

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАБОТЫ БЕСКОНТАКТНОГО УЛЬТРАЗВУКОВОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ В СИСТЕМАХ АКТИВНОГО ВОЛНОВОГО МОНИТОРИНГА ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

© 2022 г. Е.В. Глушков^{1,*}, Н.В. Глушкова^{1,**}, О.А. Ермоленко^{1,***}

¹Институт математики, механики и информатики, Кубанский государственный университет, Россия 350040 Краснодар, ул. Ставропольская, 149
E-mail: *evg@math.kubsu.ru; **nvq@math.kubsu.ru; ***o.ermolenko.a@gmail.com

Поступила в редакцию 14.05.2022; после доработки 24.06.2022
Принята к публикации 01.07.2022

При контроле состояния тонкостенных конструкций ультразвуковыми бегущими волнами наряду с традиционным способом их возбуждения и регистрации сетью пленочных пьезоэлементов все более активно используются бесконтактные (воздушно-связные) преобразователи. Разработка и успешное применение таких диагностических систем базируется на математическом и компьютерном моделировании протекающих здесь волновых процессов. В настоящей работе приводится описание моделей, созданных на основе использования интегральных и асимптотических представлений возбуждаемых волн через фурье-символы матрицы Грина рассматриваемой связанной системы источник — акустическая среда — упругий волновод. По сравнению с традиционным конечно-элементным моделированием они обладают такими преимуществами как малозатратность параметрического анализа, наглядность волновой структуры решения и возможность решения задач селективного возбуждения и максимизации амплитуды требуемых мод выбором оптимального наклона источника и центральной частоты. Приводятся численные примеры верификации разработанных моделей и определения оптимальных параметров работы источника.

Ключевые слова: бесконтактный ультразвуковой преобразователь, упругий волновод, интегральные и асимптотические представления, бегущие волны, оптимальный угол наклона.

DOI: 10.31857/S0130308222080024, EDN: BQBCUZ

ВВЕДЕНИЕ

Примеры использования бесконтактных ультразвуковых (УЗ) преобразователей для возбуждения и приема бегущих волн Рэлея и Лэмба известны с 1950-х годов. Так, например, в классической монографии И.А. Викторова [1] дается описание способа возбуждения бегущих волн через слой жидкости, который назван иммерсионным методом клина, и приводятся примеры его практической реализации для обнаружения зон отслоения в топливных элементах атомных реакторов [2] и для неразрушающего контроля листов металла [3]. В контактном варианте пьезоэлемент, прикрепленный к верхней грани пластикового клина с определенным углом раствора θ , излучает плоскую волну, распространяющуюся с обусловленной его упругими свойствами скоростью c_0 . При выполнении условия $\sin \theta = c_0/c_n$ эта волна возбуждает в образце бегущую волну рэлеевского типа, распространяющуюся вдоль его поверхности со скоростью c_n . В бесконтактном (иммерсионном) варианте пьезоисточник помещается в слой жидкости, что дает возможность легко варьировать угол его наклона для возбуждения различных бегущих волн, а также для учета зависимости скорости c_n от частоты, обусловленной дисперсионными свойствами образца.

Однако погружение зондируемого образца в жидкую среду не всегда возможно, особенно при необходимости контроля больших площадей протяженных конструкций, а работа бесконтактного УЗ преобразователя через воздушную среду ограничивается сильным рассогласованием акустических импедансов, приводящим к почти полному отражению падающей волны от поверхности образца. Поэтому бесконтактные методы УЗ контроля не находили широкого применения до появления в 1980—90-х годах нового поколения пьезокерамических преобразователей с воздушной связью (air-coupled transducers — АСТ) [4, 5], показавших возможность возбуждения бегущих волн [6, 7]. В настоящее время наряду с пьезокерамическими АСТ, дающими узкополосный зондирующий сигнал с определенной центральной частотой, разрабатываются бесконтактные УЗ излучатели, работающие на других принципах, например, импульсные широкополосные магнитострикционные преобразователи [8], которые применяются в комплекте с лазерными виброметрами, используемыми для сканирования возбуждаемых в образце поверхностных волн [9].

Бесконтактные АСТ применяются для обнаружения скрытых дефектов [10] и контроля состояния материалов (см., например, обзоры [11, 12]), в том числе для определения эффективных

упругих модулей C_{ij} анизотропных материалов сложной структуры, таких как полимерные композиционные материалы и армированные углепластики [13], древесина [14—16], минерально-полимерная бумага [17], железобетон [18], или даже для контроля спелости авокадо [19]. Один из перспективных методов использования АСТ для получения характеристик материала основан на построении так называемых полярных скан-образов (polar scans), которые получаются при варьировании наклона источника [20, 21]. На критических углах наклона θ , когда проекция длины волны зондирующего квазигармонического сигнала совпадает с длиной возбуждаемых в образце объемных или поверхностных волн, наблюдается резонансный рост коэффициента прохождения. Для изотропных материалов он проявляется в полярных сканах в виде концентрических окружностей, а для анизотропных композитов дает более сложный рисунок. Считается, что эти узоры уникальны для каждого образца, представляя собой «акустические отпечатки пальцев механических свойств» [22].

Традиционно АСТ используются для обнаружения дефектов и повреждений в поле отраженных или прошедших акустических волн (зондирование в эхорежиме или в режиме сквозного просвечивания [23]). При этом перемещение бесконтактных источников и приемников УЗ сигналов вдоль поверхности с помощью роботов-манипуляторов позволяет автоматизировать контроль больших площадей инспектируемых изделий [24, 25]. Наряду со сканированием с помощью зондирующих объемных упругих волн для протяженных тонкостенных конструкций используются бегущие волны, которые распространяются на сравнительно большие расстояния, взаимодействуя с неоднородностями (дефектами) любой природы и выявляя их наличие возникающими при дифракции отраженными и рассеянными бегущими волнами. Волновой мониторинг с помощью бегущих волн, получивший название SHM-технологии (от Structural Health Monitoring — SHM [26, 27]), не предполагает перемещения источника вдоль поверхности. Обычно для их возбуждения и регистрации используется сравнительно редкая сеть пленочных пьезоэлементов, прикрепленных к поверхности или вмонтированных внутрь контролируемого образца. Однако для этой цели могут быть использованы и современные АСТ [28].

Для создания эффективных систем УЗ контроля и корректной интерпретации результатов измерений используются математические модели, описывающие процессы возбуждения, распространения и дифракции бегущих волн в рассматриваемой слоистой структуре. Взаимодействие акустических волн с упругими телами является классической задачей структурной акустики. Развитые здесь методы и подходы [29—31] позволяют исследовать закономерности прохождения и отражения акустических сигналов через твердую преграду и дисперсионные характеристики возбуждаемых в ней бегущих упругих волн. Для более точного количественного моделирования волновых процессов с учетом связного волнового взаимодействия пьезопреобразователей с зондируемой структурой в настоящее время, как правило, используются пакеты прикладных программ, реализующие прямые численные методы, базирующиеся на сеточной аппроксимации решения, например, метод конечных элементов (МКЭ) [32]. Однако сеточная аппроксимация волновых процессов численно затратна и без постпроцессорной обработки не дает физически наглядной картины возбуждения волн различного типа и распределения энергии источника между ними, поэтому здесь также используются полуаналитические и гибридные численно-аналитические подходы [33, 34].

В предыдущей работе [35], посвященной моделированию пленочных преобразователей как элементов SHM-систем, дается описание полуаналитических моделей, разработанных на основе использования явных интегральных и асимптотических представлений возбуждаемых волн через фурье-символы матрицы Грина рассматриваемой волноводной структуры. Настоящую работу можно рассматривать как ее продолжение и обобщение на случай бесконтактных преобразователей. Моделирование возбуждаемых объемных акустических и бегущих упругих волн здесь также базируется на построенных ранее явных представлениях функции Грина для связной системы источник — акустическая среда — упругий волновод [36, 37].

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассматривается упругая (в общем случае многослойная анизотропная) пластина толщины H , погруженная в акустическую среду (воздух, вода). С ней взаимодействует волновое поле акустического давления p_0 , генерируемое бесконтактным УЗ преобразователем, находящимся на расстоянии d от поверхности пластины (рис. 1). В результате в пластине возбуждается поле смещений \mathbf{u} , а в верхнем и нижнем акустических полупространствах $z \geq 0$ и $z \leq -H$ — поле отраженных и прошедших волн p_{sc}^- и p_{sc}^+ . Нестационарные колебания $p(\mathbf{x}, t)$ и $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ описываются

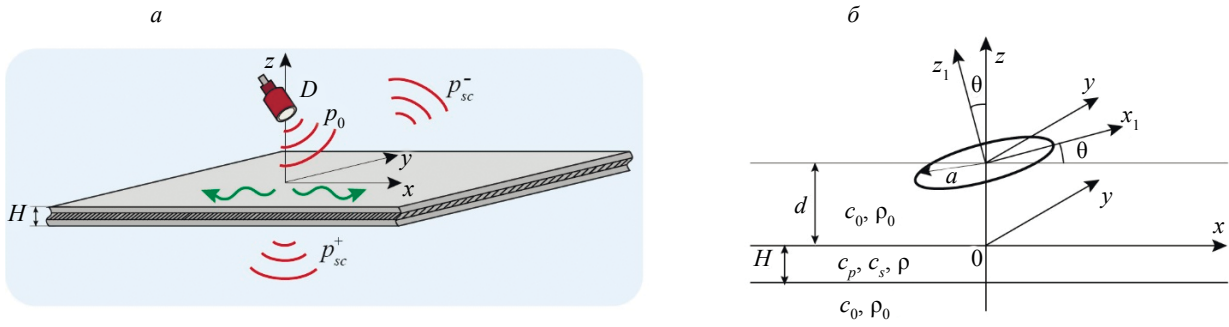


Рис. 1. Зондирование бесконтактным преобразователем (АСТ) (а); геометрия задачи (б).

их частотными спектрами, поэтому задача сводится к определению комплексных амплитуд установившихся гармонических колебаний $p(\mathbf{x}, \omega)e^{-i\omega t}$ и $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega)e^{-i\omega t}$; $\omega = 2\pi f$ — круговая частота, f — частота; гармонический множитель $e^{-i\omega t}$ далее опущен.

Поле источника моделируется линейной суперпозицией полей $g_0(\mathbf{x}, \xi)$, возбуждаемых точечными источниками (монополями) с центрами в точках $\xi = (\xi, \eta, \zeta)$, которые распределены по поверхности D излучающего элемента с некоторой плотностью, задаваемой функцией $q_0(\xi)$:

$$p_0(\mathbf{x}) = \iint_D g(\mathbf{x}, \xi) q_0(\xi) d\xi. \quad (1)$$

Для учета частотной характеристики источника p_0 необходимо домножить на функцию $S(\omega)$, задающую частотный спектр рассматриваемого преобразователя: $p_0 := p_0 S(\omega)$. У АСТ преобразователей излучающая пластина (область D), как правило, круговой формы. Она может располагаться как параллельно поверхности образца, так и наклонно под некоторым углом θ (рис. 1б). Отметим, что в рамках описываемой модели поверхность D может быть неплоской. Например, поле акустического микроскопа [38, 39] моделируется интегралом (1) по вогнутой поверхности излучающего элемента.

При проведении расчетов в качестве g_0 берется частное решение уравнения Гельмгольца с дельта-функцией в правой части (функция Грина для безграничной среды):

$$g_0(\mathbf{x}, \xi) = -\frac{1}{4\pi R} e^{i\kappa_0 R}, \quad R = |\mathbf{x} - \xi|, \quad (2)$$

а остальные сомножители монополя ($i\rho_0\omega V_0$ [40]) перенесены в q_0 . Здесь $\kappa_0 = \omega/c_0$ — волновое число; c_0 — скорость звука; ρ_0 — плотность акустической среды; V_0 — объемная скорость монополя. Величину q_0 можно назвать объемным напряжением, ее размерность — сила, отнесенная к объему, в н/м³; размерность g_0 — 1/м.

При наличии отражающей пластины к g_0 добавляются функции g_{sc}^\pm , описывающие поле отраженных и прошедших волн: $g = g_0 + g_{sc}^-$ при $z \geq 0$ и $g = g_{sc}^+$ при $z \leq -H$, а в самой пластине поле смещений \mathbf{u} описывается аналогично представлению (1) с помощью решения $\mathbf{g}_u(\mathbf{x}, \xi)$ связанной задачи: точечный источник — акустическая среда — упругая пластина:

$$p(\mathbf{x}) = \iint_D g(\mathbf{x}, \xi) q_0(\xi) d\xi \approx \sum_j A_j g(\mathbf{x}, \xi_j), \quad z \geq 0, \quad z \leq -H, \quad (3)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \iint_D \mathbf{g}_u(\mathbf{x}, \xi) q_0(\xi) d\xi \approx \sum_j A_j \mathbf{g}_u(\mathbf{x}, \xi_j), \quad -H \leq z \leq 0. \quad (4)$$

Коэффициенты A_j выражаются через весовые коэффициенты кубатурной формулы и значения q_0 в узлах ξ_j сетки, покрывающей область D ; для квадратной сетки с шагом h — $A_j = q_0(\xi_j) h^2$. В численных примерах область D берется круговой радиуса a , а распределение $q_0(\xi)$ равномерным

($q_0 = \text{const}$). Сопоставление с экспериментальными и МКЭ-результатами других авторов показывает, что такая модель источника обеспечивает адекватное описание реальных волновых процессов (см., например, сопоставления с [23], приведенные в [36, 37]). Амплитуда смещений \mathbf{u} пропорциональна суммарной нагрузке $F = \pi a^2 q_0$ (размерность — н/м); для удобства на графиках ниже они приводятся нормированными к максимальным значениям или к амплитуде смещений $v_0 = F \nabla g_0 / (\rho_0 \omega^2)$, генерируемых эквивалентным точечным источником у поверхности пластины ($R = d$). Следует также помнить, что диапазон частотного спектра $S(\omega)$ реальных АСТ ограничен; как правило, он сосредоточен в окрестности определенной центральной частоты f_c . Приведенные ниже численные результаты получены для $S = 1$, т.е. для широкополосного импульсного источника.

В акустической среде $\mathbf{u} = \nabla p / (\rho_0 \omega^2)$ [40], соответственно вектор-функция Грина для перемещений доопределяется в ней соотношением $\mathbf{g}_u = \nabla g / (\rho_0 \omega^2)$. Для погруженных волноводов с плоско-параллельными границами (многослойные пластины) применение преобразования Фурье F_{xy} по горизонтальным координатам x и y позволяет выразить функции Грина g и \mathbf{g}_u через их фурье-символы $G = F_{xy}[g]$ и $\mathbf{G} = F_{xy}[\mathbf{g}_u]$:

$$g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = F_{xy}[G] = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} G(\boldsymbol{\alpha}, z; \boldsymbol{\xi}) e^{-i(\alpha_1 x + \alpha_2 y)} d\alpha_1 d\alpha_2, \quad \boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2) \quad (5)$$

и аналогично для \mathbf{g}_u . Контур Γ_1, Γ_2 идут вдоль вещественных осей комплексных плоскостей α_1 и α_2 , отклоняясь от них при обходе вещественных полюсов в соответствии с принципом предельного поглощения. Функции G и \mathbf{G}_u выражены через элементы матрицы Грина K для упруго-акустического полупространства $z \leq 0$, на которое действует наведенная падающим полем поверхностная нагрузка q [36]:

$$G(\boldsymbol{\alpha}, z; \boldsymbol{\xi}) = [\tilde{G}_0 + \tilde{G}_{sc}^-] e^{-i(\alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta)}, \quad z \geq 0; \quad (6)$$

$$\tilde{G}_0 = -e^{-\sigma_0 |z - \zeta|} / (2\sigma_0), \quad \tilde{G}_{sc}^- = -(\rho_0 \omega^2 \hat{K}_{33} + \sigma_0 \Delta) e^{-\sigma_0 |z + \zeta|} / (2\sigma_0 \Delta_0);$$

$$\Delta_0 = \sigma_0 \Delta - \rho_0 \omega^2 \hat{K}_{33}, \quad \sigma_0 = \sqrt{\alpha^2 - \kappa_0^2};$$

$$\text{Re } \sigma_0 \geq 0, \quad \text{Im } \sigma_0 \leq 0, \quad \alpha^2 = |\boldsymbol{\alpha}|^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2, \quad \boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2),$$

$\hat{K}_{33}(\boldsymbol{\alpha}, z)$ и $\Delta(\boldsymbol{\alpha})$ — числитель и знаменатель элемента $K_{33}(\boldsymbol{\alpha}, z)$ матрицы K : $K_{33} = \hat{K}_{33} / \Delta$, в формулы (6) \hat{K}_{33} входит при $z = 0$. В нижнем полупространстве $z \leq 0$ фурье-символ функции Грина смещений выражается через элементы третьего столбца матрицы K :

$$\mathbf{G}_u(\boldsymbol{\alpha}, z; \boldsymbol{\xi}) = \hat{\mathbf{K}}_3 \tilde{Q} e^{-i(\alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta)}, \quad z \leq 0; \quad (7)$$

$$\mathbf{K}_3 = \hat{\mathbf{K}}_3 / \Delta, \quad \hat{\mathbf{K}}_3 = (\hat{K}_{13}, \hat{K}_{23}, \hat{K}_{33})^T, \quad \tilde{Q} = -e^{-\sigma_0 z} / \Delta_0.$$

Важно, что эти представления справедливы для произвольного вертикально-неоднородного упруго-акустического полупространства $z \leq 0$, контактирующего с верхним акустическим полупространством $z \geq 0$, в котором расположен источник. В частности, упругий слой может быть не только изотропным и однородным, как при моделировании УЗ зондирования металлических образцов (алюминиевых, стальных и т.п.), но и многослойным анизотропным (слоистые композиты). Для проведения расчетов использовались алгоритмы вычисления элементов матрицы K , которые к настоящему времени хорошо разработаны и реализованы в виде компьютерных программ (см. обзор в работе [41]). Численное интегрирование на основе представлений (3)—(5) позволяет получать такие же количественные данные об амплитудно-частотных характеристиках волнового поля, возбуждаемого бесконтактным преобразователем, как и при использовании прямых численных методов, базирующихся на сеточной аппроксимации.

ГОРИЗОНТАЛЬНЫЙ И НАКЛОННЫЙ ИСТОЧНИКИ

Параметры ξ и η входят в функции Грина G и \mathbf{G}_u только через экспоненту $e^{-i(\alpha_1\xi+\alpha_2\eta)}$, поэтому в случае горизонтального источника с плоским излучающим элементом ($z = \text{const} > 0$) интегрирование по области D в представлении (3) — (4) сводится к преобразованию Фурье от заданного распределения $q_0(\xi, \eta)$:

$$\iint_D q_0(\xi, \eta) e^{i(\alpha_1\xi+\alpha_2\eta)} d\xi d\eta = F_{xy}[q_0] = Q_0(\boldsymbol{\alpha}). \quad (8)$$

В случае изотропной пластины двукратные интегралы по α_1, α_2 сводятся к однократным по α , что существенно облегчает численное интегрирование.

Для наклонного кругового источника интегрирование по D также можно свести к функции Q_0 , но от более сложного аргумента и с дополнительным интегрированием по угловой координате. Однако такие представления оказались слишком громоздкими, более удобно и менее затратно использование суперпозиции конечного числа монополей в соответствии с формулами (3) и (4). Вычислительные затраты снижаются за счет того, что представление функций Грина g и \mathbf{g}_u сводится к однократным интегралам, а в дальней зоне используется их асимптотика, дающая объемные акустические и бегущие упругие волны.

Для верификации такого подхода к моделированию работы наклонного источника проводилось сопоставление с 3D МКЭ-результатами, полученными с помощью пакета Comsol Multiphysics 5.6 (модуль Acoustic-Solid Interaction) (<https://www.comsol.ru/comsol-multiphysics>). В качестве примера на рис. 2 показано сечение в плоскости $y = 0$ пространственного распределения амплитуды поля давления $|p(x, 0, z)|$, рассчитанного с помощью 3D МКЭ (слева) и суперпозиции точечных источников (справа).

Здесь и на рис. 3 рассматривается погруженная в воду алюминиевая пластина толщиной $H = 2$ мм; источник радиуса $a = 5,5$ мм (как у использовавшихся для измерений преобразователей PNL F19-012 R (Starmans NDT, Чехия) и CF200 (Sonotec, Германия)) расположен на расстоянии $d = 10$ мм от пластины, угол наклона $\theta = 15^\circ$, частота $f = 100$ кГц. Скорость звука в воде $c_0 = 1485$ м/с, плотность $\rho_0 = 1000$ кг/м³; скорость продольных и поперечных объемных волн в алюминии: $c_p = 6175$ м/с и $c_s = 3103$ м/с, плотность $\rho = 2700$ кг/м³.

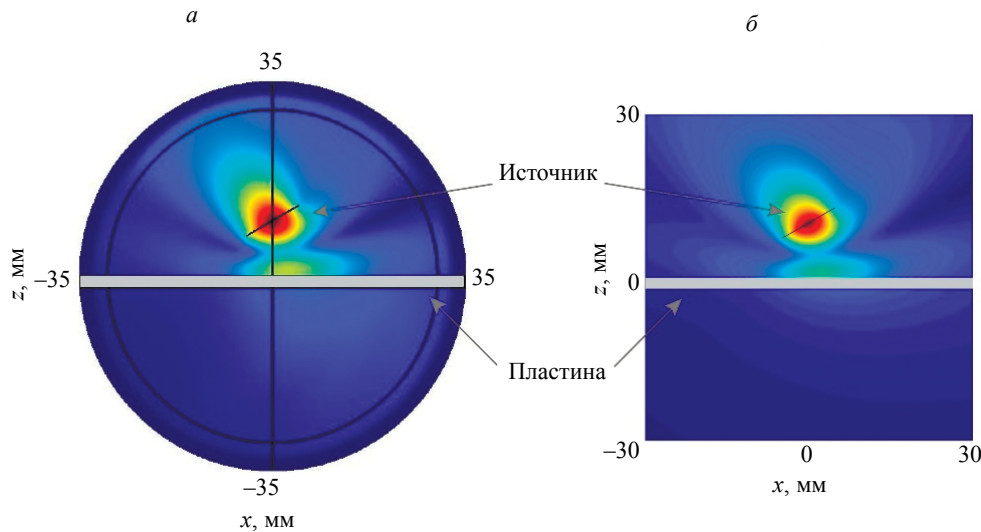


Рис. 2. Верификация представления (3): поле давления $|p|$, рассчитанное с помощью МКЭ (а) и как сумма точечных источников (б).

Поскольку МКЭ применим только в ограниченной области, бесконечная среда и волновод искусственно ограничиваются поглощающим слоем (perfect match layer — PML) [42], внутренняя граница которого показана на рис. 2 окружностью радиуса 30 мм. Хотя искусственное ограничение

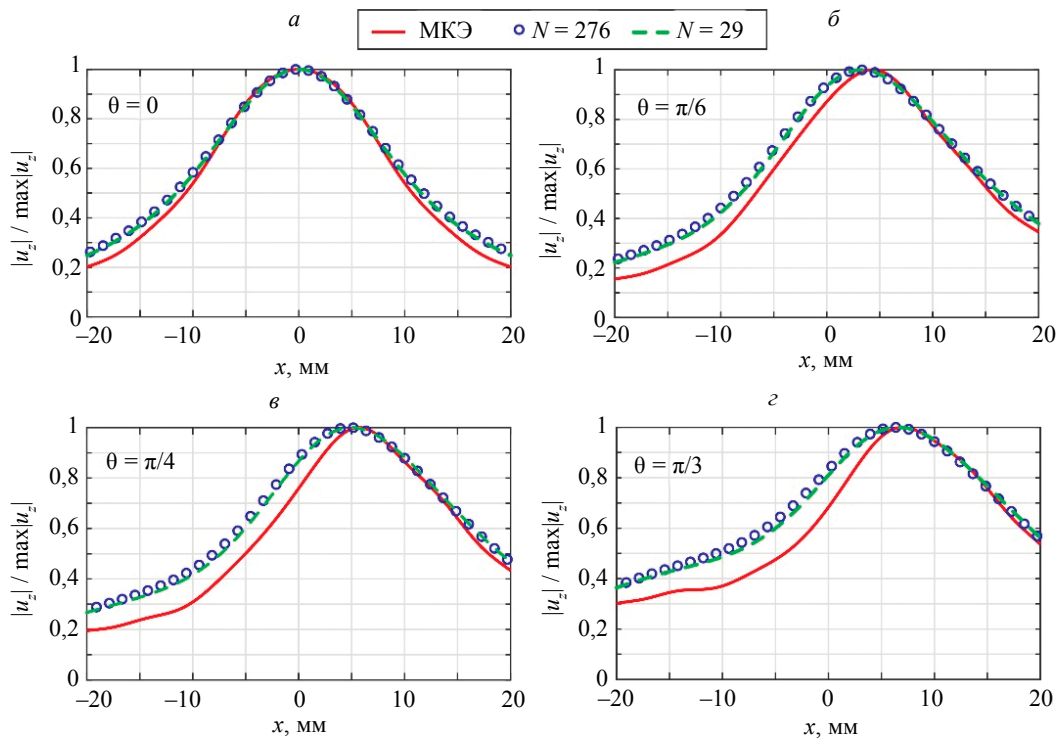


Рис. 3. Верификация представления (4): вертикальные перемещения $|u_z| / \max|u_z|$ на поверхности пластины $z = 0$ в зависимости от x ; $f = 100$ кГц; угол наклона источника $\theta = 0$ (а), $\theta = \pi/6$ (б), $\theta = \pi/4$ (в), $\theta = \pi/3$ (г).

объема немного искажает условия формирования поля установившихся колебаний (а иногда, например, в случае возбуждения в пластине обратных волн использование PML приводит к существенно неверным результатам [34]), в данном случае обе модели дают хорошо согласующиеся картины распределения амплитуды волнового поля. Но для получения МКЭ-результата потребовалось более четырех часов против двух минут при использовании суперпозиции (3) с числом источников $N_s = 441$.

Для верификации представления (4) на рис. 3 приводятся нормированные к максимуму графики амплитуды вертикальных смещений $|u_z|$ на ее поверхности $z = 0$ в зависимости от x при углах наклона кругового источника $\theta = 0, 30, 45$ и 60° ; сравниваются результаты, полученные с помощью МКЭ и суперпозицией точечных источников при $N_s = 29$ и 276 . Последние демонстрируют быструю сходимость с увеличением N_s и хорошо согласуются с МКЭ-результатами в предсказании положения точки максимума, которая с увеличением θ смещается вправо. На рис. 4 показано аналогичное сопоставление смещений в зависимости от частоты f . С увеличением угла наклона здесь появляются дополнительные локальные максимумы, указывающие на существование оптимальных для возбуждения бегущих волн сочетаний частоты и угла наклона источника.

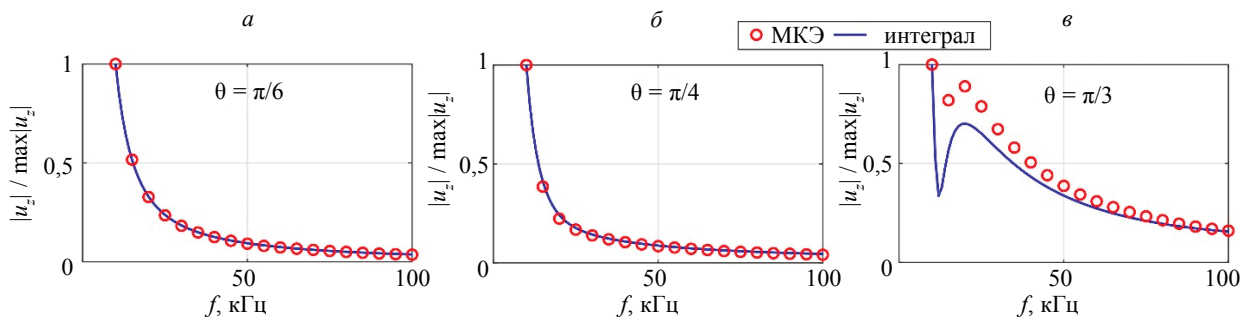


Рис. 4. Верификация представления (4): $|u_z| / \max|u_z|$ в зависимости от частоты f ; $x = 20$ мм, $z = 0$, угол наклона источника $\theta = \pi/6$ (а), $\theta = \pi/4$ (б), $\theta = \pi/3$ (в).

БЕГУЩИЕ ВОЛНЫ

Точечный источник, как и горизонтальный круговой, возбуждает в изотропной пластине осесимметричное волновое поле \mathbf{u} , радиальная и вертикальная компоненты которого u_r и u_z зависят только от $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ и z и не зависят от угловой координаты φ . Осесимметричными являются и входящие в представление (4) волновые поля $\mathbf{g}_u(\mathbf{x}, \xi_j)$, каждое в своей системе цилиндрических координат с центром в (ξ_j, η_j) :

$$\begin{aligned} x - \xi_j &= r_j \cos \varphi_j, & y - \eta_j &= r_j \sin \varphi_j, \\ r_j &= \sqrt{(x - \xi_j)^2 + (y - \eta_j)^2}, & z &= z_j. \end{aligned}$$

Радиальная и вертикальная компоненты вектора $\mathbf{g}_u = (g_r, g_z)$ представимы в виде однократных контурных интегралов, которые выражаются через сумму вычетов в полюсах подынтегральных функций ζ_n , попадающих внутрь замкнутого контура. В дальней зоне $\kappa_0 r_j \gg 1$ [36]:

$$\begin{aligned} g_r &\sim \sum_n P_n(z) e^{-\sigma_n d_j} H_1^{(1)}(\zeta_n r_j), \\ g_z &\sim \sum_n R_n(z) e^{-\sigma_n d_j} H_0^{(1)}(\zeta_n r_j). \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь ζ_n — вещественные и близкие к вещественной оси корни характеристического (дисперсионного) уравнения

$$\Delta_0(\alpha, \omega) = 0 \Rightarrow \alpha = \zeta_n(\omega), \quad (10)$$

$P_n = -i\hat{P}(\zeta_n, z)/(2\Delta'_0(\zeta_n))$, $R_n = i\hat{R}(\zeta_n, z)\zeta_n/(2\Delta'_0(\zeta_n))$, \hat{P} и \hat{R} — числители функций $P(\alpha, z)$ и $R(\alpha, z)$, входящих в традиционное [43] представление $\mathbf{K}_3 = (-i\alpha_1 P, -\alpha_2 P, R)^T$ для изотропного полупространства; $\sigma_n = \sigma_0(\zeta_n) = \sqrt{\zeta_n^2 - \kappa_0^2}$, d_j — расстояние от центра монополя ξ_j до поверхности $z = 0$, $H_m^{(1)}$ — функции Ханкеля.

В дальней зоне $\zeta_n r \gg 1$ можно воспользоваться асимптотикой функций Ханкеля:

$$H_m^{(1)}(\zeta_n r_j) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi i}} \exp[i(\zeta_n r_j - m\pi/2)] / \sqrt{\zeta_n r_j}$$

и разложениями:

$$\begin{aligned} \zeta_n r_j &= \zeta_n [r - (\xi_j \cos \varphi + \eta_j \sin \varphi)] + O(1/(\zeta_n r)), \\ 1/(\zeta_n r) &= 1/(\zeta_n r) + O(1/(\zeta_n r)^2). \end{aligned}$$

Их подстановка в представление (4) дает асимптотику поля \mathbf{u} в виде цилиндрических бегущих волн, в которых полюса ζ_n играют роль волновых чисел. Вертикальная компонента смещений:

$$u_z \sim \sum_n a_n(z, \varphi) e^{i\zeta_n r} / \sqrt{\zeta_n r} + O(1/(\zeta_n r)), \quad \zeta_n r \gg 1, \quad (11)$$

$$a_n = R_n(z) Q_n(\varphi), \quad Q_n = \sqrt{2/(\pi i)} \sum_j A_j e^{-i\zeta_n [\xi_j \cos \varphi + \eta_j \sin \varphi]} e^{-\sigma_n d_j},$$

радиальная компонента u_r имеет аналогичное представление через $P_n(z)$.

Данные асимптотические представления дают такую же количественную информацию о суммарной амплитуде волнового поля \mathbf{u} , как и исходное разложение (4), но с гораздо меньшими вычислительными затратами. Каждое слагаемое суммы (11) описывает отдельную моду бегущих волн, причем зависимость от пространственных переменных r , φ и z в них полностью разделена.

Дисперсионные характеристики и затухание цилиндрической волны с расстоянием определяются зависящим только от r фактором $e^{i\zeta_n r} / \sqrt{\zeta_n r}$, в то время как $R_n(z)$ дает зависимость от глубины, т.е. собственную форму n -той моды. Два этих фактора определяются только волноводными свойствами среды и не зависят от характеристик источника. Размер, форма и наклон источника, как и задающий амплитуду акустического сигнала коэффициент q_0 , входят в сомножитель $Q_n(\varphi)$, определяющий амплитуду и диаграмму направленности каждой из возбуждаемых бегущих волн.

В анизотропном случае асимптотика бегущих волн имеет аналогичный вид [41], но из-за зависимости полюсов ζ_n от угловой координаты волновые числа в показателях экспонент уже зависят от φ , задавая квазицилиндрические волн с некруговым фронтом. Скорость их распространения зависит от направления, а вектор групповой скорости отклоняется от волнового вектора.

Полученные интегральные и асимптотические представления являются удобным инструментом для анализа энергетического баланса в системе источник — акустическая среда — погруженный волновод. Осредненный за период колебаний поток энергии, переносимой каждой модой через поперечное сечение волновода, выражается через амплитудные коэффициенты разложения $\mathbf{a}_n = (a_x, a_y, a_z)$, в то время как общая мощность источника вычисляется интегрированием плотности потока энергии по окружающей его замкнутой поверхности (для рассматриваемой модели — по верхней и нижней стороне излучающей пластины [36]). Такой анализ позволяет, в частности, проследить распределение волновой энергии, поступающей от источника в пластину через акустическую среду, между возбуждаемыми в ней бегущими волнами, в том числе и проявление эффекта эстафетной передачи энергии [44, 45].

При исчезающе малой плотности акустической среды ($\rho_0 \omega^2 \rightarrow 0$) уравнение (10) вырождается в дисперсионное уравнение $\Delta(\alpha, \omega) = 0$ для ненагруженной пластины. Его вещественные корни являются волновыми числами незатухающих бегущих волн (для однородного волновода — волн Лэмба [1]). При относительно малой плотности $\rho_0/\rho \ll 1$ эти корни смещаются с вещественной оси в комплексную плоскость α , давая вытекающие бегущие волны [46—48], которые распространяются вдоль поверхности волновода с фазовой скоростью $c_n = \omega / \text{Re} \zeta_n$ и дополнительным экспоненциальным затуханием $e^{-\text{Im} \zeta_n r}$ (декремент затухания $\delta_n = 2\pi \text{Im} \zeta_n / \text{Re} \zeta_n \ll 1$). Кроме того, появляются две незатухающие ($\delta_n = 0$) бегущие волны Шолте—Стоунли [49]. Дисперсионные (частотные) зависимости $\zeta_n(\omega)$ для волн Лэмба хорошо известны [1], а для волновода, погруженного в акустическую среду с относительно малой плотностью, картина дисперсионных кривых практически не меняется (рис. 5а). Для иллюстрации влияния слоистости справа на рис. 5б приведены дисперсион-

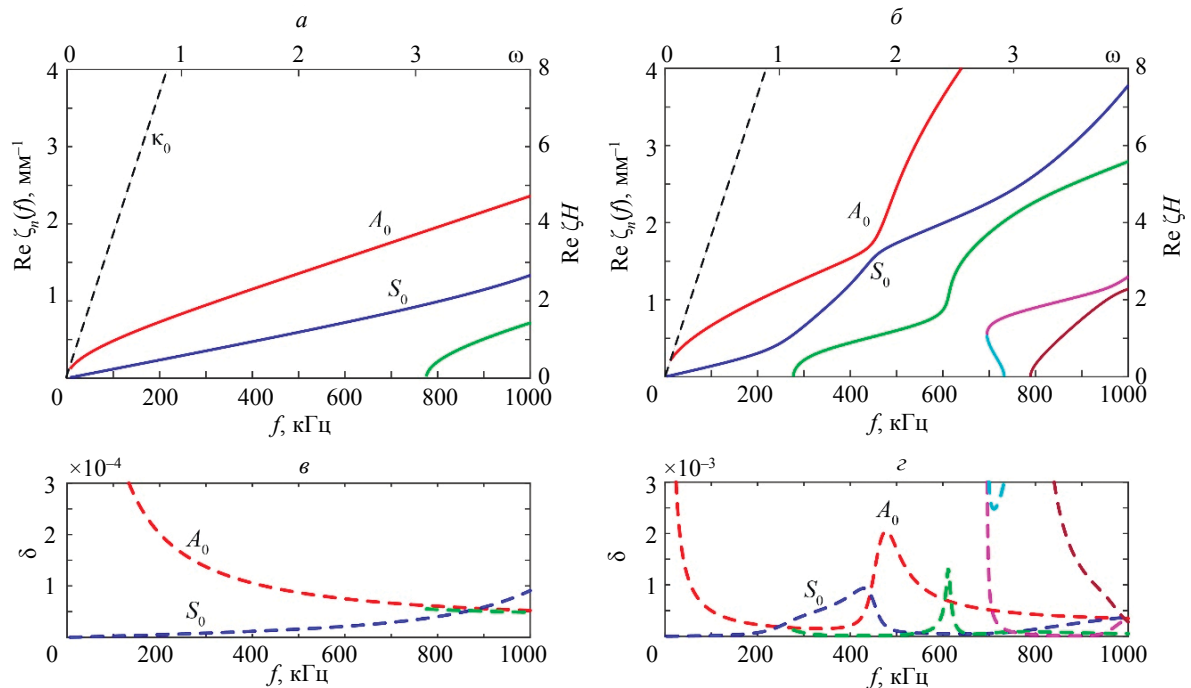


Рис. 5. Дисперсионные кривые $\text{Re} \zeta_n(f)$ для алюминиевой пластины (а) и двуслойного волновода плексиглас/алюминий (б) в воздухе; снизу декременты затухания соответствующих бегущих волн $\delta_n(f)$ (в), (г).

ные кривые для двуслойного образца плексиглас/алюминий той же суммарной толщины $H = 2$ мм ($h_1 = h_2 = 1$ мм, параметры плексигласа $c_p = 2813$ м/с, $c_s = 974$ м/с, $\rho = 1190$ кг/м³). Наряду с размерными значениями частоты и волновых чисел на верхней и правой осях отложены безразмерная круговая частота $\omega = 2\pi f H / c_s$ и безразмерные волновые числа $\zeta_n H$ (c_s — скорость поперечных волн в однородном слое). Штриховой луч на рис. 5 показывает частотную зависимость волнового числа звуковых волн $\kappa_0 = \omega / c_0$; дисперсионные кривые волн Шолте—Стоунли идут вдоль этого луча.

Следует отметить, что волновые числа ζ_n входят и в амплитудные коэффициенты Q_n , которые тем самым зависят не только от параметров источника, но и от дисперсионных характеристик возбуждаемых бегущих волн. Очевидно, что выбор параметров источника, приводящих к увеличению абсолютной величины Q_n , дает также увеличение амплитуды соответствующей бегущей волны.

ВЫБОР ПАРАМЕТРОВ ВОЗБУЖДЕНИЯ БЕГУЩИХ ВОЛН

В рамках представления (11) задача выбора оптимальных режимов возбуждения бегущих волн сводится к максимизации амплитудных коэффициентов a_n , в которые параметры источника входят только через сомножители Q_n . На рис. 6 показана зависимость абсолютной величины такого сомножителя от частоты и угла наклона для фундаментальной моды A_0 , возбуждаемой воздушно-связным преобразователем в алюминиевой пластине, и соответствующей моды в двуслойном образце плексиглас/алюминий (первая дисперсионная кривая на рис. 5а и 5б соответственно). Аналогичные поверхности $Q_n(\varphi, \theta)$ строятся и для волновых чисел ζ_n остальных мод, но их практическая ценность меньше, так как амплитуда второй фундаментальной моды S_0 , возбуждаемой АСТ, на 2-3 порядка меньше, чем моды A_0 , а высшие изгибные моды появляются только на нерабочих для рассматриваемых АСТ частотах выше 200 кГц.

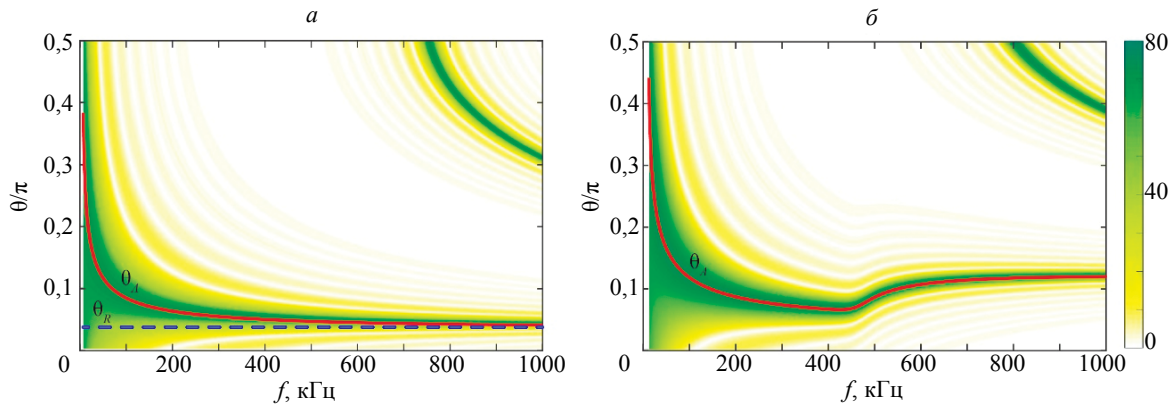


Рис. 6. Поверхности функции $Q_n(f, \theta)$ фундаментальной моды A_0 для однородного (а) и двуслойного (б) волноводов; сплошная линия — значение критического угла для возбуждения моды A_0 , горизонтальная штриховая линия — для рэлеевской волны.

Видно, что амплитуда Q_n достигает максимальных значений на частотах f , близких к нулю, причем для всего диапазона изменения угла наклона θ . Но с увеличением частоты зона максимумов быстро стягивается в узкий коридор, идущий на рис. 6а с постепенным снижением к значению $\theta = \theta_R$, где $\theta_R = \arcsin(c_0/c_R)$ — угол возбуждения волны Рэлея, распространяющейся вдоль поверхности $z = 0$ со скоростью c_R (для алюминия $c_R = 2957$ м/с, $\theta_R = 0,042\pi$ или $7,4^\circ$). Значения критических углов, при которых плоская звуковая волна возбуждает в образце одну из бегущих волн, определяется из условия совпадения ее фазовой скорости $c_n = \omega/\zeta_n$ со скоростью движения точки пересечения плоского фронта с границей раздела сред: $c_0 \sin\theta = c_n$.

В отличие от бездисперсионной волны Рэлея критические углы возбуждения нормальных мод частотно зависимы. Сплошными линиями на рис. 6а и 6б показаны примеры такой зависимости для критического угла θ_A для моды A_0 в однородной пластине и соответствующей моды в двуслойном образце. На рис. 6 эти линии идут по центру зон максимума, чем подтверждается согласованность коэффициентов Q_n с условиями возбуждения бегущих волн квазиплоскими волнами, генерируемыми наклонным АСТ. Однако коэффициенты Q_n в дополнение к указанию на оптимальные

частоты и углы наклона дают также и количественную информацию, учитывающую амплитудно-частотную характеристику источника, причем и для излучателей сложной формы (сфокусированные источники, фазированные решетки и т.п.). Такая информация принципиально недоступна при использовании только законов преломления и отражения плоских волн.

Стремление значения критического угла θ_A к θ_R объясняется тем, что с ростом частоты дисперсионные кривые $\zeta_A(f)$ асимптотически сближаются с лучом $\zeta_R = \omega/c_R$, дающим дисперсионную зависимость для волны Рэлея в полупространстве с теми же упругими свойствами, что и в окрестности поверхности слоистого волновода. Этим объясняется и изгиб в окрестности $f = 500$ кГц как дисперсионной кривой A_0 на рис. 5б, так и соответствующей кривой $\theta_A(f)$ на рис. 6б. Он отражает перестройку тенденции от сближения на низких и средних частотах к значениям характеристик волны Рэлея для осредненных упругих модулей двуслойного образца к ее характеристикам для более мягкого плексигласа при $f \rightarrow \infty$. Тем самым на высоких частотах оптимальным для возбуждения моды A_0 становится угол наклона $\theta_A = 0,12\pi (\approx 22^\circ)$.

Интересно также отметить появление на высоких частотах ($\approx 800\text{—}1000$ кГц) дополнительной полосы максимумов Q_n , которая возникает на уровне предельного угла наклона $\theta = \pi/2 (90^\circ)$, спускаясь в этом диапазоне до $0,3\pi\text{—}0,4\pi$. Ее появление обусловлено взаимодействием с пластиной бокового лепестка диаграммы направленности поля источника p_0 , который растет с увеличением частоты. Угол наклона квазиплоского фронта этого лепестка, очевидно гораздо меньше, чем у главного, и в указанном диапазоне совпадает со значениями критического угла $\theta_A(f)$.

На фиксированной частоте f каждая из этих полос дает локальное значение оптимального угла наклона. В качестве примера на рис. 7 приведены нормированные вертикальные компоненты $|a_z/v_0|$ амплитудного коэффициента асимптотики возбуждаемых бегущих волн (11) для моды A_0 в зависимости от θ на низких, средних и высоких частотах из рассматриваемого диапазона. Для двуслойной пластины приведено два варианта зондирования: со стороны плексигласа и со стороны алюминия (рис. 7б и 7в). Из-за большого акустического сопротивления даже пиковые значения амплитуды смещений на поверхности алюминиевой пластины на четыре порядка меньше, чем смещения v_0 звукового поля в свободном пространстве (рис. 7а). На высоких частотах 500 и 1000 кГц пиковые значения на рис. 7б (плексиглас/алюминий) становятся на два порядка больше, а при зондировании со стороны алюминия (см. рис. 7в), наоборот, проявляется только пик на частоте 200 кГц, в то время как на высоких частотах они в масштабе рисунка не видны. Разная высота пиков указывает на учет в асимптотике свойств материала через элемент матрицы Грина — сомножитель R_n . Он также дает и обусловленную свойствами волновода частотную зависимость амплитуды a_n .

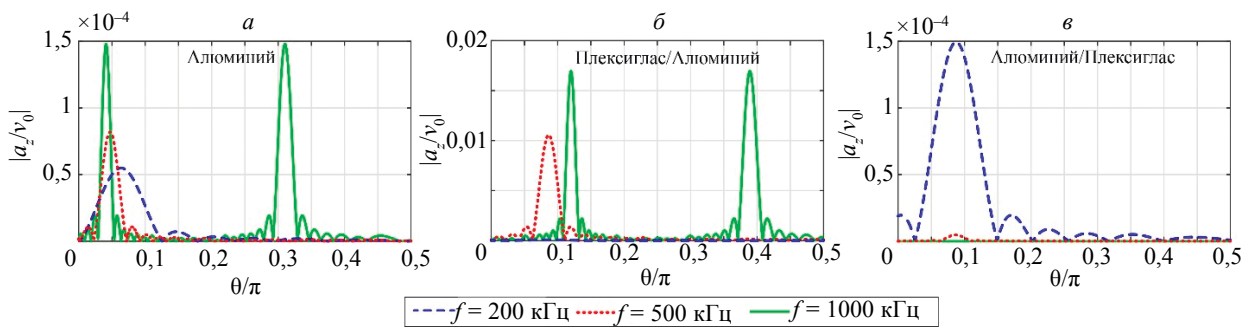


Рис. 7. Зависимость амплитудного множителя $|a_z/v_0|$ фундаментальной моды A_0 от угла наклона θ на различных частотах f для однородной (а) и двуслойной (б, в) пластин.

Для иллюстрации частотной зависимости на рис. 8 приведены графики $|a_z/v_0|$ для фиксированных углов наклона $\theta = 0, 7,4^\circ$ и 30° . Локальные максимумы данных кривых коррелируют с получающимися при сечении показанных на рис. 6 поверхностей Q_n вдоль соответствующих горизонтальных линий $\theta = \text{const}$, но в них также учитывается и влияние зависящих от частоты сомножителей R_n и $1/v_0$. Очевидно, лучшим из приведенных является угол $\theta = 7,4^\circ$, так как он обеспечивает близкую к максимуму амплитуду колебаний поверхности образца в наиболее широком частотном диапазоне, попадая в коридор максимумов на рис. 6 для алюминиевого образца. Однако для пластин из других материалов оптимальный угол наклона должен быть изменен, причем, судя по изгибу кори-

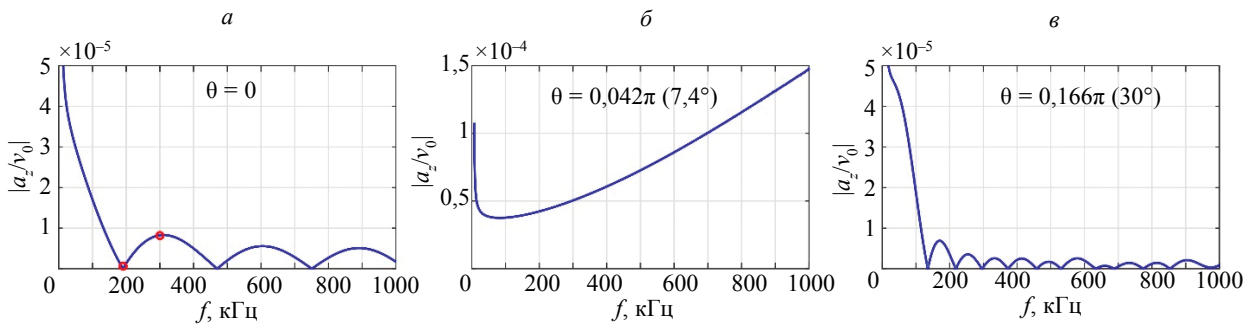


Рис. 8. Пример частотных зависимостей амплитудного множителя a_n в асимптотике бегущих волн (11) для фундаментальной моды A_0 на поверхности алюминиевой пластины при различных углах наклона источника θ : $\theta = 0$ (а), $\theta = 0,042\pi$ (б), $\theta = 0,166\pi$ (в).

дора на рис. 6б, для неоднородных пластин требуется тонкая настройка, учитывающая частотный диапазон рассматриваемого преобразователя.

Высота источника d практически не влияет на положение точек максимума, т.е. на оптимальный наклон источника. Математически это объясняется тем, что расстояния до поверхности d_j входят в Q_n только через экспоненты $e^{-\sigma_n d_j}$, в которых σ_n чисто мнимая, так как $\zeta_n < \kappa_0$ (см. штриховую линию для κ_0 на рис. 5). Поэтому их абсолютная величина $|e^{-\sigma_n d_j}| = 1$ не зависит от расстояния d_j . В сумме по j эти экспоненты складываются при различных значениях сдвига фазы, но изменение общего расстояния d при фиксированном наклоне источника этот сдвиг фаз не меняет. С физической точки зрения независимость оптимальных θ от d можно объяснить тем, что угол наклона квазиплоского фронта главного лепестка поля источника p_0 к поверхности образца не зависит от высоты. Меняется только расположение локальной области основного взаимодействия акустического пучка с пластиной на ее поверхности.

Для горизонтального кругового источника ($\theta = 0$) $Q_n = \sqrt{2/\pi i} Q_0(\zeta_n) e^{-\sigma_n d}$, где Q_0 определяется интегралом (8). При $q_0 = \text{const}$ он берется в явном виде: $Q_0 = 2q_0 J_1(a\zeta_n)/(a\zeta_n)$, J_1 — функция Бесселя. При совпадении аргумента $a\zeta_n$ с нулями функции J_1 , $Q_n = 0$, т.е. на соответствующих частотах n -тая мода не возбуждается. Например, на рис. 8а $a_z = 0$ на частоте $f = 190$ кГц, близкой к центральной частоте преобразователя Sonates CF200, так как $a\zeta_1 = 3,831$ — первый ноль функции J_1 . И наоборот, $|a_n|$ принимает максимальные значения в точках максимума Q_0 . На рис. 8а это частоты $f = 285$ и 591 кГц, соответствующие точкам максимума $a\zeta_1 = 5,03$ и $8,463$. Это так называемые частоты наилучшего возбуждения (sweet spots по терминологии, используемой в SHM для генерации бегущих волн пленочными пьезопреобразователями [50]). Сопоставление графиков на рис. 8а и 8в показывает, что при наклоне источника эти точки сгущаются, смещаясь влево.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Дано обобщение полуаналитической модели работы бесконтактного воздушно-связного УЗ преобразователя на случай его наклонного позиционирования для возбуждения бегущих волн в инспектируемом образце. Показаны ее преимущества в плане физической наглядности волновой структуры решения и значительно меньших вычислительных затратах, чем при использовании МКЭ. Приводятся численные примеры, показывающие возможность определения оптимальных углов наклона и частотных диапазонов с учетом волноводных свойств зондируемого образца, который может быть не только изотропным упругим слоем, но и многослойным анизотропным композитом.

Работа выполнена в рамках проекта № FZEN-2020-0017 государственного задания Минобрнауки России.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Викторов И.А. Физические основы применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике. М.: Наука, 1966. 169 с.
2. Worlton D.C. Ultrasonic testing with Lamb waves // Nondestruct. test. 1957. V. 15. No 4. P. 218—222.

3. Лефельд В. Испытание листового материала, труб и штанг при помощи ультразвуковых поверхностных и пластиночных волн / Труды Межд. симпозиума о применении ультразвука (русский пер.). ЧССР, Братислава, сентябрь. 1962.
4. Farlow R., Kelly S.P., Hayward G. Advances in air coupled NDE for rapid scanning applications / 1994 Proceedings of IEEE Ultrasonics Symposium. 1994. V. 2. P. 1099—1102.
5. Grandia W., Fortunko C. NDE applications of air-coupled ultrasonic transducers / IEEE Ultrasonic Symposium, Proceedings. 1995. V. 1. P. 697—709.
6. Castaings M., Cawley P. The generation, propagation, and detection of Lamb waves in plates using air-coupled ultrasonic transducers // J. Acoust. Soc. Am. 1996. V. 100. No 5. P. 3070—3077.
7. Safaeinili A., Lobkis O.I., Chimenti D.E. Quantitative materials characterization using air-coupled leaky Lamb waves // Ultrasonics. 1996. V. 34. P. 393—396.
8. Derusova D.A., Vavilov V.P., Druzhinin N.V., Kolomeets N.P., Chulkov A.O., Rubtsov V.E., Kolubaev E.A. Investigating vibration characteristics of magnetostrictive transducers for air-coupled ultrasonic NDT of composites // NDT & E International. 2019. V. 107. No. 102151. P. 1—10.
9. Derusova D.A., Vavilov V.P., Shpil'noi V.Y., Nekhoroshev V.O., Druzhinin N.V. Features of laser-vibrometric nondestructive testing of polymer composite materials using air-coupled ultrasonic transducers // Russian Journal of Nondestructive Testing. 2021. V. 57. No. 12. P. 1060—1071. [Дерусова Д.А., Вавилов В.П., Нехорошев В.О., Шпилюной В.Ю., Дружинин Н.В. Особенности лазерно-виброметрического неразрушающего контроля полимерных композиционных материалов с использованием воздушно-связанных ультразвуковых преобразователей // Дефектоскопия. 2021. № 12. С. 26—38.]
10. Römmeler A., Zolliker P., Neuenschwander J. Air coupled ultrasonic inspection with Lamb waves in plates showing mode conversion // Ultrasonics. 2020. V. 100. No. 105984. P. 1—12.
11. Green R.E. Non-contact ultrasonic techniques // Ultrasonics. 2004. V. 42. P. 9—16.
12. Chimenti D.E. Review of air-coupled ultrasonic materials characterization // Ultrasonics. 2014. V. 54. No. 7. P. 1804—1816.
13. Рыков А.Н. Ультразвуковой акустический контроль с идентификацией дефектов изделий из полимерных композиционных материалов // Контроль. Диагностика. 2018. № 2. С. 48—58.
14. Takahashi V., Lematre M., Fortineau J., Lethiecq M. Elastic parameters characterization of multilayered structures by air-coupled ultrasonic transmission and genetic algorithm // Ultrasonics. 2022. V. 119. No. 10661. P. 1—9.
15. Dahmen S., Ketata H., Hédi Ben Ghazlen M., Hosten B. Elastic constants measurement of anisotropic Olivier wood plates using air-coupled transducers generated Lamb wave and ultrasonic bulk wave // Ultrasonics. 2010. V. 50. No. 4—5. P. 502—507.
16. Fang Y., Lin L., Feng H., Lu Zh., Emms G.W. Review of the use of air-coupled ultrasonic technologies for nondestructive testing of wood and wood products // Computers and Electronics in Agriculture. 2017. V. 137. P. 79—87.
17. Gómez Álvarez-Arenas T.E., Soto D.A. Characterization of mineral paper by air-coupled ultrasonic spectroscopy // Ultrasonics. 2012. V. 52. No. 6. P. 794—801.
18. Evani S.K., Spalvier A., Popovics J.S. Air-coupled ultrasonic assessment of concrete rail ties // NDT & E International. 2021. V. 123. No. 102511. P. 1—8.
19. Fariñas L., Sanchez-Torres E.A., Sanchez-Jimenez V., Diaz R., Benedito J., Garcia-Perez J.V. Assessment of avocado textural changes during ripening by using contactless air-coupled ultrasound // Journal of Food Engineering. 2021. V. 289. No. 110266. P. 1—9.
20. Kersemans M., Martens A., Van Den Abeele K., Degrieck J., Pyl L., Zastavnik F., Sol H., Van Paepegem W. The quasi-harmonic ultrasonic polar scan for material characterization: Experiment and numerical modeling // Ultrasonics. 2015. V. 58. P. 111—122.
21. Martens A., Kersemans M., Daemen J., Verboven E., Van Paepegem W., Delrue S., Van Den Abeele K. Characterization of the orthotropic viscoelastic tensor of composites using the Ultrasonic Polar Scan // Composite Structures. 2019. V. 230. No. 111499. P. 1—10.
22. Kersemans M., Martens A., Degrieck J., Van Den Abeele K., Delrue S., Pyl L., Zastavnik F., Sol H., Van Paepegem W. The ultrasonic polar scan for composite characterization and damage assessment: past present and future // Applied Sciences. 2016. V. 6. No. 2. P. 1—15.
23. Aanes M., Lohne K.D., Lunde P., Vestrheim M. Beam diffraction effects in sound transmission of a fluid-embedded viscoelastic plate at normal incidence // J. Acoust. Soc. Am. 2016. V. 140. No. 1. P. EL67.
24. Huber A. Non-destructive testing of future rocket boosters using air-coupled ultrasound / Proceeding of the 19th World Conference on Non-Destructive Testing (WCNDT 2016). (Germany, Munich, 13—17 June 2016). 2016. P. 1—9.
25. Adebahr W., Bernhardt Y., Kreutzbruck M. 3D-robotized air-coupled ultrasound measurements of large components / Proceeding of the 19th World Conference on Non-Destructive Testing (WCNDT 2016) (Germany, Munich, 13—17 June 2016). 2016. P. 1—8.
26. Raghavan A., Cesnik C.E.S. Review of guided-wave Structural Health Monitoring // The Shock and Vibration Digest. 2007. V. 39. P. 91—114.

27. *Giurgiutiu V.* Structural Health Monitoring with Piezoelectric Wafer Active Sensors, 2nd Edition. New-York: Elsevier Academic Press, 2014. 1032 p.
28. *Ramadas C., Hood A., Khan I., Balasubramaniam K., Joshi M.* An experimental study on the behavior of A0 mode transduced using misaligned air-coupled transducers in composite laminates // *Applied Acoustics*. 2014. V. 83. P. 141—149.
29. *Бреховских Л.М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 342 с.
30. *Шендеров Е.Л.* Излучение и рассеяние звука. Л.: Судостроение, 1989. 304 с.
31. *Junger M.C., Feit D.* Sound structures and their interaction / 2nd Edition. Boston, MA: MIT Press, 1986. 462 p.
32. *Hosten B., Biateau Ch.* Finite element simulation of the generation and detection by air-coupled transducers of guided waves in viscoelastic and anisotropic materials // *J. Acoust. Soc. Am.* 2008. V. 123. No. 4. P. 1963—1971.
33. *Masmoudi M., Castaings M.* Three-dimensional hybrid model for predicting air-coupled generation of guided waves in composite material plates // *Ultrasonics*. 2012. V. 52. No. 1. P. 81—92.
34. *Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Евдокимов А.А.* Гибридная численно-аналитическая схема для расчета дифракции упругих волн в локально неоднородных волноводах // *Акустический журнал*. 2018. Т. 64. № 1. С. 3—12.
35. *Eremin A.A., Glushkov E.V., Glushkova N.V.* Application of Piezoelectric Wafer Active Sensors for Elastic Guided Wave Excitation and Detection in Structural Health Monitoring Systems for Elongated Constructions // *Russian Journal of Nondestructive Testing*. 2020. V. 56. No. 10. P. 795—809. [*Еремин А.А., Глушков Е.В., Глушкова Н.В.* Применение пленочных пьезопреобразователей для возбуждения и регистрации бегущих упругих волн в системах активного мониторинга протяженных конструкций // *Дефектоскопия*. 2020. № 10. С. 24—38.]
36. *Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Мякишева О.А.* Распределение энергии ультразвукового излучателя между бегущими волнами, возбуждаемыми в погруженном упругом волноводе // *Акуст. журн.* 2019. Т. 65. № 6. С. 723—735.
37. *Glushkov E.V., Glushkova N.V., Miakisheva O.A.* Backward waves and energy fluxes excited in acoustic medium with an immersed plate // *Ultrasonics*. 2019. V. 92. P. 158—168.
38. *Tutov S.A., Maev P.G., Bogachenkov A.H.* Линзовый многоэлементный акустический микроскоп в режиме измерения параметров слоистых объектов // *Акуст. журн.* 2017. Т. 63. № 5. С. 546—552.
39. *Morokov E., Levin V., Chernov A., Shanygin A.* High resolution ply-by-ply ultrasound imaging of impact damage in thick CFRP laminates by high-frequency acoustic microscopy // *Composite Structures*. 2021. V. 256. No. 113102. P. 1—13.
40. *Исакович М.А.* Общая акустика. М.: Наука, 1973. 496 с.
41. *Глушков Е.В., Глушкова Н.В.* Бегущие волны в многослойных анизотропных композитах // *ПММ*. 2021. Т. 85. Вып. 3. С. 296—308.
42. *Joly P.* An elementary introduction to the construction and the analysis of perfectly matched layers for time domain wave propagation // *SeMA J.* 2012. V. 57. P. 5—48.
43. *Ворович И.И., Бабешко В.А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.
44. *Глушкова Н.В., Фоменко С.И.* Эффект эстафетной передачи энергии между модами бегущих волн / Труды VII Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела (Ростов-на-Дону, 15 — 18 октября 2013 г.). 2013. Т. 1. С. 159—163.
45. *Glushkov E., Glushkova N., Fomenko S.* Wave energy transfer in elastic half-spaces with soft interlayers // *J. Acoust. Soc. Am.* 2015. V. 137. No. 4. P. 1802—1812.
46. *Меркулов Л.Г.* Затухание нормальных волн в пластинах, находящихся в жидкости // *Акуст. журн.* 1964. Т. 10. № 2. С. 206—212.
47. *Rokhlin S.I., Chimenti D.E., Nayfeh A.H.* On the topology of the complex wave spectrum in a fluid-coupled elastic layer // *J. Acoust. Soc. Am.* 1989. V. 85. No. 3. P. 1074—1080.
48. *Shuvalov A.L., Poncelet O., Deschamps M.* Analysis of the dispersion spectrum of fluid-loaded anisotropic plates: leaky-wave branches // *J. Sound Vib.* 2006. V. 296. P. 494—517.
49. *Sessarego J.-P., Sagéoli J., Gazanhes C., Überall H.* Two Scholte-Stoneley waves on doubly fluid-loaded plates and shells // *J. Acoust. Soc. Am.* 1997. V. 101. No. 1. P. 135—142.
50. *Giurgiutiu V.* Tuned Lamb wave excitation and detection with piezoelectric wafer active sensors for structural health monitoring // *J. Intell. Mater. Syst. Struct.* 2005. V. 16. P. 291—305.