

## ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ИДЕНТИФИКАЦИИ МАЛОГО ДЕФЕКТА НА ОСНОВЕ АСИМПТОТИЧЕСКОГО МЕТОДА

© 2020 г. А. О. Ватульян<sup>1,2,\*</sup> О. А. Беляк<sup>3,\*\*</sup>

<sup>1</sup>Южный федеральный университет, Россия 344006 Ростов-на-Дону, ул. Большая Садовая, 105/42

<sup>2</sup>Южный математический институт ВНЦ РАН, Россия 362027 Владикавказ, ул. Маркуса, 22

<sup>3</sup>Ростовский государственный университет путей сообщения, Россия 344038 Ростов-на-Дону, пл. Народного Ополчения, 2

E-mail: \*vatulyan@math.rsu.ru; \*\*o\_bels@mail.ru

Поступила в редакцию 04.04.2020; после доработки 7.05.2020

Принята к публикации 02.06.2020

Рассмотрена обратная задача реконструкции полости малого характерного размера в ортотропном слое на основании информации о поле перемещений на поверхности слоя, измеренного в рамках частотного зондирования. Разрешающие уравнения в обратной задаче основаны на системе граничных интегральных уравнений, сформулированных только по границе полости. В случае антиплоских колебаний на основании асимптотического подхода получены формулы для определения характеристик малого дефекта. Приведены результаты вычислительных экспериментов.

*Ключевые слова:* ортотропный слой, дефект, обратная геометрическая задача.

DOI: 10.31857/S0130308220070015

### ВВЕДЕНИЕ

Неразрушающий контроль качества является важной научно-технической задачей при оценке динамической прочности, например, элементов тяжелонагруженных транспортных средств, машин и механизмов, аэрокосмических изделий. При этом важно проводить оценки потенциальной опасности как зарождающихся дефектов, так и изначально присутствующих мелкокомасштабных дефектов, таких как включения, микротрещины, поры. При этом используются разнообразные методы, позволяющие выявить наличие дефекта, основанные на измерении компонент физических полей, которые несут информацию об его размере, форме, расположению. Наиболее используемые среди них — это акустические методы [1—5], которым посвящено значительное количество публикаций.

С математической точки зрения идентификация дефектов по информации о полях перемещений на границе упругого тела приводит к малоизученным и достаточно сложным обратным геометрическим задачам теории упругости [6, 7]. Решение таких обратных задач может быть осуществлено на основании дифракционной постановки или на основе рассмотрения дефекта в волноводе и определении его характеристик по амплитудам и фазам распространяющихся волн. Так, например, в работах [6, 7] рассмотрена обратная геометрическая задача для изотропной среды в двумерной и пространственной постановках, а параметры дефекта определяются из условий минимума неквадратичного функционала невязки.

Важно отметить, что при наличии приповерхностного дефекта граница тела оказывает существенное влияние на формирование полей перемещений, поэтому в этом случае дифракционная постановка некорректна. Также следует отметить, что обратные задачи по восстановлению формы полости являются некорректными [8, 9].

В настоящей работе решение обратной геометрической задачи об определении полости малого характерного размера в сравнении с толщиной слоя осуществляется на основании информации об амплитудах полей перемещений на поверхности ортотропного упругого слоя, полученных в рамках частотного зондирования. При этом для формулировки разрешающих уравнений в обратной задаче базовыми являются системы граничных интегральных уравнений, сформулированных только лишь по границе полости [10]. Для антиплоских колебаний слоя получены формулы, на основании которых единственным образом определяются искомые параметры полости.

### ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим установившийся режим колебаний ортотропного упругого слоя толщины  $h$ , ослабленного внутренней бесконечно протяженной цилиндрической полостью с гладкой произвольной направляющей  $l_0$  и с образующей, параллельной оси  $Ox_2$ . Нижняя граница слоя  $x_3 = 0$  жестко за-

щемлена. Оси координат  $Ox_1$  и  $Ox_2$  расположены на нижней грани слоя, а ось  $Ox_3$  направлена перпендикулярно вверх. Оси упругой симметрии ортотропного материала совпадают с осями системы координат. Колебания в слое вызваны нагрузкой  $p(x_1, t) = \text{Re}(p(x_1)e^{-i\omega t})$ , приложенной к верхней части границы слоя  $x_3 = h$ .

Краевая задача, описывающая эту проблему, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{ijj} + \rho\omega^2 u_i &= 0; \\ \sigma_{ijj} &= C_{ijkl} u_{k,l}; \\ u_i |_{x_3=0} &= 0, \quad \sigma_{i3} |_{x_3=h} = p_i; \\ \sigma_{ij} n_j |_{l_0} &= 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\rho$  — плотность среды,  $\omega$  — частота колебаний,  $C_{ijkl}$  — компоненты тензора упругих постоянных материала,  $n_j$  — компоненты единичного вектора нормали к кривой  $l_0$ , внешнего по отношению к области, занятой упругой средой. Замыкают постановку задачи условия излучения волн на бесконечности, при формулировке которых использован принцип предельного поглощения [11]. В зависимости от способа приложения нагрузки, краевая задача (1) распадается на антиплоскую задачу (задача 1) и плоскую задачу (задача 2). В задаче 1 ненулевой является компонента  $u_2(x_1, x_3)$  и в краевой задаче (1) полагаем  $I=2, j=1, 3$ . Для задачи 2 отличными от нуля являются компоненты  $u_i(x_1, x_3)$ ,  $i=1, 3$ , и в соотношениях (1) полагаем  $i, j=1, 3$ . Основным способом исследования краевой задачи (1) является предварительное сведение ее к интегральному уравнению (или системе) с нерегулярным ядром на основе идей теории потенциала [12]. Решения краевых задач 1, 2 построены на основе матриц-функций Грина для слоя  $U_i^{(m)}(\mathbf{x}, \xi)$ ,  $i, m=1, 2, 3$ , удовлетворяющих однородным граничным условиям на границах, и обобщенной теоремы взаимности. Индекс  $m$  указывает, что сосредоточенная сила приложена в направлении оси  $Ox_m$ ,  $m=1, 2, 3$ . В результате имеем представления полей перемещений в слое для задачи 1 ( $j=1, 3; i, m=2$ ) и задачи 2 ( $i, j=1, 3; m=3$ ) в виде:

$$\begin{aligned} u_m(\xi) &= u_m^*(\xi) - \int_{l_0} \sigma_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}, \xi) n_j u_i(\mathbf{x}) dl_x; \\ u_m^*(\xi) &= \int_a^b p_i(x_1) U_i^{(m)}(x_1, h, \xi) dx_1, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\sigma_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}, \xi)$ ,  $i, j, m=1, 2, 3$  — компоненты тензора напряжений, выраженные через функции Грина для слоя  $U_i^{(m)}(\mathbf{x}, \xi)$ ,  $i, m=1, 2, 3$ . Поля перемещений в среде представимы в виде суммы двух слагаемых, первое слагаемое  $u_m^*(\xi)$  — представляет собой поле смещений в среде без дефекта (эталонные поля смещений), второе слагаемое обусловлено наличием полости в слое [13]. Дальнейшее решение задач 1, 2 сводится к построению систем граничных интегральных уравнений (ГИУ) только лишь по границе дефекта  $l_0$ , из которых, в свою очередь, и определяются поля смещений на контуре полости  $l_0$ . Надо отметить, что наиболее часто используемый подход при решении систем ГИУ основывается на методе граничных элементов [14, 15], который применим для контуров произвольной конфигурации. Однако такой подход связан со значительными вычислительными трудностями и большими временными затратами. Отметим, что в случае малого характерного размера полости на основании асимптотического подхода получены формулы [13, 16], описывающие поля смещений на контуре дефекта, минуя процедуру дискретизации систем ГИУ. Асимптотический анализ ГИУ в случае окружности малого в сравнении с толщиной слоя радиуса  $r$ , имеющей центр в точке  $\mathbf{x}_0 = (x_{10}, x_{30})$ , приведен в работе [16]. Поля смещений на контуре дефекта приведены в работах [13, 16] для антиплоских колебаний и в работе [17] для плоской задачи. Заметим, что поля перемещений на поверхности слоя в дальней от дефекта зоне, выраженные через амплитуды бегущих волн в слое, имеют представление

$$u_m(\xi_1, h) = u_m^*(\xi_1, h) - \sum_{p=1}^M A_p^{(m)}(\mathbf{x}_0, r) e^{-i\alpha_p^* \xi_1 \text{sign}(x_{10} - \xi_1)} + O(e^{-\zeta \xi_1 \text{sign}(x_{10} - \xi_1)}), \quad m=1, 2, 3, \quad (3)$$

где  $M$  — число распространяющихся волн в слое,  $\alpha_p^*$  — вещественные полюса подынтегральных мероморфных функций. Для задачи 1 они определяются уравнением  $ch(\sqrt{C_{66}\alpha^2 / C_{44} - k^2} h) = 0$ , где  $k^2 = \rho\omega^2 / C_{44}$ , для задачи 2 находятся из решения трансцендентного уравнения вида:

$$K_1 ch((\lambda_1 + \lambda_2)h) + K_2 ch((\lambda_1 - \lambda_2)h) + 2K_3 + 2K_4 = 0;$$

$$\lambda_{1,2} = \sqrt{\frac{-b_0 \pm \sqrt{b_0^2 - 4\gamma_5 c_0}}{2\gamma_5}};$$

$$b_0 = -\alpha^2 (\gamma_1 - 2\gamma_5 \gamma_7 - \gamma_7^2) + k^2 (1 + \gamma_5);$$

$$c_0 = \alpha^4 \gamma_1 \gamma_5 - \alpha^2 (\gamma_1 + \gamma_5) k^2 + k^4;$$

$$\gamma_1 = C_{11} / C_{33}, \gamma_5 = C_{55} / C_{33}, \gamma_7 = C_{13} / C_{33}, k^2 = \rho \omega^2 / C_{33},$$

выражения для  $K_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  зависят от механических характеристик среды и не приводятся в виду их громоздкости.

Для антиплоской задачи выражение для амплитуд бегущих волн в соотношении (3):

$$A_p^{(2)}(\mathbf{x}_0, r) = (-1)^{p+1} \frac{\pi r^2 e^{i\alpha_p^* x_{10} \text{sign}(x_{10} - \xi_1)}}{v\alpha_{1p}^* h} (iu_2^*(\mathbf{x}_0) k^2 \sin(\gamma_p x_{30}) + \text{sign}(x_{10} - \xi_1) \alpha_p^* v u_{2,1}^*(\mathbf{x}_0) (1 + \sqrt{v}) \sin(\gamma_p x_{30}) - i\gamma_p u_{2,3}^*(\mathbf{x}_0) (1 + 1/\sqrt{v}) \cos(\gamma_p x_{30})). \quad (4)$$

Представление (4) справедливо в области изменения безразмерных параметров  $r/h \ll 1$  и  $kr > 1$  [17].

Надо отметить, что соотношение (3) в ближней к дефекту зоне дает существенное расхождение с полем, рассчитанным на основе контурного интегрирования численными методами, поскольку в соотношении (3) не учитываются неоднородные волны. Поэтому для дальнейших исследований будем рассматривать амплитуды бегущих волн в дальней от дефекта зоне,  $\xi_1 \gg 4r$ .

На рис. 1—2 приведены графики  $v_2(\xi_1, h) = u_2(\xi_1, h) - u_2^*(\xi_1, h)$  волнового поля, обусловленного лишь наличием полости в слое при его антиплоских колебаниях, построенные для различных значений радиуса полости на частотах, соответствующих одной и двум распространяющимся волнам в слое в области корректной работы асимптотического подхода [17]. В расчетах приняты следующие значения упругих постоянных для диоксида гафния  $\text{HfO}_2$   $C_{44} = 78$ ,  $C_{66} = 111$  ГПа,  $\rho = 13310$  кг/м<sup>3</sup>

[18]. Колебания в слое вызваны сосредоточенной нагрузкой  $p_2(x_1) = -\frac{p_0}{C_{44}} \delta(x_1 - L)$ , которая при-

ложена на поверхности слоя, причем для рис. 1  $L = 1$ , для рис. 2  $L = -2$ ,  $x_{10} = 0$ ,  $x_{30} = h/2$ . Количество граничных элементов при разбиения полости  $N = 72$  и выбиралось из условия, что на длину волны приходится не менее 7-ми граничных элементов. Важно отметить, что численный эксперимент по расчету волновых полей на поверхности слоя при варьировании параметров полости позволил уста-

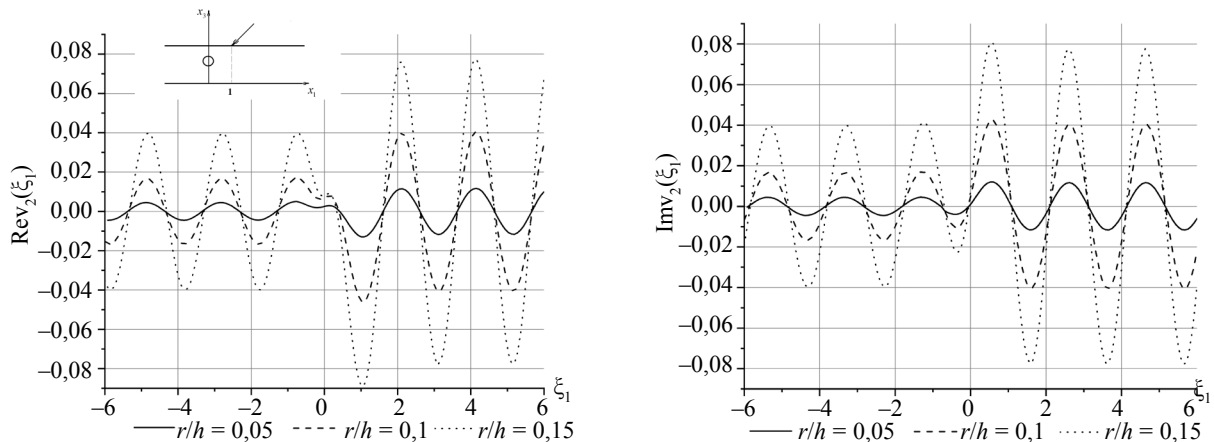


Рис. 1. Волновое поле  $v_2(\xi_1, h)$  на поверхности слоя для случая одной распространяющейся моды.

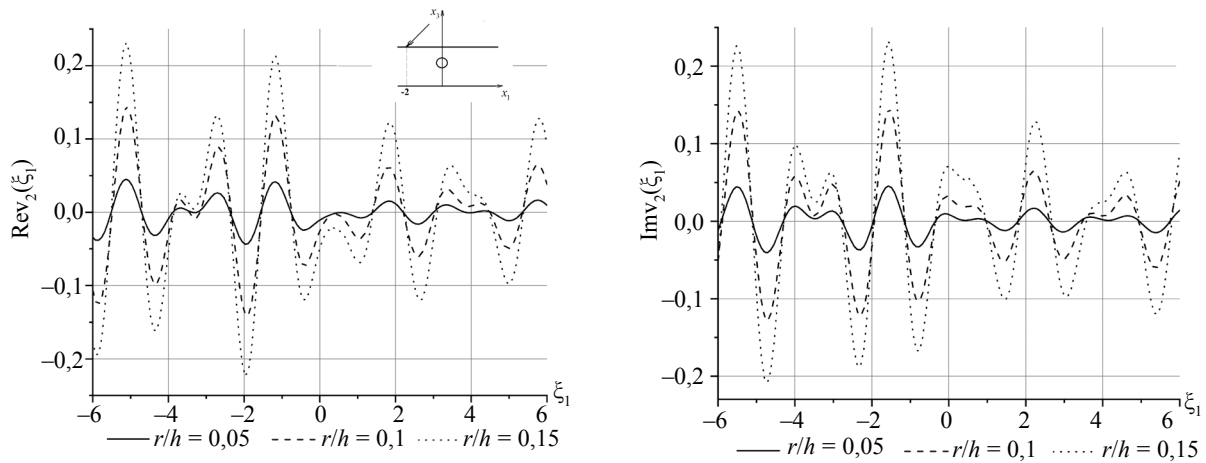


Рис. 2. Волновое поле  $v_2(\xi_1, h)$  на поверхности слоя для случая двух распространяющихся мод.

новить, что относительная разница между амплитудами волновых полей, рассчитанных на основании метода граничных элементов и на основании асимптотического подхода (4) слева и справа от дефекта разнятся тем больше, чем ближе расположена полость к границам слоя  $x_3 = 0$  и  $x_3 = h$ . При этом амплитуды волнового поля справа от полости  $x_{10} < \xi_1$ , рассчитанные на основании асимптотического подхода, имеют меньшую относительную разницу по сравнению со значениями амплитуд, полученными методом граничных элементов. Для приповерхностных полостей область корректной работы асимптотического подхода (где относительное расхождение результатов не превышала 10%) определялась условием  $\delta = 1 - (x_{30} + r)/h < 0,1$ . Для среднезаглубленных полостей и при изменении расположения полости относительно источника описанных выше расхождений результатов в двух методах не наблюдалось.

### ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ НА ОСНОВАНИИ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ПОДХОДА

Обратная геометрическая задача состоит в определении местоположения внутреннего дефекта и его характерного размера на основе измеренных значений амплитуд полей смещений на поверхности слоя в дальней от дефекта зоне. Будем разыскивать искомый контур полости в классе окружностей, а также в предположении малости характерного размера дефекта по отношению к толщине слоя. В этом случае выражение для амплитуд бегущих волн, содержащих информацию о дефекте, имеет вид (4). Таким образом, обратная задача сводится к определению трех неизвестных параметров дефекта:  $x_{10}$ ,  $x_{30}$ ,  $r$ . Отметим, что амплитуды бегущих волн (4) пропорциональны площади поперечного сечения полости, а также имеют четкую структуру разделения неизвестных, что дает возможность получить трансцендентные уравнения для определения каждой из характеристик дефекта. Дальнейшее изложение будем вести для антиплоских колебаний слоя. Процедура реконструкции дефекта проводилась в рамках частотного зондирования, на частотах, соответствующих одной распространяющейся моде в слое.

Изложим последовательно алгоритмы реконструкции параметров дефекта. В алгоритме «А» входной информацией являлась комплексная амплитуда бегущей волны на поверхности слоя  $A_i^*(k_i)$ ,  $i = 1, 2$ , измеренная в дальней от дефекта зоне, например, справа от полости для волновых чисел  $k_1$ ,  $k_2$  ( $k_1 \neq k_2$ ), соответствующих одной распространяющейся моде. В алгоритме «В» в качестве входной информации были взяты амплитуды бегущих волн на поверхности слоя  $A_i^*(k_1)$  и  $A_r^*(k_1)$ , измеренные слева и справа от полости, для волнового числа  $k_1$ , соответствующего одной распространяющейся моде. При этом надо отметить, что графики рассеянного поля на поверхности слоя, приведенные на рис. 1, 2, иллюстрируют изменение амплитуд волновых полей слева и справа от полости.

Согласно алгоритму «А» на первом этапе было осуществлено определение горизонтальной координаты центра полости. Для этого на основании соотношения (4) были получены уравнения вида:

$$A_i^* = -\frac{P_0 \pi}{\nu h C_{66}} e^{-i\alpha_i^* L} r^2 e^{i\varphi_i} F_i(x_{30}, \text{sign}(a)), \quad i = 1, 2, \quad (5)$$

где

$$F_i(x_{30}, \text{sign}(a)) = -\sin^2(\pi x_{30} / 2h) \left( \frac{k_i^2}{(\alpha_i^*)^2} + v(1 + \sqrt{v}) \text{sign}(a) \right) + \\ + \cos^2(\pi x_{30} / 2h) \frac{\pi^2(1 + \sqrt{v})}{4h^2(\alpha_i^*)^2 \sqrt{v}}; \\ \varphi_i = \alpha_i^*(a + |a|), \quad a = L - x_{10}, \quad \alpha_i^* = \sqrt{\frac{k_i^2 - \pi^2 / 4h^2}{v}}.$$

Уравнения (5) эквивалентны системам трансцендентных уравнений вида:

$$\begin{cases} A_{i1} = r^2 F_i(x_{30}, \text{sign}(a)) \cos \varphi_i, \\ A_{i2} = r^2 F_i(x_{30}, \text{sign}(a)) \sin \varphi_i \end{cases}, \quad i = 1, 2; \quad (6)$$

$$A_{i1} = \text{Re}(-A_i^* \frac{vhC_{66}}{p_0\pi} e^{i\alpha_i^*L}), \quad A_{i2} = \text{Im}(-A_i^* \frac{vhC_{66}}{p_0\pi} e^{i\alpha_i^*L}).$$

Исключая два параметра полости путем деления первого уравнения на второе в системах (6), единственным образом определим горизонтальную координату центра дефекта как пересечение двух множеств решений:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \arctg(A_{12} / A_{11}) + \pi n, \quad n \in Z; \\ \varphi_2 &= \arctg(A_{22} / A_{21}) + \pi m, \quad m \in Z. \end{aligned} \quad (7)$$

На втором этапе восстановим вертикальную координату центра полости. Для этого, на основании соотношений (6), составим уравнение вида:

$$\frac{A_{11}}{A_{21}} = \frac{F_1(x_{30}) \cos \varphi_1}{F_2(x_{30}) \cos \varphi_2},$$

которое в виду ранее найденного значения  $x_{10}$  зависит только от вертикальной координаты центра полости и имеет единственное решение при ограничениях  $0 < x_{30}/h < 1$ , исходя из постановки задачи.

На третьем этапе определяется радиус полости, например, из первого уравнения соотношений (6) при ранее найденных  $x_{10}, x_{30}$ .

Опишем алгоритм «В». На основании соотношения (4) составим системы трансцендентных уравнений вида:

$$\begin{cases} A_{11}^r = r^2 F^-(x_{30}) \cos \varphi_1 \\ A_{12}^r = r^2 F^-(x_{30}) \sin \varphi_1 \end{cases}, \quad \begin{cases} A_{11}^l = r^2 F^+(x_{30}) \cos \varphi_1 \\ A_{12}^l = r^2 F^+(x_{30}) \sin \varphi_1 \end{cases}, \quad (8)$$

$$F^\pm(x_{30}) = \sin^2(\pi x_{30} / 2h) \left( -\frac{k_1^2}{(\alpha_1^*)^2} \pm v(1 + \sqrt{v}) \right) + \\ + \cos^2(\pi x_{30} / 2h) \frac{\pi^2(1 + \sqrt{v})}{4h^2(\alpha_1^*)^2 \sqrt{v}};$$

$$A_{11}^r = \text{Re} \left( -A_r^* \frac{vhC_{66}}{p_0\pi} e^{i\alpha_1^*L} \right), \quad A_{12}^r = \text{Im} \left( -A_r^* \frac{vhC_{66}}{p_0\pi} e^{i\alpha_1^*L} \right), \quad (9)$$

а  $A_{i1}^l, i=1,2$  получается из соотношений (9) путем замены  $A_r^*$  на  $A_l^*$ .

Далее исключаем из систем (8) горизонтальную координату центра полости, в итоге получим две функциональные зависимости:

$$\begin{aligned} (A_{11}^r)^2 + (A_{12}^r)^2 - r^4 (F^-(x_{30}))^2 &= 0; \\ (A_{11}^l)^2 + (A_{12}^l)^2 - r^4 (F^+(x_{30}))^2 &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Первому и второму уравнению в соотношении (10) удовлетворяет единственная точка, координатами которой являются искомые параметры  $x_{30}$ ,  $r$  при условии, что полость не выходит на границы слоя. Затем, при уже известных значениях  $x_{30}$ ,  $r$ , например, из первого уравнения первой системы в (8) определим горизонтальную координату центра полости.

Надо отметить, что именно такие алгоритмы позволяют единственным образом определить три искомого параметра полости в рамках частотного зондирования, в диапазоне частот, на которых распространяется одна бегущая волна. Если из выражений (5) сразу исключить радиус полости и далее определять месторасположение дефекта, то это приводит к неединственному определению вертикальной координаты центра, которую можно устранить, только взяв дополнительный набор двух частот при частотном зондировании. При определении горизонтальной координаты также возникает неединственность решения, которую можно устранить только в рамках позиционного зондирования, причем источник необходимо будет поместить как справа, так и слева от полости.

Таблица 1

## Реконструкция параметров дефекта

| Исходные данные<br>$x^* = 2,0h; k_1h = 3,0; k_2h = 4,0$ | Восстановленные характеристики полости    |   |                               |
|---|---|---|-------------------------------|
|   | $\tilde{x}_{10}/\varepsilon_{x_{10}}, \%$ | $\tilde{x}_{30}/\varepsilon_{x_{30}}, \%$ | $\tilde{r}/\varepsilon_r, \%$ |
| $x_{10} = 0, x_{30} = h/2, r = 0,2 h$                   | 0,0129/1,3                                | 0,4810/1,9                                | 0,1863/1,4                    |
| $x_{10} = 0, x_{30} = 0,65h, r = 0,2 h$                 | 0,0350/3,5                                | 0,7349/8,5                                | 0,1922/0,8                    |
| $x_{10} = 0,1h, x_{30} = 0,4h, r = 0,2 h$               | 0,1126/1,3                                | 0,4160/1,6                                | 0,1858/1,4                    |
| $x_{10} = 0,3h, x_{30} = 0,5h, r = 0,1 h$               | 0,3009/0,1                                | 0,5021/0,2                                | 0,1028/0,3                    |

Результаты численных экспериментов по определению параметров полости  $x_{10}$ ,  $x_{30}$ ,  $r$  на основании алгоритма «В» отражены в табл.1. Левая колонка отвечает за исходные данные, при которых были решены соответствующие прямые задачи, рассчитаны амплитуды рассеянных полей на основании соотношения (4), которые в свою очередь служили входной информацией при решении обратных задач. Правая колонка содержит результаты решения обратной задачи, где в числителе дроби стоит восстановленное значение каждого из параметров  $x_{10}$ ,  $x_{30}$ ,  $r$ , а в знаменателе — абсолютная разница между истинным и восстановленным значением соответствующего параметра по отношению к толщине слоя:

$$\varepsilon_{x_{10}} = \frac{|x_{10} - \tilde{x}_{10}|}{h} \cdot 100\%, \quad \varepsilon_{x_{30}} = \frac{|x_{30} - \tilde{x}_{30}|}{h} \cdot 100\%, \quad r = \frac{|r - \tilde{r}|}{h} \cdot 100\%.$$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе предложен асимптотический подход к идентификации дефекта. Описаны алгоритмы, которые позволяют единственным образом определять параметры, характеризующие полость с достаточной степенью точности (менее 9%) в рамках корректной работы асимптотического подхода по сравнению с методом граничного элемента. Ряд численных экспериментов позволили сделать вывод о работоспособности модели расчета волновых полей на поверхности слоя, на основе асимптотического подхода, и устойчивой процедуре идентификации круговых полостей малого характерного размера.

Исследования Беляк О.А. выполнены в рамках федеральной целевой программы «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса

России на 2014—2020 годы» при финансовой поддержке государства в лице Министерства науки и высшего образования России (идентификатор проекта RFMEFI60718X0203).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ермолов И.Н., Ланге Ю.В. Неразрушающий контроль. Т. 3. Ультразвуковой контроль / Справочник. М.: Изд-во Машиностроение, 2004. 864 с.
2. Davydov V.S. Recognition of Incipient Defects in the Units of Ship Machinery by Vibrodiagnostics Based on Optimum Decision Rules // Russian Journal of Nondestructive Testing. 2019. V. 55. No. 3. P. 185—191. [Давыдов В.С. Распознавание зарождающихся дефектов в узлах корабельных механизмов в результате вибродиагностирования на основе оптимальных решающих правил // Дефектоскопия. 2019. № 3. С. 19—24.]
3. Berkovich V.N., Builo S.I. Reconstructing the Amplitudes of Radiation of a Defect Based on Acoustic Emission Signals at the Free Boundary of a Massive Body // Russian Journal of Nondestructive Testing. 2019. V. 55. No. 4. P. 262—267. [Беркович В.Н., Буйло С.И. Восстановление амплитуд излучения дефекта по сигналам акустической эмиссии на свободной границе массивного тела // Дефектоскопия. 2019. № 4. С. 15—20.]
4. Zenga W., Yaob Y., Qia S., Liu L. Finite element simulation of laser-generated surface acoustic wave for identification of subsurface defects // Optic. 2020. In Press.
5. Rose J.L. A Baseline and Vision of Ultrasonic Guided Wave Inspection Potential // Journal of Pressure Vessel Technology. 2002. V. 124. P. 273—282.
6. Karageorghis A., Lesnic D., Marin L. The method of fundamental solutions for the detection of rigid inclusions and cavities in plane linear elastic bodies // Computers&Structures. 2012. V. 106—107. P. 176—188.
7. Karageorghis A., Lesnic D., Marin L. The method of fundamental solutions for three-dimensional inverse geometric elasticity problems // Computers and Structures. 2016. V. 166. P. 51—59.
8. Горюнов А.А., Сасковец А.В. Обратные задачи рассеяния в акустике. М.: Изд-во МГУ, 1989. 152 с.
9. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Изд-во Наука, 1974. 224 с.
10. Ватульян А.О., Гусева И.А. О восстановлении формы полости в ортотропной полуплоскости по заданному на границе волновому полю // ПММ. 1993. № 4. С. 154—157.
11. Ворович И.И., Бабешко В.А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Изд-во Наука, 1979. 319 с.
12. Ватульян А.О. Коэффициентные обратные задачи механики. М.: Изд-во Физматлит, 2019. 272 с.
13. Ватульян А.О., Беляк О.А. О различных способах реконструкции полости в ортотропном слое // ПМТФ. 2009. Т. 50. № 3(295). С. 181—189.
14. Бребия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. М.: Изд-во Мир, 1987. 524 с.
15. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках. М.: Изд-во Мир, 1984. 494 с.
16. Ватульян А.О., Беляк О.А. К реконструкции малых полостей в упругом слое // Дефектоскопия. 2006. № 10. С. 33—39.
17. Ватульян А.О., Беляк О.А. Асимптотический подход к расчету волновых полей в слое с дефектом малого характерного размера // Акустический журнал. 2020. Т. 66. № 3. С. 235—241.
18. Caravaca M.A., Mino J.C., Perez V.J., Casali R.A., Ponce C.A. Ab initio study of the elastic properties of single and polycrystal TiO<sub>2</sub>, ZrO<sub>2</sub> and HfO<sub>2</sub> in the cotunnite structure // J. Phys. Condens. Matter. 2009. V. 21 (1). P. 1—11.