

## КОЛЕБАНИЯ СЛОЯ С РАССЛОЕНИЕМ В РАМКАХ ГРАДИЕНТНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

© 2021 г. А.О. Ватульян<sup>1,2,\*</sup>, О.В. Явруян<sup>2,\*\*</sup>

<sup>1</sup>Южный федеральный университет, Россия 344000 Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8а

<sup>2</sup>Южный математический институт ВНЦ РАН, Россия 362001 Владикавказ, ул. Ватулина, 53

E-mail: \*vatulyan@aanet.ru; \*\*yavruyan@mail.ru

Поступила в редакцию 26.07.2021; после доработки 18.08.2021

Принята к публикации 18.08.2021

Рассмотрена прямая задача об антиплоских колебаниях слоя с расслоением в рамках градиентной теории упругости. В качестве математической модели взята градиентная модель, предложенная Айфантисом. Основное внимание уделено анализу механических полей на берегу трещины и в ее вершинах — концентраторах напряжений. Исследование проведено с использованием метода граничных интегральных уравнений (ГИУ). Построено ГИУ относительно градиента поля перемещений на трещине. Проведен анализ построенного ГИУ, выявлена явным образом кубическая сингулярность. Решение сингулярного ГИУ построено с использованием аппроксимирующих полиномов Чебышева. Проведено исследование для трещин малой относительной длины — асимптотический подход, получены простые полуаналитические выражения для построения функции раскрытия трещины, выявлен диапазон работоспособности асимптотического подхода. Построены поля напряжений в окрестности вершин трещины. Представлены численные результаты вычислительных экспериментов.

*Ключевые слова:* слой, трещина, градиентная теория упругости, колебания, асимптотический метод, установившийся режим, упругий.

DOI: 10.31857/S0130308221100018

### ВВЕДЕНИЕ

Слоистые структуры варьируются от однослойных однородных до многослойных композиций и функционально-градиентных структур (ФГС) и активно используются при моделировании современных материалов с улучшенными свойствами. На сегодняшний день конструктивные элементы, имеющие слоистую структуру, широко востребованы в современной авиационной и аэрокосмической промышленности, в сфере изготовления ядерных реакторов и котлов, при проектировании специальных высокопрочных строительных материалов и во многих других приоритетных областях науки. Однако стоит отметить, что существуют проблемы, влияющие на эффективность использования, на безопасность и прочность конструкций, элементы которых изготовлены из функционально-градиентных материалов (ФГМ) или слоистых композитов. Одним из существенных факторов, способных значительно снизить эксплуатационную способность конструкции и привести к дальнейшему выходу ее из строя, является наличие микродефектов в местах сварки или склейки слоев. Поэтому уточненные математические модели, описывающие реальное поведение слоистых сред с дефектами и позволяющие построить и оценить напряженно-деформированное состояние (НДС) в окрестности вершин трещин, особенно актуальны.

К таким математическим моделям относятся модели неклассической теории упругости — градиентной теории упругости (ГТУ), в которых определяющие соотношения включают в себя градиентные параметры, соотносимые с размерными параметрами исследуемой области, например, с длиной дефекта, толщиной покрытия или микрослоя и т.д., что позволяет учитывать масштабные микроэффекты, уточнять поведение в окрестности интересующих подобластей. Градиентная теория упругости была впервые предложена в середине прошлого века в работах Миндлина, Айфантиса, Тупина, Лурье [1—4]. В отличие от классической теории упругости, в градиентной теории упругости плотность энергии деформации зависит не только от тензора деформаций, но и от первого градиента деформации. Таким образом, полученные определяющие соотношения и уравнения равновесия/движения имеют более высокий порядок. Однако наряду с возможностью описать более точное поведение объекта исследования (особенно в окрестности концентраторов напряжений) возникает ряд сложностей, связанных с исследованием дифференциальных операторов более высокого порядка и выбором параметров градиентной модели. Поэтому дальнейшие исследования были связаны с упрощением многопараметрической градиентной модели и сокращением числа характерных градиентных параметров.

Так, в работах Aifantis и его соавторов [5, 6] была предложена упрощенная модель градиентной теории упругости — одна/двух/трехпараметрические модели для статических и динамических задач, адекватно описывающие реальное поведение объекта исследования.

Статические задачи для тел с трещинами в рамках моделей градиентной теории упругости представлены в работах G. Exadaktylos, I. Vardoulakis и E. Aifantis [6—8], F. Erdogan, Gupta [9, 10], L. Zhang, Y. Huang и J.Y. Chen [11,12], G.H. Paulino [13, 14]. Исследованы статические задачи о трещинах моды I, II, III в однородных или неоднородных, функционально-градиентных средах. Получены граничные интегральные уравнения относительно скачков полей смещений на берегах трещины, рассчитаны коэффициенты интенсивности напряжений у вершин трещины, осуществлено сравнение с классическим случаем. В рамках линейной теории упругости задачи теории трещин исследованы в работах [10,15].

В работах C.Q. Ru, E.C. Aifantis [16] предложена новая схема исследования задач механики в рамках градиентной теории упругости, так называемый метод Ру—Айфантиса, позволяющий перейти от сингулярных решений к регулярированным в два этапа. На первом этапе строятся решения классической теории упругости, далее рассматриваются дифференциальные уравнения более высокого порядка относительно градиентных решений, в правой части которых стоят соответствующие решения классической теории упругости. В результате данного подхода удается исключить сингулярность в полях напряжений и получить новые критерии разрушения.

Также авторами С.А. Лурье, В.В. Васильевым [17, 18] предложена эффективная обобщенная модель для исследования задач теории упругости, в которых возникают сингулярные решения. Уравнения градиентной теории упругости имеют более высокий порядок по сравнению с уравнениями классической теории, однако, в отличие от традиционных неклассических теорий с большим числом дополнительных параметров (например, градиентных параметров), включают независимо от порядка уравнений всего лишь одну дополнительную постоянную, выражающуюся через микроструктурный параметр среды и не требует введения дополнительных моментных напряжений. Обобщенная теория развита для одномерных, двумерных и трёхмерных задач, сформулированы основные уравнения, учитывающие градиенты напряжений и записывающиеся в терминах обобщенных напряжений, деформаций и перемещений. Также основным прорывным моментом предлагаемой теории является возможность экспериментального определения параметра обобщенной модели и верификация полученных теоретических результатов с результатами экспериментов.

Отметим, что статические задачи теории трещин в рамках ГТУ исследованы достаточно подробно, однако, динамические задачи решены в меньшем количестве, поскольку их решение становится на порядок сложнее. Как правило, основное внимание исследователей направлено на решение динамических задач для балок, труб, пластин. Возможности развития градиентной теории упругости для динамических задач, полный обзор градиентной теории упругости для статических и динамических задач, возможности определения градиентных параметров, обсуждение вопросов применения конечно-элементных методов решений в рамках ГТУ обсуждены в работе [19]. В этой же работе приведены основные уравнения ГТУ для динамических задач.

Основной целью исследования является изучение возможности применения неклассических теорий к динамическим задачам теории трещин, в частности, к задаче о колебаниях однородного слоя с расслоением. В статической постановке в рамках градиентной теории упругости такая задача была решена многими авторами [8, 11, 13], в данной работе предложенные методы исследования задачи были развиты и для динамической задачи градиентной теории упругости. Проведено исследование задачи в рамках однопараметрической градиентной модели Айфантиса, применен асимптотический подход к решению поставленной задачи, который опирается на предположение о малости относительного размера дефекта. Асимптотический подход позволяет существенно упростить решение задач теории трещин и получить полуаналитические решения, удобные для дальнейшего исследования, подобная схема исследования была апробирована авторами для задач теории трещин в рамках линейной классической теории упругости и вязкоупругости при исследовании прямых и обратных задач о колебаниях слоя с внутренней туннельной прямолинейной или криволинейной трещиной, а также трещиной, расположенной на стыке двух областей и слоя с расслоением [21—25].

Определяющие соотношения классической линейной теории упругости для однородной среды представлены следующими зависимостями между напряжениям Коши и деформациями, которые носят линейный характер:

$$\tau_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}; \quad (1)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (2)$$

Для градиентной теории упругости [7, 8], в отличие от классической линейной теории упругости, формулируется линейная зависимость между компонентами тензора напряжений Коши и компонентами тензоров деформации и их градиентами, что позволяет в дальнейшем использовать эти соотношения в задачах, где требуется более уточненное и детальное описание объекта исследования на микроструктурном уровне. В связи с увеличением порядка определяющих соотношений также вводятся дополнительные моментные напряжения.

В общем случае градиентной теории упругости, которая впервые была предложена Миндлином в 1964 г., плотность энергии деформации представлена многопараметрической моделью:

$$W = \frac{1}{2}\lambda\varepsilon_{ii}\varepsilon_{jj} + \mu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ji} + a_1\varepsilon_{ik,i}\varepsilon_{jj,k} + a_2\varepsilon_{jj,i}\varepsilon_{kk,i} + a_3\varepsilon_{ik,i}\varepsilon_{jk,j} + a_4\varepsilon_{jk,i}\varepsilon_{jk,i} + a_5\varepsilon_{jk,i}\varepsilon_{ij,k}, \quad (3)$$

а также уточненное представление кинетической энергии:

$$T = \frac{1}{2}\rho\dot{u}_i\dot{u}_i + \frac{1}{2}\rho l_1^2\dot{u}_{i,j}\dot{u}_{i,j}. \quad (4)$$

Коэффициенты модели  $l, a_i$  — градиентные параметры.

Компоненты тензоров напряжений Коши, моментных напряжений и полных напряжений определяются соответственно:

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= \partial W / \partial \varepsilon_{ij}; \\ m_{ijk} &= \partial W / \partial \varepsilon_{ij,k}; \\ \sigma_{ij} &= \tau_{ij} - m_{ijk,k}. \end{aligned} \quad (5)$$

Уравнения движения, принимая во внимание соотношения приведенные выше, принимают вид [19]:

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu)(1 - l_2^2 \nabla^2) u_{j,jj} + \mu(1 - l_3^2 \nabla^2) u_{i,jj} &= \rho(1 - l_1^2 \nabla^2) \ddot{u}_i; \\ l_2^2 &= \frac{4a_1 + 4a_2 + 3a_3 + 2a_4 + 3a_5}{2(\lambda + \mu)}; \\ l_3^2 &= \frac{a_3 + 2a_4 + a_5}{2\mu}. \end{aligned} \quad (6)$$

Отметим, что параметры  $l_1, l_2, l_3$  — характерные длины, определяемые градиентными эффектами.

Дальнейшие упрощения градиентных соотношений были предложены Айфантисом ( $l_1 = l_2 = l_3 = l$ ) [19]:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}\lambda\varepsilon_{ii}\varepsilon_{jj} + \mu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ji} + \frac{1}{2}\lambda l^2\varepsilon_{jj,i}\varepsilon_{kk,i} + \mu l^2\varepsilon_{jk,i}\varepsilon_{jk,i}; \\ m_{ijk} &= \partial W / \partial \varepsilon_{ij,k} = l^2 \tau_{ij,k}; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\sigma_{ij} = \tau_{ij} - m_{ijk,k} = (1 - l^2 \nabla^2) \tau_{ij}. \quad (8)$$

## 1. ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О КОЛЕБАНИЯХ СЛОЯ С РАССЛОЕНИЕМ

Рассмотрим установившиеся антиплоские колебания изотропного слоя толщины  $h$ , нижняя граница слоя жестко закреплена, за исключением участка с расслоением длины  $2a$ . Колебания

слоя вызваны нагрузкой, приложенной к части верхней границы слоя. Направим оси координат так, чтобы ось  $x_1$  совпала с нижней гранью полосы, а ось  $x_3$  направим перпендикулярно вверх, при этом трещина расположена на нижней границе при  $x_1 \in [-a, a]$ . Рассматривается постановка, в которой расслоение в процессе колебаний остается раскрытым, т.е. поверхность трещины свободна от напряжений. Установившиеся колебания вызываются компонентой вектора касательных напряжений  $\sigma_{23} = p_0 e^{-\omega t}$ , ненулевой компонентой вектора перемещений является компонента  $u_2(x_1, x_3, t) = u(x_1, x_3) e^{-i\omega t}$ . Компоненты тензоров полного и моментного напряжений:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = 0, \quad \sigma_{13} = 0; \\ \sigma_{2i} = 2\mu(1 - l^2 \nabla^2) \varepsilon_{2i}, \quad i = 1, 3; \\ m_{112} = 2\mu l^2 \varepsilon_{12,1}; \\ m_{132} = 2\mu l^2 \varepsilon_{32,1}; \\ m_{312} = 2\mu l^2 \varepsilon_{12,3}; \\ m_{332} = 2\mu l^2 \varepsilon_{32,3}.\end{aligned}\tag{9}$$

После отделения временного множителя уравнения движения и граничные условия примут вид:

$$(1 - l^2 \nabla^2)(\nabla^2 u + k^2 u) = 0;\tag{10}$$

$$x_3 = h, \quad \sigma_{23} = p_0 \delta(x_1 - L), \quad m_{332}(x_1, 0) = 0;$$

$$x_3 = 0, \quad u = 0, \quad x_1 \notin [-a, a], \quad m_{332}(x_1, 0) = 0,\tag{11}$$

где  $L$  — точка приложения нагрузки (не нарушая общности рассуждений, будем рассматривать случай приложения сосредоточенной нагрузки).

Рассматривается постановка задачи, в которой предполагается, что в процессе колебания трещина остается раскрытой и к постановке задачи добавляется условие отсутствия напряжений на трещине:

$$x_3 = 0, \quad x_1 \in [-a, a], \quad \sigma_{23} = 0.\tag{12}$$

Замыкают постановку задачи условия излучения волн на бесконечности, при формулировке которых используется принцип предельного поглощения [26].

## 2. СВЕДЕНИЕ К ГРАНИЧНОМУ ИНТЕГРАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ

Рассмотрим вспомогательную задачу, в которой к краевой задаче (10)—(12) добавлены следующие граничные условия [13]:

$$\begin{aligned}x_3 = h, \quad \sigma_{23} = p_0 \delta(x_1 - L), \quad m_{332} = 0, \\ x_3 = 0, \quad u = X, \quad m_{332} = 0, \quad \sigma_{23} = 0, \quad x_1 \in [-a, a],\end{aligned}\tag{13}$$

здесь введена функция  $X$ , характеризующая смещения нижней границы полосы, при этом

$$X = 0, \quad x_1 \notin [-a, a] \quad \text{и} \quad X \neq 0, \quad x_1 \in [-a, a],$$

т.е. она определяет раскрытие трещины.

Рассмотрение вспомогательной задачи дает возможность применения преобразования Фурье по координате  $x_1$ :

$$\tilde{u}(x_3, \xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x_1, x_3) e^{i\xi x_1} dx_1.$$

В результате, уравнение движения (10) преобразуется к дифференциальному уравнению четвертого порядка ( $D = \frac{\partial}{\partial x_3}$ ):

$$(1 - l^2(D^2 - \xi^2))(D^2 - \xi^2 + k^2)\tilde{u} = 0. \quad (14)$$

Характеристическое уравнение:

$$(1 - l^2(\lambda^2 - \xi^2))(\lambda^2 - \xi^2 + k^2)\tilde{u} = 0. \quad (15)$$

Корни характеристического уравнения:

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\xi^2 + 1/l^2}, \quad \lambda_{3,4} = \pm\sqrt{\xi^2 - k^2}. \quad (16)$$

Решение (14) представимо в виде:

$$\tilde{u}(\xi, x_3) = \sum_{i=1}^4 a_i(\xi) e^{\lambda_i(\xi)x_3}. \quad (17)$$

Неизвестные функции  $a_i$  определим из граничных условий относительно трансформант:

$$\begin{aligned} x_3 = h, \quad \tilde{\sigma}_{23} = \tilde{p}, \quad \tilde{\sigma}_{23} = \mu D(1 - l^2(D^2 + \xi^2))\tilde{u}, \quad \tilde{p} = p_0 e^{i\xi L}, \quad \tilde{m}_{332} = \mu l^2 D^2 \tilde{u} = 0; \\ x_3 = 0, \quad \tilde{u} = \tilde{X}, \quad \tilde{m}_{332} = \mu l^2 D^2 \tilde{u} = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Таким образом, для определения неизвестных функций в представлении (17) имеем СЛАУ:

$$\begin{aligned} Ay &= F; \\ y^T &= (A, C, B); \\ F^T &= (\tilde{X}, 0, \tilde{p}/\mu, 0); \\ A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ c_1 & c_1 & c_2 & c_2 \\ -\rho e^{-\lambda_3 h} & \rho e^{\lambda_3 h} & -r e^{-\lambda_1 h} & r e^{\lambda_1 h} \\ c_1 e^{-\lambda_3} & c_1 e^{\lambda_3} & c_2 e^{-\lambda_1} & c_2 e^{\lambda_1} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (19)$$

где  $c_1 = l^2 \lambda_3^2$ ,  $c_2 = l^2 \lambda_1^2$ ,  $\rho = \lambda_3(1 + l^2(\xi^2 - \lambda_3^2))$ ,  $r = \lambda_1(1 + l^2(\xi^2 - \lambda_1^2))$ , из которой можно определить по правилу Крамера соответствующие неизвестные функции:

$$a_i = \frac{1}{\Delta_0} (\tilde{X} a_{iX} + \frac{\tilde{p}}{\mu} a_{ip});$$

$$\Delta_0 = \lambda_1^3 \lambda_3 l^2 e^{(\lambda_1 + \lambda_3)h} (-1 + e^{-2\lambda_1 h} - e^{-2\lambda_3 h} + e^{-2(\lambda_1 + \lambda_3)h}) (1 + l^2 k^2)^2 = -4 \lambda_1^3 \lambda_3 l^2 (1 + l^2 k^2)^2 sh(\lambda_1 h) ch(\lambda_3 h).$$

Уравнение  $\Delta_0 = 0$  характеризует дисперсионное множество, отметим, что точки дисперсионного множества не зависят от  $l$  и соответствуют классическому случаю.

Выражения для  $a_{iX}$ ,  $a_{ip}$  не приводятся в силу громоздкости. После определения коэффициентов, применив обратное преобразование Фурье к (17), получим представление поля смещения в слое

$$u(x_1, x_3) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^4 \int_{\sigma} a_i(\xi) e^{\lambda_i(\xi)x_3} e^{-i\xi x_1} d\xi. \quad (20)$$

Контур интегрирования  $\sigma$  выбирается в соответствии с принципом предельного поглощения. Он всюду совпадает с вещественной осью за исключением окрестностей вещественных полюсов и отклоняется в комплексную плоскость, огибая положительные полюса снизу, отрицательные сверху. Как видно, каждая из функций  $a_i$  представлена двумя слагаемыми, слагаемые с  $\tilde{p}$  характеризуют волновое поле в полосе без дефекта, вызванное приложенной нагрузкой, а слагаемые с  $\tilde{X}$  определяют вклад дефекта в общее волновое поле в полосе. Отсюда можно найти представление напряжений, в частности:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{23}(\xi, x_3) &= \frac{\mu}{\Delta} \left[ d_X(x_3, \xi) \tilde{X}(\xi) + d_p(x_3, \xi) \tilde{p}(\xi) \right]; \\ d_X(x_3, \xi) &= \sum_{i=1}^4 f(\lambda_i) a_{iX} e^{\lambda_i x_3}; \\ d_p(x_1, \xi) &= \sum_{i=1}^4 f(\lambda_i) a_{ip} e^{\lambda_i x_3}; \\ f(z) &= z(1 + l^2 z^2) - l^2 z^3.\end{aligned}\quad (21)$$

Неизвестную функцию раскрытия трещины  $X$  найдем из условия отсутствия напряжения на трещине. Для этого осуществим предельный переход в выражении (21) при  $x_3 \rightarrow 0$  и применим обратное преобразование Фурье. В результате получим граничное интегральное уравнение (ГИУ) относительно функции  $\chi(x_1)$ :

$$\begin{aligned}\int_{-a}^a \chi(t) K(t - x_1) dt &= F(x_1); \\ K(t - x_1) &= \int_{\sigma} R(\xi) e^{i\xi(t-x_1)} d\xi, \quad R(\xi) = \frac{d_X(0, \xi)}{\Delta}; \\ F(x_1) &= -\frac{p_0}{\mu} \int_{\sigma} \frac{d_p(0, \xi)}{\Delta} e^{i\xi(L-x_1)} d\xi.\end{aligned}\quad (22)$$

Введем функцию  $\Phi(t) = \chi'(t)$ , удовлетворяющую условиям:

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= 0, \quad t \notin (-a, a), \\ \int_{-a}^a \Phi(t) dt &= \chi(a) - \chi(-a) = 0,\end{aligned}$$

а также условиям  $\Phi(a) = \Phi(-a) = 0$  [12]. Тогда получим следующее ГИУ:

$$\begin{aligned}\int_{-a}^a \Phi(t) K_1(t - x_1) dt &= F_1(x_1), \quad |x_1| \leq a; \\ K_1(t - x_1) &= -i \int_{\sigma} R(\xi) \xi^{-1} e^{i\xi(t-x_1)} d\xi, \quad R(\xi) = \frac{d_X(0, \xi)}{\Delta}; \\ F_1(x_1) &= \frac{p_0}{\mu} \int_{\sigma} \frac{d_p(0, \xi)}{\Delta} e^{i\xi(L-x_1)} d\xi.\end{aligned}\quad (23)$$

Ядро ГИУ (23) представлено несобственным интегралом, для исследования поведения подынтегральной функции на бесконечности найдем главные члены разложения:

$$\hat{R}(\xi) = L_1 |\xi| + L_3 |\xi|^3 + (1), \quad |\xi| \rightarrow \infty, \quad (24)$$

$$L_1 = -1 + \frac{l^2 k^2}{2}, \quad L_3 = -l^2.$$

С учетом формул [29], запишем ГИУ (23) в виде:

$$v.p. \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \left( \frac{L_1}{t-x_1} - \frac{2L_3}{(t-x_1)^3} + N(t, x_1) \right) \Phi(t) dt = F_1(x_1); \quad (25)$$

$$N(t, x_1) = -i \int_{\sigma} \left( R(\xi) - L_1 |\xi| - L_3 |\xi|^3 \right) \xi^{-1} e^{i\xi(t-x_1)} d\xi.$$

Полученное ГИУ (25) представлено несобственными интегралами второго рода, т.е. сингулярными интегралами (кубическая сингулярность), соответствующие интегралы не существуют в обычном смысле, а понимаются в смысле главного значения по Коши [28]:

$$\begin{aligned} v.p. \int_{-a}^a \frac{\Phi(t)}{(t-x_1)^3} dt &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{-a}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^a \right) \frac{\Phi(t)}{(t-x_1)^3} dt; \\ v.p. \int_{-a}^a \frac{dt}{(t-x_1)^3} &= v.p. \int_{-a-x_1}^{a-x_1} \frac{dy}{y^3} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{-a-x_1}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{a-x_1} \right) \frac{dy}{y^3} = -\frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y^{-2} \left( \Big|_{-a-x_1}^{-\varepsilon} + \Big|_{\varepsilon}^{a-x_1} \right) = \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{1}{(a+x_1)^2} + \frac{1}{(a-x_1)^2} - \frac{1}{\varepsilon^2} \right) = -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{(a-x_1)^2} - \frac{1}{(a+x_1)^2} \right). \end{aligned}$$

Регулярная часть ядра  $N$  представлена несобственным интегралом, подынтегральная функция которой на бесконечности убывает и соответствующий контурный интеграл может быть вычислен с использованием квадратурных формул либо по теории вычетов.

Путем замены переменных в (25) и введения безразмерных параметров  $t = a\hat{t}$ ,  $x_1 = a\hat{x}_1$ ,  $\hat{a} = a/h$ ,  $\hat{k} = kh$ ,  $\hat{l} = l/h$  сведем его к ГИУ вида:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left( \frac{L_1}{(\hat{t}-\hat{x}_1)} - \frac{2L_3}{a^2(\hat{t}-\hat{x}_1)^3} + aN(a\hat{t}, a\hat{x}_1) \right) \Phi(\hat{t}) d\hat{t} = F_1(\hat{x}_1), \quad \hat{x}_1 \in [-1, 1], \quad (26)$$

в дальнейших выкладках знак «шапочка» будем опускать.

Решение ГИУ (25) возможно с позиции двух подходов — первая схема численного исследования опирается на квадратурные формулы для гиперсингулярных интегралов и разностные схемы аппроксимации внеинтегрального слагаемого [28]; вторая схема связана с использованием аппроксимирующих полиномов Чебышева первого и второго родов [13]. Будем проводить дальнейшие исследования ГИУ по второй схеме.

Учитывая поведение функции  $\Phi(t)$  в вершинах трещины [12], будем искать решение ГИУ (26) в виде разложения по полиномам Чебышева:

$$\Phi(t) = \sqrt{1-t^2} \sum_{n=0}^{\infty} A_n U_n(t); \quad (27)$$

$$U_n(s) = \frac{\sin((n+1)\arccos(s))}{\sin(\arccos(s))}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Отметим, что в отличие от линейной теории упругости, когда интегральное уравнение представлено сингулярным интегралом и функция  $\Phi(t)$  разыскивается в виде  $\Phi(t) = g(t)/\sqrt{1-t^2}$ , в градиентной теории упругости за счет появления кубической сингулярности соответствующее решение имеет иную структуру  $\Phi(t) = \sqrt{1-t^2} g(t)$ . Доказать это можно, сведя (27) к интегродифференциальному уравнению, для случая статической задачи исследование интегродифференциального уравнения приведено в работе [12], в которой доказано, что его решение имеет вид (27), этот результат может быть применен также и к динамической задаче к (26). Именно такое представление решения ГИУ позволяет утверждать, что в градиентной теории упругости сингулярная в окрестности вершин трещины компонента тензора деформации линейной теории упругости становится регулярной. Таким образом решение ГИУ сводится к нахождению коэффициентов разложения  $A_n$ .

Подставим (27) в (26), воспользуемся методом коллокаций, удовлетворив уравнение в дискретном наборе точек  $\{x_{i_i}\}_{i=1}^M$ ,  $x_{i_i} \in [-1, 1]$ , а также известными формулами для вычисления интегралов от функций Чебышева [13], в результате получим СЛАУ:

$$\begin{aligned} B \cdot A &= P, \\ A^T &= (A_1, \dots, A_M), \quad P = \{F(x_{i_i})\}_{i=1}^M, \\ B &= \{B_{nj}\}_{i,j=1}^M = -\frac{L_3}{2(1-x_{i_i}^2)}[(n^2+n)U_{n+1}(x_{i_i}) - (2n^2+3n+2)U_{n-1}(x_{i_i})] - \\ &\quad -L_1 T_{n+1}(x_{i_i}) + \frac{a}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-s^2} U_n(s) N(s, x_{i_i}) ds. \end{aligned}$$

Функция раскрытия строится по правилу:

$$\chi(x_1) = \int_{-1}^{x_1} \Phi(s) ds = \sum_{n=1}^M A_n \int_{-1}^{x_1} \sqrt{1-s^2} U_n(s) ds. \quad (28)$$

Таким образом, после нахождения функции раскрытия трещины из (28) можно построить поле смещения всюду в слое по формуле (20).

Поле напряжений вне трещины может быть рассчитано как

$$\sigma_{23}(x_1, x_3 = 0^+) = \frac{\mu}{\pi} \int_{-a}^a \left( \frac{L_1}{t-x_1} - \frac{2L_3}{(t-x_1)^3} + N(t, x_1) \right) \Phi(t) dt, \quad |x_1| > a. \quad (29)$$

Интегралы в выражении (29) уже не являются сингулярными. Наибольший интерес представляет оценка напряженного состояния полосы в окрестности вершин трещины и возможная оценка коэффициента интенсивности напряжений. Если в классической теории упругости напряжения в окрестности вершин дефекта имеют особенность порядка  $1/\sqrt{x_1^2 - a^2}$ , то в случае градиентной теории упругости порядок сингулярности изменяется и имеет порядок  $1/(x_1^2 - a^2)^{3/2}$  [11], коэффициент интенсивности в вершинах трещин может быть рассчитан по формулам [13]:

$$IK_{III}(\pm a) = \lim_{x \rightarrow a^\pm} 2\sqrt{2\pi(x \mp a)}(x \mp a)\sigma_{23}(x, 0), \quad (x > a). \quad (30)$$

$$K_{III}(a) = \sqrt{\pi a} (l/a) \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) A_n. \quad (31)$$

Были проведены численные расчеты для функции раскрытия трещины при различных значениях градиентных параметров и частоты колебания (рис. 1, рис. 2). Сплошными линиями обозначены графики, соответствующие градиентной модели, точками — классическому случаю. Можно заметить, что как и в статическом случае [13], с увеличением градиентного параметра раскрытие трещины меньше, чем в классическом случае. Также в случае градиентной модели при увеличении значений градиентных параметров меняется геометрия профиля раскрытия при приближении к вершинам. На рис. 3 приведены графики вещественной части напряжений  $\sigma_{23}(x, 0)$  в окрестности правой вершины трещины. Как видно из графиков, имеется комбинация градиентных параметров, при которых наблюдается локальный максимум у графиков, именно значения в этих точках и может быть использовано в качестве новых критериев прочности относительно НДС и значения коэффициента интенсивности напряжений.

### 3. АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЗАДАЧИ

Рассмотрим предложенный для линейной теории упругости асимптотический подход [21—25] к исследованию задачи в рамках градиентной теории упругости. В основе асимптотического подхода лежит предположение о малости относительного размера дефекта, что в линейной теории упругости позволяло значительно упростить схему нахождения функций раскрытия трещины и построения волновых полей в слое.



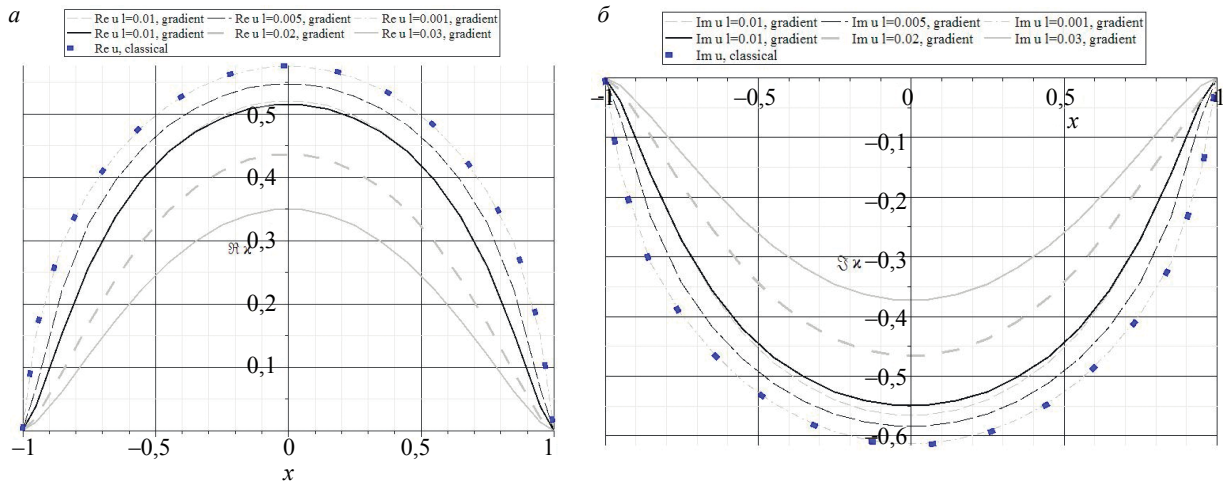


Рис. 1. Вещественная (а) и мнимая (б) части функции раскрытия трещины при  $k = 5$ ;  $a = 0,1$ ;  $L = 0,0$ .

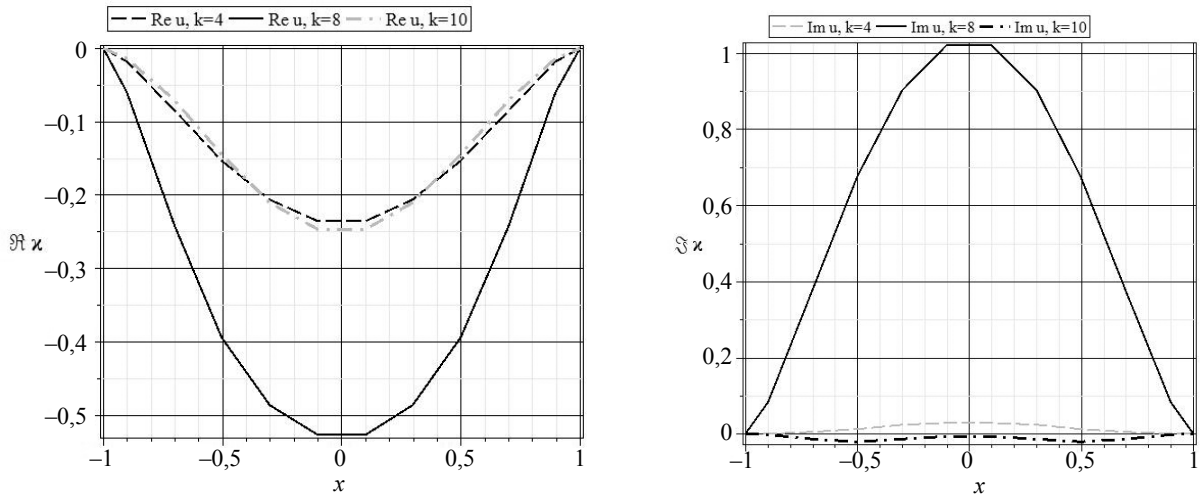


Рис. 2. Вещественная (а) и мнимая (б) части функции раскрытия трещин для различных значений волнового числа  $k$  (одна, две и три волны соответственно),  $a = 0,1$ ;  $l = 0,05$ ;  $l_1 = 0,001$ ;  $L = 0$ .

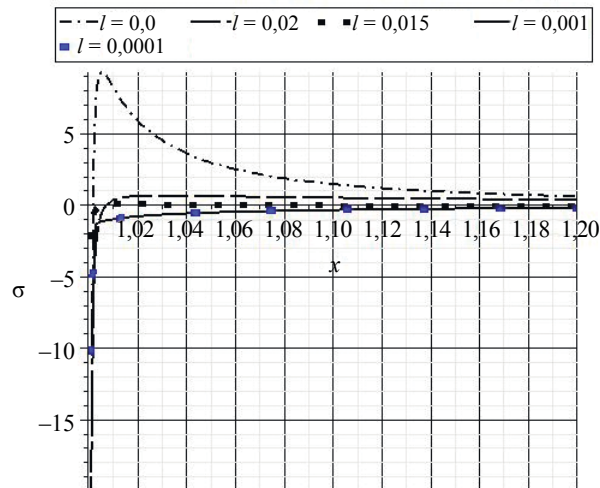


Рис. 3. Графики вещественного значения напряжения в окрестности правой вершины трещины при различных значениях параметра  $l$  при  $a = 0,1$ ;  $k = 0,1$ .

Проведем анализ ГИУ (26) для трещины малого относительного размера, т.е. при  $a \rightarrow 0$ . Предельное значение правой части ГИУ с учетом предположения представляет собой постоянную величину, определяемую выражением:

$$F_c = \lim_{a \rightarrow 0} F_1(x_1) = -\frac{p_0}{\mu} \int_{\sigma} \frac{d_p(0, \xi)}{\Delta} e^{i\xi L} d\xi = -\frac{p_0}{\mu\sqrt{2\pi}} 2\pi i \sum_{\xi=\xi_i} \frac{d_p(0, \xi_i)}{\Delta'_\xi(\xi_i)} e^{i\xi_i L}, \quad (32)$$

где  $\xi_i$  — полюса подынтегральной функции, сам же интеграл может быть посчитан по теории вычетов.

Также с учетом предположения  $a \rightarrow 0$  можно исключить из ГИУ слагаемое, отвечающее за регулярную часть подынтегрального выражения. Таким образом, имеем ГИУ вида:

$$-\frac{2}{\pi} \left(\frac{l}{a}\right)^2 \int_{-1}^1 \frac{\Phi(t)}{(t-x_1)^3} dt + \frac{1}{\pi} \left(1 - \frac{l^2 k^2}{2}\right) \int_{-1}^1 \frac{\Phi(t)}{t-x_1} dt = -F_n, \quad x_1 \in [-1, 1]. \quad (33)$$

Дальнейшее исследование ГИУ (33) сводится к выделению доминирующих интегральных слагаемых в левой части (33), которые определяются поведением трех параметров:  $a, l, k$ . Стоит отметить, что определяющим будет поведение множителя  $l/a, l \rightarrow 0, a \rightarrow 0$ , поскольку  $1 - l^2 k^2/2$  при малых  $l$  ограничено сверху, однако рассмотрим более общий случай, учитывающий влияние волнового числа  $k$ .

Введем в рассмотрение параметр  $\kappa^2 = \left(1 - \frac{l^2 k^2}{2}\right) / \left(\frac{l}{a}\right)^2$  и три характерных случая:

I)  $\kappa^2 \ll 1$ , т.е.  $l \gg \left(\frac{2}{a^2} + \frac{k^2}{2}\right)^{-1/2}$ . Тогда в ГИУ (33) доминирующим интегральным слагаемым

является слагаемое, соответствующее интегралу с кубической сингулярностью, и граничное интегральное уравнение, ввиду предположения о малости относительного размера дефекта, приводится к виду:

$$\int_{-1}^1 \frac{\Phi(t)}{(t-x_1)^3} dt = \frac{\pi}{2} \left(\frac{a}{l}\right)^2 F_c.$$

Учитывая свойства функции раскрытия, получим гиперсингулярное интегральное уравнение с постоянной правой частью

$$\int_{-1}^1 \frac{\Phi'(t)}{(t-x_1)^2} dt = -\frac{\pi a^2}{L_3} F_c, \quad (34)$$

которое имеет решение [29] в классе гладких функций вида:

$$\Phi'(t) = \frac{a^2}{L_3} F_c \sqrt{1-t^2},$$

откуда

$$\Phi(t) = \frac{a^2}{L_3} F_c \int_{-1}^t \sqrt{1-s^2} ds = \frac{a^2}{L_3} F_c \frac{t\sqrt{1-t^2}}{2}. \quad (35)$$

II)  $\kappa^2 \gg 1$ , т.е.  $l \ll \left(\frac{2}{a^2} + \frac{k^2}{2}\right)^{-1/2}$ , тогда в ГИУ (33) можно пренебречь первым интегральным слагаемым и перейти к рассмотрению ГИУ вида:

$$\frac{1}{\pi} \left(1 - \frac{l^2 k^2}{2}\right) \int_{-1}^1 \frac{\Phi(t)}{t-x_1} dt = -F_n, \quad x_1 \in [-1, 1], \quad (36)$$

с учетом  $\Phi(t) = \chi'(t)$ , имеем

$$\frac{1}{\pi} \left( 1 - \frac{l^2 k^2}{2} \right) \int_{-1}^1 \frac{X(t)}{(t-x_1)^2} dt = -F_n, \quad x_1 \in [-1, 1].$$

Последнее интегральное уравнение имеет аналитическое решение вида:

$$X(t) = \frac{F_c}{1 - l^2 k^2 / 2} \sqrt{1-t^2}. \quad (37)$$

III)  $\kappa^2 \approx 1$ , т.е.  $l \approx 1 / \left( \frac{2}{a^2} + \frac{k^2}{2} \right)$ . В ГИУ (33) остаются оба интегральных слагаемых, для его исследования можно рассмотреть схему, описанную выше с использованием аппроксимирующих полиномов Чебышева, либо попытаться выписать полую выражение для расчета функции раскрытия [12]. Для этого обозначим интеграл Коши через  $H[\Phi](x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Phi(t)}{t-x_1} dt$  и перейдем от ГИУ (33) к рассмотрению интегродифференциального уравнения:

$$\begin{aligned} H'' - \kappa^2 H &= F, \quad x_1 \in [-1, 1], \\ F &= \left( \frac{a}{l} \right)^2 F_c. \end{aligned} \quad (38)$$

Решение неоднородного дифференциального уравнения второго рода с постоянными коэффициентами (38) построим из решения однородного уравнения путем вариации произвольных постоянных, в результате получим интегральное уравнение вида:

$$H = \frac{F}{2\kappa^2} (-2 + e^{\kappa(x-1)} + e^{-\kappa(x+1)}) + A_1 e^{\kappa x} + A_2 e^{-\kappa x}. \quad (39)$$

С учетом ранее записанных свойств функции  $\Phi(x)$ ,  $x \in [-1, 1]$ , решение сингулярного интегрального уравнения можно рассчитать как:

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}(t-x)} dt; \\ f(t) &= \frac{F}{2\kappa^2} (-2 + e^{\kappa(t-1)} + e^{-\kappa(t+1)}) + A_1 e^{\kappa t} + A_2 e^{-\kappa t}; \\ A_1, A_2 &: \int_{-1}^1 \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = 0, \quad \int_{-1}^1 \frac{t f(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = 0. \end{aligned}$$

Был проведен численный эксперимент при  $h = 1$ . На рис. 4 приведены графики, условно разделяющие плоскость характерных параметров асимптотического метода  $a$ ,  $l$  при разных значениях волнового числа  $k$  (одна, две и три бегущие волны, статический случай) на зоны случаев: I (область, расположенная ниже графиков), II (область, расположенная выше графиков) и зона случая III ( $\varepsilon$  — окрестность графиков,  $\varepsilon$  определяется задаваемой точностью расчетов, например  $\varepsilon = 10^{-3}$ ). На рис. 5 приведены графики относительной погрешности расчета функции раскрытия по асимптотическому методу (35), случай I. Как показывают результаты, погрешность расчета составляет не более 5 % при фиксированном  $l = 0,05$ , при этом диапазон изменения полудлины трещины составляет  $0 < a \leq 0,03h$ , что соответствует зоне действия случая I. Как показывают результаты расчетов, асимптотический метод позволяет существенно упростить и ускорить решение ГИУ, а также получить полуаналитические выражения для расчета функции раскрытия.

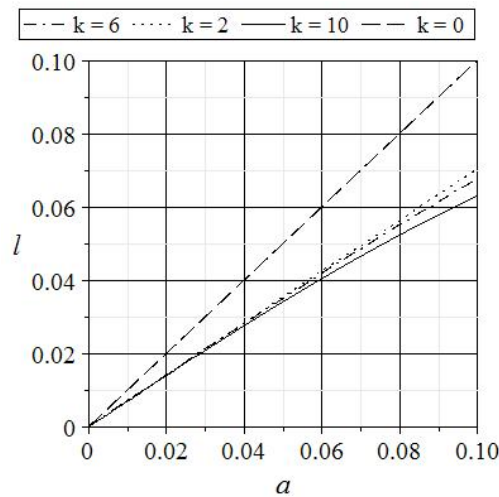


Рис. 4. Графики, определяющие зоны: I (выше графиков), II ( $\varepsilon$  — окрестность графиков), III (ниже графиков) асимптотического подхода для разных значений волнового числа  $k$ .

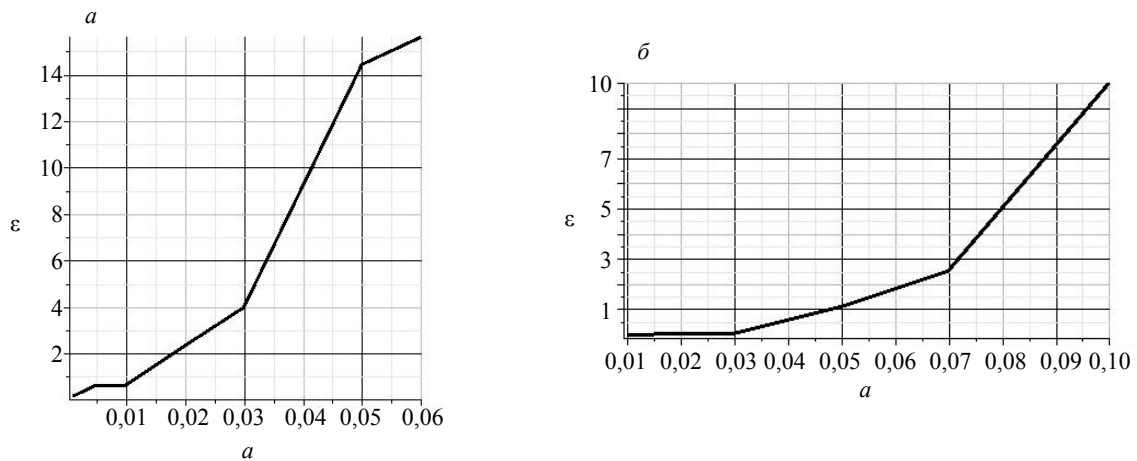


Рис. 5. Вещественная часть (мнимая имеет аналогичных характер) относительной погрешности вычисления функции раскрытия трещины при асимптотическом подходе для различных значений полудлины трещины  $a$ :  $k = 6$ ;  $l = 0,05$  (а);  $l = 0,1$  (б);  $\varepsilon = \max_{i=1..M} |\chi_i - \chi_i^{as}| / \chi_i \cdot 100\%$ .

## ВЫВОДЫ

Проведено масштабное исследование актуальной задачи о колебаниях слоя с расслоением на базе градиентной теории упругости. Получено граничное интегральное уравнение относительно градиента функции раскрытия трещины, проведен анализ ГИУ, численное исследование ГИУ на базе метода коллокаций, метода аппроксимации полиномами Чебышева. Осуществлен асимптотический анализ задачи, определены диапазоны изменения входных параметров задачи в случае трещин малой относительной длины, которые условно определяют три зоны. В рамках каждой из этих зон получено полуаналитическое решение исследуемой задачи. Проведен численный анализ задачи с позиции градиентной и классической линейной теории упругости. Определены диапазоны эффективности асимптотического подхода.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Toupin R.* Elastic materials with couple-stresses // Arch. Rat. Mech. Anal. 1962. V. 11. P. 385—414.
2. *Toupin R.* Theories of elasticity with couple-stress // Arch. Rat. Mech. Anal. 1964. V. 17. P. 85—112.

3. Mindlin R.D. Micro-structure in linear elasticity // Arch. Rational Mech. Anal. 1964. V. 16. P. 51—78.
4. Лурье М.В. Задачи Ламе в градиентной теории упругости // Докл. АН СССР. 1968. Т. 181. № 5. С. 1087—1089.
5. Altan S.B., Aifantis E.C. On the structure of the mode-III crack-tip in gradient elasticity // Scripta Met. 1992. V. 26. P. 319—324.
6. Aifantis E.C. Gradient effects at the macro, micro and nano scales // J. Mech. Behav. Mater. 1994. V. 5 (3). P. 335—353.
7. Exadaktylos G., Vardoulakis I., Aifantis E. Cracks in Gradient Elastic Bodies With Surface Energy // Int. J. Fract. 1996. V. 79 (2). P. 107—119.
8. Vardoulakis I., Exadaktylos G., Aifantis E.C. Gradient Elasticity With Surface Energy: Mode-III Crack Problem // Int. J. Solids Struct. 1994. P. 4531—4559.
9. Erdogan F., Gupta G. D. On the Numerical Solution of Singular Integral Equations // Q. Appl. Math. 1972. V. 30. P. 525—534.
10. Chulkov A.O., Vavilov V.P., Moskovchenko A.I. Active thermal testing of delaminations in heat-shielding structures // Russian Journal of Nondestructive Testing. 2019. V. 55. No. 3. P. 240—247.
11. Zhang L., Huang Y., Chen J. Y., Hwang K. C. The Mode III Full-Field Solution in Elastic Materials With Strain Gradient Effects // Int. J. Fract. 1998. V. 92 (4). P. 325—348.
12. Fannjiang A.C., Chan Y.-S., Paulino G.H. Strain Gradient Elasticity for Antiplane Shear Cracks: A Hypersingular Integrodifferential Equation Approach // Society for Industrial and Applied Mathematics. 2006. V. 62 (3). P. 1066—1091.
13. Paulino G.H., Fannjiang A.C., Chan Y.-S. Gradient Elasticity Theory for Mode III Fracture in functionally Graded Materials—Part I: Crack Perpendicular to the Material Gradation // Journal of Applied Mechanics. 2003. V. 70. P. 531—542.
14. Chan Y.-S., Paulino G.H., Fannjiang A.C., Chan Y.-S. Change of Constitutive Relations due to Interaction Between Strain-Gradient Effect and Material Gradation // Journal of Applied Mechanics. 2006. V. 73. P. 871—875.
15. Antipov A.G., Markov A.A. Detectability of rail defects by magnetic flux leakage method // Russian Journal of Nondestructive Testing. 2019. V. 55. No. 4. P. 277—285.
16. Ru C.Q., Aifantis E.C. A simple approach to solve boundary-value problems in gradient elasticity // Acta Mechanica. 1993. V. 101. P. 59—68.
17. Васильев В.В., Лурье С.А. Обобщенная теория упругости // МТТ. 2015. № 4. С. 16—27.
18. Васильев В.В., Лурье С.А. Нелокальные решения сингулярных задач математической физики и механики // ПММ. 2018. Т. 82. № 4. С. 459—471.
19. Askes H., Aifantis K. Gradient elasticity in static and dynamics: An overview of formulations, length scale identification procedures, finite element implementations and new results // International Journal of Solids and Structures. 2011. V. 48. P. 1962—1990.
20. Aifantis K., Askes H. Gradient elasticity with interfaces as surfaces of discontinuity for the strain gradient // J. Mech. Behav. Mater. 2007. V. 18. P. 283—306.
21. Ватульян А.О., Явруян О.В. Асимптотический подход в задачах идентификации трещин // ПММ. 2006. № 4. С. 714—724.
22. Ватульян А.О., Явруян О.В. Исследование обратных задач теории трещин с использованием асимптотического метода // Экологический вестник научных центров ЧЭС. 2018. Т. 15. № 2. С. 39—46.
23. Vatul'yan A.O., Yavruyan O.V. An Asymptotic Method for Solving the Problem of Identifying a Curvilinear Crack in an Elastic Layer // Russian Journal of Nondestructive Testing. 2020. V. 56. No. 10. P. 810—819.
24. Ватульян А.О., Бемяк О.А. К реконструкции малых полостей в упругом слое // Дефектоскопия. 2006. № 10. С. 33—39.
25. Yavruyan O.V., Yavruyan Kh. S. Asymptotic approach to the problem identification of a fringedelamination from the base // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 2020.
26. Ворovich И.И., Бабешко В.В. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1989. С. 320.
27. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962. 1108 с.
28. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. М.: Наука, 1985. 253 с.
29. Iovane G., Lifanov I.K., Sumbatyan M.A. On direct numerical treatment of hypersingular integral equations arising in mechanics and acoustics // Acta Mechanica. 2003. № 162. P. 99—110.