaging: benefits and limits // Insight-non-destructive testing and condition monitoring. 2007. V. 49. No. 10. P. 589—594.

2. *Park J.S., Kim J.K.* Calculation of effective atomic number and normal density using a source weighting method in a dual energy X-ray inspection system // Journal of the Korean physical society. 2011. V. 59. No. 4. P. 2709—2713.

3. *Duvillier J., Dierick M., Dhaene J., Van Loo D., Masschaele B., Geurts R., Hoorebeke L.V., Boone M.N.* Inline multi-material identification via dual energy radiographic measurements // NDT & E International. 2018. V. 94. P. 120—125.

4. *Огородников С.А.* Распознавание материалов при радиационном таможенном контроле на базе линейного ускорителя электронов / Дис. … канд. техн. наук. Санкт-Петербург, 2002. 121 с.

5. *Гавриш Ю.Н., Бердников Я.А., Спирин Д.О., Передерий А.Н., Сафонов М.В., Романов И.В.* Программный комплекс для восстановления интроскопических изображений с использованием метода дуальной энергии // Problems of atomic science and technology. 2010. № 3. Series: Nuclear Physics Investigations (54). P. 123—125.

6. *Gil Y., Oh Y., Cho M., Namkung W.* Radiography simulation on single-shot dual-spectrum X-ray for cargo inspection system // Applied Radiation and Isotopes. 2011. V. 69. No. 2. P. 389—393.

7. *Osipov S.P., Udod V.A., Wang Y.* Identification of materials in X-Ray inspections of objects by the dual-energy method // Russian Journal of Nondestructive Testing. 2017. V. 53. No. 8. P. 568—587. [*Осипов С.П., Удод В.А., Ван Я.* Распознавание материалов методом дуальных энергий при радиационном контроле объектов // Дефектоскопия. 2017. № 8. С. 33—56.]

8. *Osipov S.P., Usachev E.Yu., Chakhlov S.V.* et al. Selecting Parameters of Detectors When Recognizing Materials Based on the Separation of Soft and Hard X-Ray Components // Russian Journal of Nondestructive Testing. 2018. V. 54. No. 11. P. 797—810. [*Осипов С.П., Усачев Е.Ю., Чахлов С.В., Щетинкин С.А., Камышева Е.Н.* Выбор параметров детекторов в методе распознавания материалов на основе разделения мягкой и жесткой составляющих рентгеновского излучения // Дефектоскопия. 2018. № 11. С. 60—71.]

9. *Fredenberg E*. Spectral and dual-energy X-ray imaging for medical applications // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment. 2018. V. 878. P. 74—87.

10. *Ying Zhengrong, Naidu Ram, Crawford Carl R.* Dual energy computed tomography for explosive detection // Journal of X-Ray Science and Technology. 2006. V. 14. P. 235—256.

11. *Chang S., Lee H. K., Cho G.* Application of a dual-energy monochromatic x-ray CT algorithm to polychromatic x-ray CT: a feasibility study // Nuclear Engineering and Technology. 2012. V. 44. No.1. P. 61—70.

12. *Iovea M., Neagu M., Duliu O.G., Oaie G., Szobotka S., Mateiasi G.* A Dedicated On-Board Dual-Energy Computer Tomograph // J. Nondestruct Eval. 2011. V. 30. P. 164—171.

13. *Alves H., Lima I., Lopes R.T.* Methodology for attainment of density and effective atomic number through dual energy technique using microtomographic images // Applied Radiation and Isotopes. 2014. V. 89. P. 6—12.

14. *Jia Hao, Kejun Kang, Li Zhang, Zhiqiang Chen*. A novel image optimization method for dual-energy computed tomography // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment. 2013. V. 722. P. 34—42**.**

15. *Свистунов Ю.А., Ворогушин М.Ф., Петрунин В.И., Сидоров А.В., Гавришин Ю.Н., Фиалковский А.М.* Развитие работ по созданию рентгеновских и ядерно-физических инспекционных комплексов в НИИЭФА им. Д.В. Ефремова // Problems of atomic science and technology. 2006. No. 3. P. 171—173.

16. Заявка 2458408. Европейское патентное ведомство, МПК G01V 5/00. Dual-energy X-ray body scanning device and image processing method. Chen Xue Liang, Chen Li, Huo Mei Chun, Yang Li Rui, Dong Ming Wen, Kong Wei Wu, Yang XiaoYue, Xue Kai, Li Yong Qing, Li Guang Qing, Zhao Lei. BEIJING

ZHONGDUN ANMIN ANALYSIS TECHNOLOGY CO LTD, FIRST RES INST OF MINISTRY OF PUBLIC SECURITY OF P R C / № 11167491; заявл. 25.05.2011; опубл. 30.05.2012.

17. *Udod V.A., Osipov S.P., Wang Y.* Estimating the Influence of Quantum Noises on the Quality of Material Identification by the Dual-Energy Method // Russian Journal of Nondestructive Testing. 2018. V. 54. No. 8. P. 585—600. [*Удод В.А., Осипов С.П., Ван Я.* Оценка влияния квантовых шумов на качество распознавания материалов методом дуальных энергий // Дефектоскопия. 2018. № 8. С. 50—65.]

18. *Udod V.A., Osipov S.P., Wang Y.* The mathematical model of image, generated by scanning digital radiography system / IOP Conference Series: Materials Science and Engineering // IOP Publishing. 2017. V. 168. No. article 012042.

19. *Rogers T.W., Jaccard N., Griffin L.D.* A deep learning framework for the automated inspection of complex dual-energy x-ray cargo imagery. — Anomaly Detection and Imaging with X-Rays (ADIX) II / International Society for Optics and Photonics. 2017. V. 10187. No. article 101870L.

20. *Roessl E., Herrmann C.* Cramér–Rao lower bound of basis image noise in multiple-energy x-ray imaging // Phys. Med. and Biol. 2009. V. 54. No. 5. P. 1307—1318.

21. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике (для научных работников и инженеров). М.: Наука, 1978. 832 с.

22. *Вентцель Е.С., Овчаров Л.А.* Теория вероятностей и ее инженерные приложения. М.: Наука, 1988. 480 с.

23. X-ray mass attenuation coefficients. https://physics.nist.gov/PhysRefData/XrayMassCoef/tab3.html