

РАСЧЕТ НАПРЯЖЕННОСТИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ОТ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО ЦИЛИНДРА, ПОМЕЩЕННОГО В ПРОИЗВОЛЬНОЕ ВНЕШНЕЕ ПОЛЕ

© 2023 г. В.В. Дякин¹, О.В. Кудряшова^{1,*}, В.Я. Раевский^{1,**}

¹Институт физики металлов имени М.Н. Михеева УрО РАН,
Россия 620108 Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 18
E-mail: *kudryashova_ov@imp.uran.ru; **ravskii@mail.ru

Поступила в редакцию 06.03.2023; после доработки 07.04.2023
Принята к публикации 07.04.2023

В модели полубесконечного цилиндра выведены формулы и представлен соответствующий алгоритм нахождения напряженности магнитного поля внутри и вне однородного цилиндра, помещенного во внешнее магнитное поле произвольной конфигурации. Проведено тестирование результатов расчетов по этим формулам на их соответствие известным физическим законам, а также на их совпадение с известными аналитическими ответами в предельных частных случаях формы магнетика.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение магнитостатики, цилиндрический магнетик, расчет магнитостатических полей.

DOI: 10.31857/S0130308223050044, EDN: ZDVVPM

1. ВВЕДЕНИЕ

Для решения многих практических задач из области магнетизма, например, задач неразрушающего магнитного контроля, актуальной является проблема создания обоснованных алгоритмов аналитического или численно-аналитического решения задач магнитостатики по вычислению напряженности результирующего поля применительно к магнитным телам различной формы, помещенным во внешнее магнитное поле. Такие алгоритмы, позволяющие вычислять напряженность поля внутри и вне магнитного тела с гарантированной и контролируемой точностью, представляют собой как реальный практический интерес, так и пополняют базу алгоритмов точно решаемых задач (в указанном выше смысле), которая необходима для тестирования известных пакетов универсальных программ (типа ELCUT, ANSYS, ELMER), формальное использование которых приводит ко многим проблемам. Подробному описанию недостатков этих программ и подводных камней при их использовании посвящена работа [1].

В статье авторов [2] предложен и обоснован подход, сводящий вычисление напряженности магнитного поля от однородного цилиндра конечных размеров, помещенного в произвольное внешнее поле, к решению некоторого количества систем трех одномерных линейных интегральных уравнений. В следующей работе [3] предложен численный алгоритм, основанный на дискретизации указанных интегральных уравнений методом квадратур [4, с. 157], а в качестве квадратурной формулы, приближенно заменяющей интегралы, выбрана формула средних прямоугольников, которая при разбиении используемого в интегральных уравнениях отрезка интегрирования $[0, 1]$ на m равных частей имеет вид:

$$\int_0^1 f(x) dx \approx \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m f(x_i), \quad (1)$$

где узлы квадратурной формулы выбираются в середине отрезков разбиения:

$$x_i = \frac{2i-1}{2m}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (2)$$

Указанный алгоритм успешно прошел различные тестовые проверки, описанные в [3], однако обнаружил и ряд недостатков, проявляющихся при расчетах в случае достаточно длинных цилиндров. Для дискретизации интегральных уравнений оказалось неудачным применение квадратурной формулы (1) с равномерным распределением узлов интегрирования (2) при больших значениях длины l цилиндра из-за «нетривиального» поведения в этом случае соответствующих подынтегральных функций (ниже об этом подробнее). В связи с этим для поддержания достаточной точности расчетов при использовании этой формулы с ростом длины цилиндра приходилось значительно увеличивать число разбиений m (до нескольких тысяч) в (1). Это приводило к резкому

увеличению порядка (равному $3m$) систем линейных уравнений, получаемых при дискретизации интегральных уравнений, что, в свою очередь, влекло ужесточение требований к объему памяти используемого компьютера и, что наиболее важно, к увеличению числа обусловленности этих систем и, тем самым, неконтролируемо увеличивало ошибки в их решениях.

Для преодоления этих недостатков при необходимости расчета напряженности результирующего поля внутри и вне достаточно длинного цилиндра предлагается не использовать описанный в [3] общий алгоритм, а использовать значительно более простые и более точные (в этой ситуации) формулы, полученные в модели бесконечного или полубесконечного цилиндра. Выводу таких формул и проверке их адекватности и посвящена настоящая работа. Формулы для полубесконечного цилиндра предполагается использовать в том случае, когда требуется вычисление напряженности поля в точке, достаточно близкой к плоскости одного из торцов длинного цилиндра. А формулы для бесконечного цилиндра — в случае, когда такая точка удалена от обеих торцевых плоскостей длинного цилиндра. Существующие ограничения на объем материала статьи не позволяют в рамках одной работы рассмотреть случаи полубесконечного и бесконечного цилиндра. Поэтому в настоящей работе будет рассмотрен случай только полубесконечного цилиндра. Выводу формул для бесконечного цилиндра в дальнейшем тоже будет посвящена отдельная работа. Но даже такое сокращение материала не позволяет сколько-нибудь подробно изложить достаточно объемные выкладки, приводящие к расчетным формулам. Поэтому при их выводе будет, в основном, даваться направление выкладок и указываться способы преодоления возникающих на этом пути подводных камней.

2. СХЕМА РАСЧЕТА НАПРЯЖЕННОСТИ ПОЛЯ РЕАКЦИИ КОНЕЧНОГО ЦИЛИНДРА

Для решения задач магнитостатики мы исходим из так называемого основного уравнения магнитостатики, которое в случае однородного магнетика с постоянной магнитной проницаемостью μ имеет вид:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) - \frac{\mu - 1}{4\pi} \nabla \operatorname{div} \int_{\Omega} \frac{\mathbf{H}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' = \mathbf{H}^0(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in R^3 \setminus S. \quad (3)$$

Это трехмерное интегро-дифференциальное уравнение эквивалентно системе уравнений Максвелла для случая магнитостатики (см. [5, с. 17; 6, с. 149; 7—9]) и связывает искомую напряженность результирующего магнитного поля $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \{H_x(\mathbf{r}), H_y(\mathbf{r}), H_z(\mathbf{r})\}$ в произвольной точке пространства $\mathbf{r} = (x, y, z)$ (не лежащей на границе магнетика) с напряженностью $\mathbf{H}^0(\mathbf{r}) = \{H_x^0(\mathbf{r}), H_y^0(\mathbf{r}), H_z^0(\mathbf{r})\}$ заданного поля внешнего источника. В уравнении (3) Ω есть область в пространстве R^3 , ограниченная поверхностью S и занятая исследуемым магнетиком с заданной постоянной магнитной проницаемостью μ .

Рассмотрим магнетик в форме прямого кругового цилиндра (см. рис. 1). Область Ω , занятая магнетиком, представляет собой прямой круговой цилиндр длины l с боковой поверхностью S_1 , ось которого совмещена с осью z , а нижнее и верхнее основания S_2 и S_3 суть круги радиуса R , расположенные в плоскостях $z = d$ и $z = d + l$ соответственно.

В нашей работе [2] разработана и обоснована методика вычисления так называемого поля реакции (магнетика) $\mathbf{H}^R(\mathbf{r}) := \mathbf{H}(\mathbf{r}) - \mathbf{H}^0(\mathbf{r})$, которая сводится к схеме, представленной ниже.

Цилиндрические координаты поля реакции $\mathbf{H}^R(r, \varphi, z) = \{H_r^R(r, \varphi, z), H_\varphi^R(r, \varphi, z), H_z^R(r, \varphi, z)\}$ в произвольной точке пространства с цилиндрическими координатами (r, φ, z) , не лежащей на поверхности магнетика $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ или на его оси, вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} H_r^R(r, \varphi, z) = \sqrt{\pi}(\mu - 1) \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \cos n\varphi \left[t \int_0^1 a_n^{(1)}(z') \alpha_n(\bar{r}, 1, \bar{z} - tz') dz' + \int_0^1 a_n^{(2)}(r') \alpha_n(\bar{r}, r', \bar{z}) dr' + \right. \right. \\ \left. \left. + \int_0^1 a_n^{(3)}(r') \alpha_n(\bar{r}, r', \bar{z} - t) dr' \right] + \sin n\varphi \left[t \int_0^1 b_n^{(1)}(z') \alpha_n(\bar{r}, 1, \bar{z} - t \cdot z') dz' + \right. \right. \\ \left. \left. + \int_0^1 b_n^{(2)}(r') \alpha_n(\bar{r}, r', \bar{z}) dr' + \int_0^1 b_n^{(3)}(r') \alpha_n(\bar{r}, r', \bar{z} - t) dr' \right] \right\}; \quad (4) \end{aligned}$$

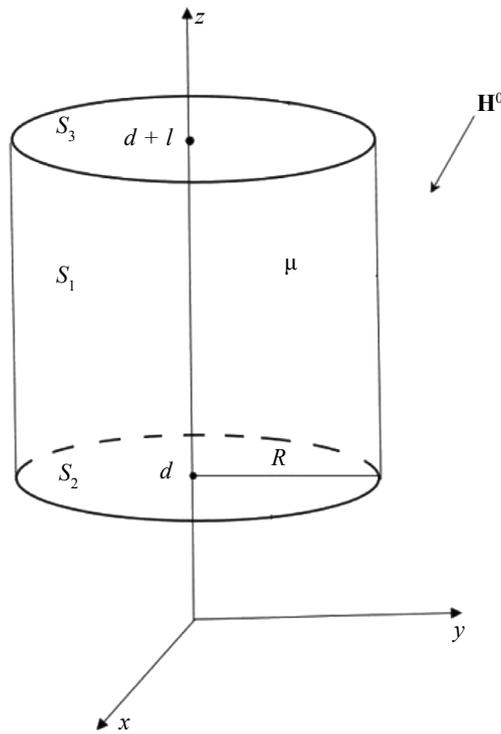


Рис. 1. Однородный цилиндр в магнитном поле.

$$\begin{aligned}
 H_{\varphi}^R(r, \varphi, z) = & -\sqrt{\pi}(\mu - 1) \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \cos n\varphi \left[t \int_0^1 b_n^{(1)}(z') \beta_n(\bar{r}, 1, \bar{z} - tz') dz' + \int_0^1 b_n^{(2)}(r') \beta_n(\bar{r}, r', \bar{z}) dr' + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \int_0^1 b_n^{(3)}(r') \beta_n(\bar{r}, r', \bar{z} - t) dr' \right] - \sin n\varphi \left[t \int_0^1 a_n^{(1)}(z') \beta_n(\bar{r}, 1, \bar{z} - t \cdot z') dz' + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \int_0^1 a_n^{(2)}(r') \beta_n(\bar{r}, r', \bar{z}) dr' + \int_0^1 a_n^{(3)}(r') \beta_n(\bar{r}, r', \bar{z} - t) dr' \right] \right\}; \quad (5)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_z^R(r, \varphi, z) = & \sqrt{\pi}(\mu - 1) \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \cos n\varphi \left[t \int_0^1 a_n^{(1)}(z') \gamma_n(\bar{r}, 1, \bar{z} - tz') dz' + \int_0^1 a_n^{(2)}(r') \gamma_n(\bar{r}, r', \bar{z}) dr' + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \int_0^1 a_n^{(3)}(r') \gamma_n(\bar{r}, r', \bar{z} - t) dr' \right] + \sin n\varphi \left[t \int_0^1 b_n^{(1)}(z') \gamma_n(\bar{r}, 1, \bar{z} - tz') dz' + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \int_0^1 b_n^{(2)}(r') \gamma_n(\bar{r}, r', \bar{z}) dr' + \int_0^1 b_n^{(3)}(r') \gamma_n(\bar{r}, r', \bar{z} - t) dr' \right] \right\}, \quad (6)
 \end{aligned}$$

где приняты обозначения:

$$\bar{r} := \frac{r}{R}, \quad \bar{z} := \frac{z - d}{R}, \quad t := \frac{l}{R}; \quad (7)$$

$$\alpha_n(a, b, q) := \frac{(-1)^{n+1} b \delta(a, b, q)}{a \Gamma(n-1/2)} \left\{ \left[a^2 - \frac{n(a^2 + b^2 + q^2)}{2n+1} \right] P_{1/2}^n(\varepsilon(a, b, q)) + \frac{2ab}{4n^2 - 1} P_{1/2}^{n+1}(\varepsilon(a, b, q)) \right\}; \quad (8)$$

$$\beta_n(a, b, q) := \frac{(-1)^{n+1} n b \delta(a, b, q)}{a \Gamma(n-1/2)} \left[\frac{a^2 + b^2 + q^2}{2n+1} P_{1/2}^n(\varepsilon(a, b, q)) + \frac{4ab}{4n^2 - 1} P_{1/2}^{n+1}(\varepsilon(a, b, q)) \right]; \quad (9)$$

$$\gamma_n(a, b, q) := \frac{(-1)^{n+1} b q \delta(a, b, q)}{\Gamma(n-1/2)} P_{1/2}^n(\varepsilon(a, b, q)). \quad (10)$$

В формулах (8)—(10):

$$\delta(a, b, q) = \left[(a^2 + b^2 + q^2)^2 - 4a^2 b^2 \right]^{-3/4}, \quad \varepsilon(a, b, q) = \left[1 - \left(\frac{2ab}{a^2 + b^2 + q^2} \right)^2 \right]^{-1/2}, \quad (11)$$

$P_{1/2}^n(\cdot)$ — присоединенная функция Лежандра [10]; $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция.

Функции $\{ a_n^{(1)}(z), a_n^{(2)}(r), a_n^{(3)}(r) \}_{n=0}^{\infty}$ в (4)—(6) для каждого $n = 0, 1, 2, \dots$ являются решением системы следующих одномерных линейных интегральных уравнений:

$$a_n^{(1)}(z) - 2\lambda\sqrt{\pi} \left[t \int_0^1 a_n^{(1)}(z') \alpha_n(1, 1, t(z-z')) dz' + \int_0^1 a_n^{(2)}(r') \alpha_n(1, r', tz) dr' + \int_0^1 a_n^{(3)}(r') \alpha_n(1, r', t(1-z)) dr' \right] = \frac{2}{\mu+1} a_n^{(01)}(z); \quad (12)$$

$$a_n^{(2)}(r) - 2\lambda\sqrt{\pi} \left[t \int_0^1 a_n^{(1)}(z') \gamma_n(r, 1, tz') dz' + \int_0^1 a_n^{(3)}(r') \gamma_n(r, r', t) dr' \right] = \frac{2}{\mu+1} a_n^{(02)}(r); \quad (13)$$

$$a_n^{(3)}(r) - 2\lambda\sqrt{\pi} \left[t \int_0^1 a_n^{(1)}(z') \gamma_n(r, 1, t(1-z')) dz' + \int_0^1 a_n^{(2)}(r') \gamma_n(r, r', t) dr' \right] = \frac{2}{\mu+1} a_n^{(03)}(r). \quad (14)$$

Функции $\{ b_n^{(1)}(z), b_n^{(2)}(r), b_n^{(3)}(r) \}_{n=1}^{\infty}$ в (4)—(6) для каждого $n = 1, 2, \dots$ есть решение системы одномерных линейных интегральных уравнений:

$$b_n^{(1)}(z) - 2\lambda\sqrt{\pi} \left[t \int_0^1 b_n^{(1)}(z') \alpha_n(1, 1, t(z-z')) dz' + \int_0^1 b_n^{(2)}(r') \alpha_n(1, r', tz) dr' + \int_0^1 b_n^{(3)}(r') \alpha_n(1, r', t(1-z)) dr' \right] = \frac{2}{\mu+1} b_n^{(01)}(z); \quad (15)$$

$$b_n^{(2)}(r) - 2\lambda\sqrt{\pi} \left[t \int_0^1 b_n^{(1)}(z') \gamma_n(r, 1, tz') dz' + \int_0^1 b_n^{(3)}(r') \gamma_n(r, r', t) dr' \right] = \frac{2}{\mu+1} b_n^{(02)}(r); \quad (16)$$

$$b_n^{(3)}(r) - 2\lambda\sqrt{\pi} \left[t \int_0^1 b_n^{(1)}(z') \gamma_n(r, 1, t(1-z')) dz' + \int_0^1 b_n^{(2)}(r') \gamma_n(r, r', t) dr' \right] = \frac{2}{\mu+1} b_n^{(03)}(r). \quad (17)$$

В системах (12)—(14) и (15)—(17) параметр $\lambda := (\mu - 1)/(\mu + 1)$, а сами системы отличаются только правыми частями и обозначениями искомых функций. Функции в правых частях этих систем $\{a_n^{(01)}(z), a_n^{(02)}(r), a_n^{(03)}(r)\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{b_n^{(01)}(z), b_n^{(02)}(r), b_n^{(03)}(r)\}_{n=1}^{\infty}$ выражаются следующим образом через декартовы компоненты напряженности заданного поля внешних источников $\mathbf{H}^0(x, y, z) = \{H_x^0(x, y, z), H_y^0(x, y, z), H_z^0(x, y, z)\}$:

$$a_n^{(01)}(z) = h_n \int_{-\pi}^{\pi} [H_x^0(R \cos \varphi, R \sin \varphi, lz + d) \cos \varphi + H_y^0(R \cos \varphi, R \sin \varphi, lz + d) \sin \varphi] \cos n\varphi \, d\varphi; \quad (18)$$

$$a_n^{(02)}(r) = -h_n \int_{-\pi}^{\pi} H_z^0(Rr \cos \varphi, Rr \sin \varphi, d) \cos n\varphi \, d\varphi; \quad (19)$$

$$a_n^{(03)}(r) = h_n \int_{-\pi}^{\pi} H_z^0(Rr \cos \varphi, Rr \sin \varphi, d + l) \cos n\varphi \, d\varphi; \quad (20)$$

$$b_n^{(01)}(z) = h_n \int_{-\pi}^{\pi} [H_x^0(R \cos \varphi, R \sin \varphi, lz + d) \cos \varphi + H_y^0(R \cos \varphi, R \sin \varphi, lz + d) \sin \varphi] \sin n\varphi \, d\varphi; \quad (21)$$

$$b_n^{(02)}(r) = -h_n \int_{-\pi}^{\pi} H_z^0(Rr \cos \varphi, Rr \sin \varphi, d) \sin n\varphi \, d\varphi; \quad (22)$$

$$b_n^{(03)}(r) = h_n \int_{-\pi}^{\pi} H_z^0(Rr \cos \varphi, Rr \sin \varphi, d + l) \sin n\varphi \, d\varphi. \quad (23)$$

В формулах (18)—(23):

$$z, r \in (0, 1), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad h_0 := 1/2\pi, \quad h_n := 1/\pi, \quad n = 1, 2, \dots; \quad (24)$$

В часто встречаемом случае постоянного в окрестности цилиндра внешнего поля $\mathbf{H}^0 = \{H_x^0, H_y^0, H_z^0\} = \text{const}$ формулы (18)—(23) очевидным образом упрощаются:

$$a_0^{(01)} = 0, \quad a_1^{(01)} = H_x^0, \quad b_1^{(01)} = H_y^0, \quad a_n^{(01)} = b_n^{(01)} = 0, \quad n = 2, 3, \dots; \quad (25)$$

$$a_0^{(02)} = -H_z^0, \quad a_0^{(03)} = H_z^0, \quad a_n^{(02)} = b_n^{(02)} = a_n^{(03)} = b_n^{(03)} = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots;$$

$$a_0^{(03)} = H_z^0, \quad a_n^{(02)} = b_n^{(02)} = a_n^{(03)} = b_n^{(03)} = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (26)$$

Следовательно, для $n = 2, 3, \dots$ системы (12)—(14) и (15)—(17) являются однородными с нулевыми решениями соответственно, а потому в формулах напряженности поля реакции (4)—(6) ненулевыми могут быть только функции $\{a_0^{(1)}(z), a_0^{(2)}(r), a_0^{(3)}(r)\}$ — решение системы (14)—(16) для $n = 0$, $\{a_1^{(1)}(z), a_1^{(2)}(r), a_1^{(3)}(r)\}$ — решение этой системы для $n = 1$; $\{b_1^{(1)}(z), b_1^{(2)}(r), b_1^{(3)}(r)\}$ — решение системы (17)—(19) для $n = 1$ с правыми частями в соответствии с (25), (26). Таким образом, в случае $\mathbf{H}^0 = \text{const}$ ряды в формулах напряженности (4)—(6) обрываются на первом или втором слагаемом.

Для расчета декартовых координат поля реакции $\mathbf{H}^R(\mathbf{r})$ в точках $\mathbf{r} = (0, 0, z)$ на оси цилиндра (внутри или вне его, т.е. z либо внутри интервала $(d, d + l)$, либо вне отрезка $[d, d + l]$), помещенного в произвольное внешнее поле $\mathbf{H}^0(\mathbf{r})$, в работе [2] получены следующие расчетные формулы:

$$H_x^R(0, 0, z) = -\frac{\mu-1}{4} \left\{ t \int_0^1 a_1^{(1)}(z') [1 + (\bar{z} - tz')^2]^{-3/2} dz' + \int_0^1 a_1^{(2)}(r') r'^2 (r'^2 + \bar{z}^2)^{-3/2} dr' + \int_0^1 a_1^{(3)}(r') r'^2 [r'^2 + (\bar{z} - t)^2]^{-3/2} dr' \right\}; \quad (27)$$

$$H_y^R(0, 0, z) = -\frac{\mu-1}{4} \left\{ t \int_0^1 b_1^{(1)}(z') [1 + (\bar{z} - tz')^2]^{-3/2} dz' + \int_0^1 b_1^{(2)}(r') r'^2 (r'^2 + \bar{z}^2)^{-3/2} dr' + \int_0^1 b_1^{(3)}(r') r'^2 [r'^2 + (\bar{z} - t)^2]^{-3/2} dr' \right\}; \quad (28)$$

$$H_z^R(0, 0, z) = \frac{\mu-1}{2} \left\{ t \int_0^1 a_0^{(1)}(z') (\bar{z} - t \cdot z') [1 + (\bar{z} - tz')^2]^{-3/2} dz' + \bar{z} \int_0^1 a_0^{(2)}(r') r' (r'^2 + \bar{z}^2)^{-3/2} dr' + (\bar{z} - t) \int_0^1 a_0^{(3)}(r') r' [r'^2 + (\bar{z} - t)^2]^{-3/2} dr' \right\}, \quad (29)$$

где функции $\{a_0^{(1)}(z), a_0^{(2)}(r), a_0^{(3)}(r)\}$, $\{a_1^{(1)}(z), a_1^{(2)}(r), a_1^{(3)}(r)\}$, $\{b_1^{(1)}(z), b_1^{(2)}(r), b_1^{(3)}(r)\}$ суть решения систем (14)—(16) и (17)—(19) с правыми частями (18)—(23) с соответствующим значением n .

3. НАПРЯЖЕННОСТЬ ПОЛЯ РЕАКЦИИ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО ЦИЛИНДРА

Полубесконечным цилиндром мы считаем предельную форму конечного цилиндра, нижнее основание которого S_2 остается в плоскости $z = d$, а длина $l \rightarrow +\infty$. Для получения формул напряженности поля реакции полубесконечного цилиндра необходимо перейти к пределу $l \rightarrow +\infty$ (эквивалентно $t = l/R \rightarrow +\infty$) в формулах конечного цилиндра (4)—(6), (12)—(23), (27)—(29). Однако некоторые определенные интегралы по отрезку $[0, 1]$ в этих формулах являются несобственными (второго рода — от неограниченных функций), что делает невозможным непосредственный переход к такому пределу под знаком интеграла. Опишем неоднократно используемый в дальнейшем прием (назовем его «прием (*)»), позволяющий для вычисления такого предела выразить несобственный интеграл через собственный. Этот прием также неоднократно применялся в программной реализации предлагаемого алгоритма, поскольку стандартные квадратурные формулы могут применяться только к собственным интегралам.

Прием (*). Пусть имеется несобственный интеграл второго рода $\int_0^1 g(x)f(x)dx$, причем функция $g(x)$ достаточно гладкая на $[0, 1]$, а $f(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow b \in [0, 1]$ (но эта особенность интегрируемая). Тогда, вычитая и добавляя $g(b)$, получаем:

$$\int_0^1 g(x)f(x)dx = \int_0^1 [g(x) - g(b)]f(x)dx + g(b) \int_0^1 f(x)dx. \quad (30)$$

Первый интеграл в правой части (30) является собственным, поскольку подынтегральное выражение можно представить в виде $[(g(x) - g(b))/(x - b)](x - b)f(x)$, и при $x \rightarrow b$ дробь имеет пределом конечную производную $g'(b)$, а $(x - b)f(x) \rightarrow 0$, так как особенность в $f(x)$ интегрируема. Что касается несобственного интеграла $\int_0^1 f(x)dx$ в правой части (30), то либо он может быть вычислен аналитически, либо, в противном случае, выделением порядка особенности в $f(x)$ подбирается простая (в смысле аналитической интегрируемости) функция $p(x)$, такая, что $f(x) = p(x) + O(1)$ при $x \rightarrow b$. Тогда

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (f(x) - p(x)) dx + \int_0^1 p(x) dx, \quad (31)$$

причем первый интеграл в правой части особенности не имеет, а второй вычисляется аналитически.

Для получения формул напряженности поля реакции для полубесконечного цилиндра необходимо в аналогичных формулах (4)—(6) для конечного цилиндра перейти к пределу $l \rightarrow +\infty$. Прежде всего получим «предельный» вид функций $\{a_n^{(1)}(z), a_n^{(2)}(r), a_n^{(3)}(r)\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{b_n^{(1)}(z), b_n^{(2)}(r), b_n^{(3)}(r)\}_{n=1}^{\infty}$ в этих формулах как решение «предельных» систем, полученных переходом к пределу $l \rightarrow +\infty$ в правых и левых частях систем (12)—(14) и (15)—(17). Непосредственный переход к такому пределу под знаком первого интеграла в левой части (12) невозможен, так как его ядро имеет логарифмическую (интегрируемую) особенность при $z' = z$, а именно, используя асимптотические формулы для присоединенных функций Лежандра [10], можно показать, что для всех $n = 0, 1, 2, \dots$ при $q \rightarrow 0$:

$$\alpha_n(1, 1, q) = -\frac{1}{4\pi^{3/2}}(\ln|q| - D_n) + O(q \ln|q|), \quad D_n := \ln 8 - 2\left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2n+1}\right) - 1.$$

Применяя к этому интегралу прием (*), в котором переменная интегрирования $x = z'$, $b = z$, $g(x) = a_n^{(1)}(x)$, $f(x) = t\alpha_n(1, 1, t(z-x))$, можно получить с учетом асимптотики:

$$\alpha_n(a, b, q) = O(1/q^3), \quad \alpha_n(a, b, q) = O(1/q^{2n+1}), \quad q \rightarrow \infty, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (32)$$

что при $t \rightarrow +\infty$ в выражении (30) первое слагаемое в правой части имеет пределом ноль, а второе слагаемое имеет пределом $A_n a_n^{(1)}(z)$, где числа:

$$A_n := 2 \int_0^{+\infty} \alpha_n(1, 1, x) dx, \quad A_0 = 0, 282095299 \dots, \quad A_1 = A_2 = \dots = 0. \quad (33)$$

Второй и третий интеграл в (12) особенностей не имеют, поэтому с учетом асимптотики (32) можно показать, что эти интегралы имеют пределом ноль при $t \rightarrow +\infty$. При переходе к пределу $t \rightarrow +\infty$ в левых частях уравнений (13) и (14) оба слагаемых в квадратных скобках этих уравнений, содержащих интегралы без особенностей, имеют пределом ноль, что легко получить, учитывая асимптотику $\gamma_n(a, b, q) = O(1/q^{2n+2})$, $q \rightarrow \infty$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Переходя в формулах (18)—(20) к пределу $t \rightarrow +\infty$, имеем следующие предельные значения параметров, входящих в правые части системы (12)—(14):

$$a_n^{(01)}(z) = h_n \int_{-\pi}^{\pi} \left[H_x^0(R \cos \varphi, R \sin \varphi, +\infty) \cos \varphi + H_y^0(R \cos \varphi, R \sin \varphi, +\infty) \sin \varphi \right] \cos n\varphi d\varphi; \quad (34)$$

$$a_n^{(02)}(r) = -h_n \int_{-\pi}^{\pi} H_z^0(Rr \cos \varphi, Rr \sin \varphi, d) \cos n\varphi d\varphi; \quad (35)$$

$$a_n^{(03)}(r) = h_n \int_{-\pi}^{\pi} H_z^0(Rr \cos \varphi, Rr \sin \varphi, +\infty) \cos n\varphi d\varphi, \quad (36)$$

где введено обозначение $f(x, y, +\infty) := \lim_{z \rightarrow +\infty} f(x, y, z)$. Учитывая изложенное выше, получаем следующий предельный ($l \rightarrow +\infty$) вид системы (12)—(14) для случая полубесконечного цилиндра:

$$a_n^{(1)}(z) - 2\lambda\sqrt{\pi}A_n a_n^{(1)}(z) = \frac{2}{\mu+1} a_n^{(01)}(z); \quad (37)$$

$$a_n^{(2)}(r) = \frac{2}{\mu+1} a_n^{(02)}(r), \quad a_n^{(3)}(r) = \frac{2}{\mu+1} a_n^{(03)}(r). \quad (38)$$

Из (37) получаем:

$$a_n^{(1)}(z) = \frac{2}{(\mu + 1)(1 - 2\lambda\sqrt{\pi}A_n)} a_n^{(01)}(z). \quad (39)$$

Таким образом, (39) и (38) суть решение предельных систем (полученных из (12)—(14) при $l \rightarrow +\infty$), где в правых частях стоят функции (34)—(36), $n = 0, 1, 2, \dots$. Аналогично, решение предельных систем, полученных из (15)—(17) при $l \rightarrow +\infty$, с учетом (33) имеет вид:

$$b_n^{(1)}(z) = \frac{2}{(\mu + 1)(1 - 2\lambda\sqrt{\pi}A_n)} b_n^{(01)}(z); \quad (40)$$

$$b_n^{(2)}(r) = \frac{2}{\mu + 1} b_n^{(02)}(r), \quad b_n^{(3)}(r) = \frac{2}{\mu + 1} b_n^{(03)}(r), \quad (41)$$

где в правых частях стоят функции ($n = 1, 2, \dots$):

$$b_n^{(01)}(z) = h_n \int_{-\pi}^{\pi} [H_x^0(R \cos \varphi, R \sin \varphi, +\infty) \cos \varphi + H_y^0(R \cos \varphi, R \sin \varphi, +\infty) \sin \varphi] \sin n\varphi \, d\varphi; \quad (42)$$

$$b_n^{(02)}(r) = -h_n \int_{-\pi}^{\pi} H_z^0(Rr \cos \varphi, Rr \sin \varphi, d) \sin n\varphi \, d\varphi; \quad (43)$$

$$b_n^{(03)}(r) = h_n \int_{-\pi}^{\pi} H_z^0(Rr \cos \varphi, Rr \sin \varphi, +\infty) \sin n\varphi \, d\varphi. \quad (44)$$

В случае постоянного в окрестности цилиндра внешнего поля $\mathbf{H}^0 = \{H_x^0, H_y^0, H_z^0\} = \text{const}$ формулы (34)—(36) и (42)—(44) снова переходят в простые формулы (25), (26), подстановка которых в (38), (39) и (40), (41) дает следующие решения предельных систем для полубесконечного цилиндра:

$$a_0^{(1)}(z) = 0, \quad a_0^{(2)}(r) = -\frac{2}{\mu + 1} H_z^0, \quad a_0^{(3)}(r) = \frac{2}{\mu + 1} H_z^0, \quad a_1^{(1)}(z) = \frac{2}{(\mu + 1)} H_x^0; \quad (45)$$

$$a_1^{(2)}(r) = a_1^{(3)}(r) = 0, \quad a_n^{(1)}(z) = a_n^{(2)}(r) = a_n^{(3)}(r) = 0, \quad n = 2, 3, \dots; \quad (46)$$

$$b_1^{(1)}(z) = \frac{2}{(\mu + 1)} H_y^0, \quad b_1^{(2)}(r) = b_1^{(3)}(r) = 0; \quad (47)$$

$$b_n^{(1)}(z) = b_n^{(2)}(r) = b_n^{(3)}(r) = 0, \quad n = 2, 3, \dots \quad (48)$$

Получим формулы для поля реакции на оси полубесконечного цилиндра, переходя к пределу $t_1 \rightarrow +\infty$ в формулах (27)—(29). При переходе к пределу в первом слагаемом $\int_0^1 a_1^{(1)}(z') t [1 + (\bar{z} - tz')^2]^{-3/2} dz'$ в фигурной скобке (27) ядро $t [1 + (\bar{z} - tz')^2]^{-3/2}$ на левом конце отрезка интегрирования $z' = 0$ имеет пределом бесконечность при $t \rightarrow +\infty$, а потому формальный переход к пределу под знаком интеграла некорректен. Поэтому к этому интегралу применяем формулу (30) приема (*), где $x = z'$, $b = 0$, $g(x) = a_n^{(1)}(x)$, $f(x) = t [1 + (\bar{z} - tx)^2]^{-3/2}$. Тогда первый интеграл в (30) является собственным, подынтегральное выражение в котором при $t \rightarrow +\infty$ равномерно идет к нулю, а второй интеграл легко вычисляется аналитически с последующим переходом к пределу $t \rightarrow +\infty$. Второй интеграл правой части (27) от t не зависит, а третий интеграл является собственным, подынтегральное выражение в котором при $t \rightarrow +\infty$ равномерно идет к нулю. Учитывая вышеизложенное и (38), (39), получаем из (27) формулу для вычисления x -компоненты поля реакции на оси полубесконечного цилиндра:

$$H_x^R(0, 0, z) = -\frac{\lambda}{2} \left\{ a_1^{(01)}(0) \left(1 + \frac{\bar{z}}{\sqrt{1+\bar{z}^2}} \right) + \int_0^1 \frac{a_1^{(02)}(r') r'^2 dr'}{[r'^2 + \bar{z}^2]^{3/2}} \right\}. \quad (49)$$

Аналогично получаем из (28) формулу для вычисления y -компоненты поля реакции на оси полубесконечного цилиндра:

$$H_y^R(0, 0, z) = -\frac{\lambda}{2} \left\{ b_1^{(01)}(0) \left(1 + \frac{\bar{z}}{\sqrt{1+\bar{z}^2}} \right) + \int_0^1 \frac{b_1^{(02)}(r') r'^2 dr'}{[r'^2 + \bar{z}^2]^{3/2}} \right\}. \quad (50)$$

Переход к пределу $t \rightarrow +\infty$ в формуле (29) для $H_z^R(0, 0, z)$ проводится по той же схеме, что и переход к этому пределу в (27) для $H_x^R(0, 0, z)$: предел первого слагаемого в фигурных скобках (29) считается с использованием приема (*), второе слагаемое от t не зависит, а третье имеет пределом ноль. Получаем:

$$H_z^R(0, 0, z) = -\lambda \left\{ \frac{a_0^{(01)}(0)/\sqrt{1+\bar{z}^2}}{1-2\lambda\sqrt{\pi}A_0} - \bar{z} \int_0^1 \frac{a_0^{(02)}(r') r' dr'}{[r'^2 + \bar{z}^2]^{3/2}} \right\}. \quad (51)$$

Таким образом, компоненты поля реакции на оси полубесконечного цилиндра внутри и вне его (но не на его поверхности: $z \neq d$, т.е. $\bar{z} \neq 0$), помещенного в произвольное внешнее поле, вычисляются по формулам (49)—(51), где входящие в них функции определяются формулами (34), (35), (42), (43). В случае постоянного в области цилиндра поля $\mathbf{H}^0 = \{H_x^0, H_y^0, H_z^0\} = \text{const}$ подстановка в (49)—(51) соответствующих этому случаю значений (25), (26) дает следующие простые формулы для поля реакции на оси цилиндра:

$$H_x^R(0, 0, z) = -\frac{\lambda}{2} H_x^0 \left(1 + \frac{\bar{z}}{\sqrt{\bar{z}^2 + 1}} \right); \quad H_y^R(0, 0, z) = -\frac{\lambda}{2} H_y^0 \left(1 + \frac{\bar{z}}{\sqrt{\bar{z}^2 + 1}} \right); \quad (52)$$

$$H_z^R(0, 0, z) = -\lambda H_z^0 \left(\text{sgn}(\bar{z}) - \frac{\bar{z}}{\sqrt{\bar{z}^2 + 1}} \right), \quad \text{sgn}(x) := \frac{x}{|x|}. \quad (53)$$

В ходе тестовых расчетов поля реакции от однородного цилиндра конечной длины по общим формулам (4)—(6), (12)—(17) и (27)—(29) выявили существенные недостатки численной реализации расчетов по этим формулам в подходе [3], основанном на дискретизации входящих в эти формулы интегралов квадратурной формулой средних прямоугольников (1), (2) с равномерным распределением узлов интегрирования. Оказалось, что этот подход дает большую погрешность результата в случае достаточно длинных цилиндров, что привело к необходимости получения для этого случая более простых и более точных асимптотических формул расчета поля реакции, что и реализовано в настоящей работе. Поясним на примере использования формулы (27) для расчета x -компоненты $H_x^R(0, 0, z)$ поля реакции на оси конечного цилиндра в случае постоянного внешнего поля. По логике вещей при увеличении длины цилиндра результаты расчета по этой формуле должны приближаться к результатам расчета по соответствующей асимптотической формуле (52). Однако этого не происходило, более того, при увеличении длины цилиндра результаты расчетов по (27) все более расходились с результатом по (52). Численные эксперименты и более глубокий анализ формулы (27) выявил следующую причину такого явления. При увеличении длины цилиндра $l \rightarrow \infty$ (т.е. $t \rightarrow \infty$) последние два интеграла в (27) стремятся к нулю, а потому основной вклад в $H_x^R(0, 0, z)$ вносит первый интеграл: $\int_0^1 a_1^{(1)}(x) t / [1 + (tx - \bar{z})^2]^{3/2} dz'$. В нем при $l \rightarrow \infty$ по (45) будет $a_1^{(1)}(z') \rightarrow 2H_x^0 / (\mu + 1) = \text{const}$, поэтому особенности при приближенном вычислении этого интеграла квадратурными формулами определяются особенностями поведения его ядра $f_t(x) := t / [1 + (tx - \bar{z})^2]^{3/2}$ на отрезке интегрирования $[0, 1]$. А особенности эти таковы, что при больших $t = l/R$ ($t \rightarrow \infty$) данная функция почти на всем отрезке интегрирования принимает практически нулевые значения, однако имеет очень большой всплеск на очень узком отрезке с началом в нуле (чем больше t , тем уже этот отрезок и тем выше всплеск). А потому при использовании для

приближенного вычисления этого интеграла квадратурных формул (1), (2) с равноотстоящими узлами при больших t основная масса узлов попадает на «нулевой» участок, а на «несущий» узкий участок попадает один-два (иногда ни одного) узла, а потому интеграл получается практически нулевым, что не соответствует его истинному значению. Чтобы при описанной методике в узкий «несущий» интервал попало достаточно много узлов, надо брать большое число разбиений отрезка интегрирования m . Но тогда возникающая в методике работы [3] система линейных уравнений при дискретизации системы интегральных уравнений (12)—(17) оказывается очень большого порядка $3m$. Это приводит к проблеме с объемом компьютерной памяти и увеличению времени расчетов, а, главное, к неприемлемому увеличению числа обусловленности системы, что ведет к низкой точности ее решения.

Получим формулы напряженности поля реакции полубесконечного цилиндра (вне и внутри, но не на его поверхности и не на оси), для чего перейдем к пределу $l \rightarrow +\infty$ (т.е. $t = l/R \rightarrow +\infty$) в формулах (4)—(6) для напряженности поля реакции конечного цилиндра. Функции $\{a_n^{(1)}(z), a_n^{(2)}(r), a_n^{(3)}(r)\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{b_n^{(1)}(z), b_n^{(2)}(r), b_n^{(3)}(r)\}_{n=1}^{\infty}$ в этих формулах заменяются полученными их предельными значениями (38), (39), (34)—(36), (40)—(44). Рассмотрим предельные переходы в самих интегралах, входящих в эти формулы. В первом интеграле $\int_0^1 a_n^{(1)}(z') t \alpha_n(\bar{r}, 1, \bar{z} - tz') dz'$ формулы (4) нельзя непосредственно переходить к пределу $t \rightarrow +\infty$, так как его ядро $t \alpha_n(\bar{r}, 1, \bar{z} - tz')$ имеет особенность на левом конце отрезка интегрирования $z' = 0$ (неограниченно возрастает при $t \rightarrow +\infty$), которая выделяется приемом (*). По (30) получаем:

$$\int_0^1 [a_n^{(1)}(z') - a_n^{(1)}(0)] t \alpha_n(\bar{r}, 1, \bar{z} - tz') dz' + a_n^{(1)}(0) \int_0^1 t \alpha_n(\bar{r}, 1, \bar{z} - tz') dz'. \quad (54)$$

Учитывая асимптотическое поведение присоединенных функций Лежандра [10], можно доказать следующую асимптотическую формулу при $q \rightarrow +\infty$:

$$\alpha_n(a, b, q) = \frac{b(4ab)^n p_n}{a} \left[-\frac{n}{q^{2n+1}} + \frac{(2n^2 + 5n + 2)a^2 + (2n^2 + n)b^2}{2q^{2n+3}} \right] + O\left(\frac{1}{q^{2n+5}}\right); \quad (55)$$

$$p_n := \frac{2n-1}{32\pi^2 \Gamma(n-\frac{1}{2})} \left[\Gamma\left(\frac{n}{2} - \frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{4}\right) \right]^2, \quad n = 0, 1, 2 \dots$$

Из представления (55) следует, что ядро $t \alpha_n(\bar{r}, 1, \bar{z} - tz')$ первого интеграла в (54) при $t \rightarrow +\infty$ стремится к нулю не медленнее, чем $1/t^2$, чем обеспечивает его сходимость к нулю, делая нулевым предел первого слагаемого в (54). Интеграл во втором слагаемом заменой переменной интегрирования сводится к $\int_{-\bar{z}}^{t-\bar{z}} \alpha_n(\bar{r}, 1, x) dx$, а потому при $t \rightarrow +\infty$ имеет пределом $\int_{-\bar{z}}^{+\infty} \alpha_n(\bar{r}, 1, x) dx$. Ядро второго интеграла в (4) вообще от t не зависит, а ядро третьего интеграла в силу (55) идет к нулю не медленнее, чем $1/t^3$, зануляя в пределе весь интеграл. Следующие три интеграла в (4) совершенно аналогичны первым трем, разобранным выше. Таким образом, переходя к пределу $t \rightarrow +\infty$ в формуле (4) с учетом вышесказанного и формул (38), (39), (34)—(36), (40)—(44), получаем формулу для цилиндрической r -компоненты поля реакции полубесконечного цилиндра в произвольной точке, не лежащей на поверхности цилиндра или на его оси, при произвольном внешнем поле $\mathbf{H}^0(x, y, z) = \{H_x^0(x, y, z), H_y^0(x, y, z), H_z^0(x, y, z)\}$:

$$H_r^R(r, \varphi, z) = 2\sqrt{\pi}\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \cos n\varphi \left[\frac{a_n^{(01)}(0)}{1 - 2\sqrt{\pi}\lambda A_n} \int_{-\bar{z}}^{+\infty} \alpha_n(\bar{r}, 1, x) dx + \int_0^1 a_n^{(02)}(r') \alpha_n(\bar{r}, r', \bar{z}) dr' \right] + \sin n\varphi \left[\frac{b_n^{(01)}(0)}{1 - 2\sqrt{\pi}\lambda A_n} \int_{-\bar{z}}^{+\infty} \alpha_n(\bar{r}, 1, x) dx + \int_0^1 b_n^{(02)}(r') \alpha_n(\bar{r}, r', \bar{z}) dr' \right] \right\}. \quad (56)$$

Аналогичные рассуждения о вычислении предела $t \rightarrow +\infty$ в (5), (6) дают формулы для остальных двух компонент поля реакции полубесконечного цилиндра:

$$H_{\varphi}^R(r, \varphi, z) = -2\sqrt{\pi\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \cos n\varphi \left[\frac{b_n^{(01)}(0)}{1-2\sqrt{\pi\lambda}A_n} \int_{-\bar{z}}^{+\infty} \beta_n(\bar{r}, 1, x) dx + \int_0^1 b_n^{(02)}(r') \beta_n(\bar{r}, r', \bar{z}) dr' \right] - \right. \\ \left. - \sin n\varphi \left[\frac{a_n^{(01)}(0)}{1-2\sqrt{\pi\lambda}A_n} \int_{-\bar{z}}^{+\infty} \beta_n(\bar{r}, 1, x) dx + \int_0^1 a_n^{(02)}(r') \beta_n(\bar{r}, r', \bar{z}) dr' \right] \right\}; \quad (57)$$

$$H_z^R(r, \varphi, z) = 2\sqrt{\pi\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \cos n\varphi \left[-\frac{a_n^{(01)}(0)}{1-2\sqrt{\pi\lambda}A_n} \int_{\bar{z}}^{+\infty} \gamma_n(\bar{r}, 1, x) dx + \int_0^1 a_n^{(02)}(r') \gamma_n(\bar{r}, r', \bar{z}) dr' \right] + \right. \\ \left. + \sin n\varphi \left[-\frac{b_n^{(01)}(0)}{1-2\sqrt{\pi\lambda}A_n} \int_{\bar{z}}^{+\infty} \gamma_n(\bar{r}, 1, x) dx + \int_0^1 b_n^{(02)}(r') \gamma_n(\bar{r}, r', \bar{z}) dr' \right] \right\}. \quad (58)$$

В формулах (56)—(58) $\bar{r} = r/R$, $\bar{z} = (z-d)/R$, $\lambda = (\mu-1)/(\mu+1)$, числа A_n считаются по (33), $a_n^{(01)}$, $a_n^{(02)}$, $b_n^{(01)}$, $b_n^{(02)}$ — по формулам (34), (35), (42), (43).

Для постоянного внешнего поля $\mathbf{H}^0 = \{H_x^0, H_y^0, H_z^0\} = \text{const}$ формулы напряженности поля реакции полубесконечного цилиндра (56) – (58) с учетом (25), (26) упрощаются следующим образом:

$$H_r^R(r, \varphi, z) = 2\sqrt{\pi\lambda} \left[-H_z^0 \int_0^1 \alpha_0(\bar{r}, x, \bar{z}) dx + H_r^0 \int_{-\bar{z}}^{+\infty} \alpha_1(\bar{r}, 1, x) dx \right]; \quad (59)$$

$$H_{\varphi}^R(r, \varphi, z) = -2\sqrt{\pi\lambda} H_{\varphi}^0 \int_{-\bar{z}}^{+\infty} \beta_1(\bar{r}, 1, x) dx; \quad (60)$$

$$H_z^R(r, \varphi, z) = -2\sqrt{\pi\lambda} \left[H_z^0 \operatorname{sgn}(\bar{z}) \int_0^1 \gamma_0(\bar{r}, x, |\bar{z}|) dx + H_r^0 \int_{|\bar{z}|}^{+\infty} \gamma_1(\bar{r}, 1, x) dx \right], \quad (61)$$

где цилиндрические компоненты напряженности внешнего поля $H_r^0 = H_x^0 \cos \varphi + H_y^0 \sin \varphi$, $H_{\varphi}^0 = -H_x^0 \sin \varphi + H_y^0 \cos \varphi$.

4. ПРОВЕРКА ПОЛУЧЕННЫХ ФОРМУЛ НА ИЗВЕСТНЫХ ПРЕДЕЛЬНЫХ СЛУЧАЯХ

В виду сложности и объемности аналитических преобразований, приведших к получению приведенных выше формул для напряженности поля реакции однородного полубесконечного цилиндра, помещенного в произвольное внешнее магнитное поле, важное значение приобретает проверка этих формул на их соответствие известным физическим законам, а также известным аналитическим формулам для предельных случаев рассматриваемой формы полубесконечного цилиндра (бесконечно длинный цилиндр, магнитное полупространство). Для указанной проверки была составлена на языке фортран соответствующая программа, реализующая расчеты по полученным формулам. Сразу отметим, что все описанные ниже виды тестирования пройдены успешно.

В точках границы S магнетика для нормальной составляющей H_n напряженности результирующего поля $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}^0(\mathbf{r}) + \mathbf{H}^R(\mathbf{r})$ должно выполняться:

$$\frac{H_n^{(e)}}{H_n^{(i)}} = \mu, \quad (62)$$

где $H_n^{(e)}$ и $H_n^{(i)}$ суть предельные значения H_n на поверхности S извне и изнутри магнетика соответственно [11]. На основании полубесконечного цилиндра нормальная составляющая H_n совпадает с обратной z -компонентой напряженности, поэтому (62) имеет вид:

$$\frac{H_z^{(e)}}{H_z^{(i)}} = \mu. \quad (63)$$

Выполнение равенства (63) было проверено аналитически в точке центра основания полубесконечного цилиндра с декартовыми координатами $(0, 0, d)$ как для формулы (53), выражающей $H_z^R(0, 0, z)$ на оси цилиндра в постоянном внешнем поле, так и для формулы (51) для $H_z^R(0, 0, z)$ в случае произвольного внешнего поля. Выполнение (63) в остальных точках основания полубесконечного цилиндра проверялось расчетами по упомянутой компьютерной программе для формулы (61), выражающей компоненту H_z^R в произвольной точке пространства (не на поверхности цилиндра и не на его оси) в случае постоянного внешнего поля.

На боковой поверхности полубесконечного цилиндра нормальная составляющая H_n совпадает с r -компонентой напряженности, поэтому (62) имеет вид:

$$\frac{H_r^{(e)}}{H_r^{(i)}} = \mu. \quad (64)$$

Выполнение (64) в различных точках боковой поверхности полубесконечного цилиндра проверялось компьютерными расчетами для формулы (59), выражающей компоненту H_r^R в произвольной точке пространства (не на поверхности цилиндра и не на его оси) в случае постоянного внешнего поля.

Следующая проверка основывалась на том, что при безграничном увеличении радиуса основания полубесконечного цилиндра ($R \rightarrow \infty$) получается однородное магнитное полупространство, для которого, в случае его погружения в постоянное внешнее поле $\mathbf{H}^0 = \{H_x^0, H_y^0, H_z^0\}$, известны аналитические формулы для напряженности результирующего поля [12]: внутри и вне полупространства $H_x = H_x^0, H_y = H_y^0$; внутри полупространства $H_z = 2H_z^0/(\mu + 1)$, а вне его $H_z = 2\mu H_z^0/(\mu + 1)$. Приближенное выполнение этих соотношений для больших значений радиуса R основания полубесконечного цилиндра проверялось компьютерными расчетами по формулам (59)—(61) для вычисления напряженности поля реакции такого цилиндра, погруженного в постоянное внешнее поле.

Заключительная проверка полученных формул основана на том, что при значительном удалении точки расчета напряженности от плоскости основания полубесконечного цилиндра (ее координата $z \rightarrow +\infty$) значение напряженности поля реакции в ней (вне или внутри цилиндра) должно приближаться к значению в этой точке напряженности поля реакции для бесконечного в обе стороны цилиндра, формулы для которой в случае постоянного внешнего поля $\mathbf{H}^0 = \{H_x^0, H_y^0, H_z^0\}$ известны [13, с. 209; 11, с. 339; 14, с. 245], а именно, в точке с цилиндрическими координатами (r, φ, z) внутри или вне такого цилиндра выполнено: $H_r^R(r, \varphi, z) = -\lambda H_r^0, r < R; H_r^R(r, \varphi, z) = \lambda H_r^0/\bar{r}^2, r > R; H_\varphi^R(r, \varphi, z) = -\lambda H_\varphi^0, r < R; H_\varphi^R(r, \varphi, z) = -\lambda H_\varphi^0/\bar{r}^2, r > R; H_z^R(r, \varphi, z) = 0, r < R$ или $r > R$. Справедливость этого для формул напряженности поля реакции на оси цилиндра (52), (53) легко проверяется непосредственно аналитически, а для формул напряженности поля реакции в произвольной (не на оси или поверхности цилиндра) точке пространства (59)—(61) проверялась с помощью упомянутой компьютерной программы.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Кратко сформулируем основные результаты, полученные в настоящей работе.

1. Выяснены причины потери точности вычисления по алгоритму, предложенному в [3], напряженности магнитного поля реакции однородного цилиндра в случае большой его длины.
2. Для указанного случая получены эффективные асимптотические формулы расчета напряженности поля реакции полубесконечного цилиндра, погруженного в произвольное внешнее магнитное поле.
3. Составлена реализующая предложенный подход компьютерная программа (на языке фортран), работающая на бытовом компьютере быстро (несколько секунд расчета в одной точке) и не требующая больших ресурсов памяти.
4. Проведено тестирование полученных формул и компьютерной реализации соответствующего алгоритма, состоящее в проверке результатов расчета на соответствие физическим законам явления, а также сравнение этих результатов в предельных частных случаях формы магнетика с известными аналитическими ответами.

Работа выполнена в рамках государственного задания по теме «Квант» (“Quantum”) № АААА-А18-118020190095-4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дякин В.В., Кудряшова О.В., Раевский В.Я. О проблемах использования пакетов универсальных программ для решения задач магнитостатики // Дефектоскопия. 2018. № 11. С. 23—34.
2. Dyakin V.V., Kudryashova O.V., Raevskii V.Ya. One Approach to the Numerical Solution of the Basic Equation of Magnetostatics for a Finite Cylinder in an Arbitrary External Field // Russian Journal of Nondestructive Testing. 2021. V. 57. No. 4. P. 291—302. [Дякин В.В., Кудряшова О.В., Раевский В.Я. Один подход к численному решению основного уравнения магнитостатики для конечного цилиндра в произвольном внешнем поле // Дефектоскопия. 2021. № 4. С. 22—34.]
3. Dyakin V.V., Kudryashova O.V., Raevskii V.Ya. Calculating the Strength of Magnetic Field from a Homogeneous Cylinder of Finite Dimensions Placed in an Arbitrary External Field // Russian Journal of Nondestructive Testing. 2022. V. 58. No. 4. P. 308—319. [Дякин В.В., Кудряшова О.В., Раевский В.Я. Расчет напряженности магнитного поля от однородного цилиндра конечных размеров, помещенного в произвольное внешнее поле // Дефектоскопия. 2022. № 4. С. 63—74.]
4. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: Методы, алгоритмы, программы / Справочное пособие. Киев: Наукова думка, 1986. 544 с.
5. Хижняк Н.А. Интегральные уравнения макроскопической электродинамики. Киев: Наукова думка, 1986. 280 с.
6. Дякин В.В. Математические основы классической магнитостатики. Екатеринбург: РИО УрО РАН, 2016. 404 с.
7. Friedman M.J. Mathematical study of the nonlinear singular integral magnetic field equation. 1 // SIAM Journal Appl. Math. 1980. V. 39. № 1. P. 14—20.
8. Friedman M.J. Mathematical Study of the Nonlinear Singular Integral Magnetic Field Equation. 2 // SIAM J. Numer. Anal. 1981. V. 18. N 4. P. 644—653.
9. Friedman M.J. Mathematical Study of the Nonlinear Singular Integral Magnetic Field Equation. 3 // SIAM J. Math. Anal. 1981. V. 12. N 4. P. 536—540.
10. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М.: Наука, 1973. 294 с.
11. Ахиезер А.И. Общая физика. Электрические и магнитные явления. Киев: Наукова думка, 1981. 471 с.
12. Дякин В.В., Умергалина О.В., Раевский В.Я. Поле конечного дефекта в трехмерном полупространстве // Дефектоскопия. 2005. № 8. С. 28—42.
13. Татур Т.А. Основы теории электромагнитного поля. М.: Высшая школа, 1989. 271 с.
14. Неразрушающий контроль и диагностика / Под ред. В.В. Клюева. М.: Машиностроение, 1995. 487 с.