ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 1, с. 4–13

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.984.52

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА С ИНВОЛЮЦИЕЙ

© 2021 г. Л. В. Крицков, В. Л. Иоффе

Изучены спектральные свойства задачи Коши для дифференциального оператора с инволюцией вида $-u''(x)+\alpha u''(-x)$ при α, удовлетворяющих неравенствам $0<|\alpha|<1$. На основании анализа спектра и построенной функции Грина показано, что если параметр $\varkappa=\sqrt{(1-\alpha)/(1+\alpha)}$ иррационален, то система корневых функций полна, но не является базисом в L_2. В противном же случае установлено, что корневые функции могут быть выбраны такими, чтобы они образовывали безусловный базис в L_2.

DOI: 10.31857/S0374064121010027

Введение. Работа посвящена изучению спектральной задачи

$$l_\alpha u(x)\equiv -u''(x)+\alpha u''(-x)=\lambda u(x),\quad -1<x<1, \tag{1}$$

$$u(-1)=u'(-1)=0. \tag{2}$$

Дифференциальная операция l_α при $\alpha\neq 0$ содержит в своей главной части простейшую инволюцию – отражение $\varphi(x)=-x$.

Дифференциальные уравнения с инволюцией составляют отдельный класс задач в теории функционально-дифференциальных уравнений. Алгебраические и аналитические аспекты таких задач достаточно хорошо освещены в монографиях [1–4]. Спектральные свойства соответствующих операторов и обратные задачи для них стали привлекать внимание специалистов в последнее время. Операторы первого порядка с инволюцией подробно изучены в [5–9]. Различные спектральные вопросы, относящиеся к операторам второго порядка с инволюцией, рассматривались, например, в [10–14]. Общий операторный подход к анализу дифференциальных операторов с инволюцией общего вида предложен в [15]. Можно также отметить работы, в которых изучаются смешанные задачи для уравнений в частных производных с инволюциями [16–20].

Исследование задач для дифференциальной операции (1) при $\alpha\neq 0$ требуют особого подхода, так как в выражении $l_\alpha u(x)$ слагаемые с инволюцией и без инволюции "конкурируют" между собой и их своеобразный резонанс может привести к появлению у таких задач новых спектральных свойств.

Так, у задачи для уравнения (1) с условиями $u(-1)=0$, $u'(-1)=u'(1)$ обнаружена неустойчивость спектральных свойств по отношению к малым изменениям параметра α на интервале $(-1,1)$ [21, 22]. Появление кратного спектра и бесконечного числа присоединённых функций на всюду плотном в $(-1,1)$ множестве значений параметра α относит эту задачу к классу существенно несамосопряжённых задач (в терминологии В.А. Ильина [23]). Позже было показано, что аналогичные свойства имеют место и для более общих краевых условий $u(-1)=\beta u(1)$, $u'(-1)=u'(1)$ [24, 25].

Задача (1), (2) представляет собой ещё одно семейство существенно несамосопряжённых задач с инволюцией, одно из отличий которой состоит в том, что невозмущённый инволюцией оператор (при $\alpha=0$) не имеет спектра. Хотя спектральные свойства здесь так же, как и в [21], зависят от значения параметра $\varkappa=\sqrt{(1-\alpha)/(1+\alpha)}$, они оказались несколько другими.

Для формулировки основного результата свяжем с рассматриваемой задачей (1), (2) линейный оператор $\mathcal{L}_\alpha$ в пространстве $L_2(-1,1)$, который определяется дифференциальным выражением l_α на области определения $\mathcal{D}(\mathcal{L}_\alpha)=\{u\in W_2^2(-1,1):u(-1)=u'(-1)=0\}$. Очевидно, что при $\alpha\neq\pm1$ оператор $\mathcal{L}_\alpha$ замкнут в $L_2(-1,1)$.

Исходя из структуры спектра оператора $\mathcal{L}_\alpha$ при α таких, что $0 < |\alpha| < 1$, в данной работе доказан следующий результат.

Основная теорема. *Система корневых функций оператора $\mathcal{L}_\alpha$ полна в $L_2(-1,1)$ при любом α, удовлетворяющим неравенствам $0 < |\alpha| < 1$. Если число $\varkappa$ иррационально, то эта система не образует базис в $L_2(-1,1)$. Если число $\varkappa$ рационально, то либо сами собственные функции оператора $\mathcal{L}_\alpha$ образуют безусловный базис в $L_2(-1,1)$, либо в системе корневых функций присоединённые функции могут быть выбраны такими, чтобы вся система образовывала безусловный базис в $L_2(-1,1)$.*

В дальнейшем изложении основная теорема разбита на четыре утверждения (теоремы 1–4), которые обосновываются последовательно.

1. Спектр оператора. Далее считаем, что α удовлетворяет неравенствам $0 < |\alpha| < 1$ и что $\varkappa = \sqrt{(1-\alpha)/(1+\alpha)}$. Будем в дальнейшем наряду с параметром $\lambda \in \mathbb{C}$ из уравнения (1) использовать спектральный параметр μ, связанный с λ равенством

$$\mu = \sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}, \quad \arg\mu \in (-\pi/2, \pi/2].$$

Используя линейно независимые решения $\cos(\mu x)$, $\sin(\varkappa\mu x)$ уравнения (1), нетрудно показать, что собственные значения $\lambda = (1-\alpha)\mu^2$ оператора $\mathcal{L}_\alpha$ определяются через корни уравнения

$$\Delta(\mu) \equiv \varkappa\cos(\varkappa\mu)\cos\mu + \sin(\varkappa\mu)\sin\mu = 0, \tag{3}$$

которое назовём характеристическим*).

Лемма 1. *Корни уравнения (3) при каждом $\varkappa \neq 1$ образуют счётное множество на комплексной плоскости, не имеющее конечных предельных точек и расположенное в некоторой полосе**) $|\operatorname{Im}\mu| \leqslant C$.*

Доказательство. Запишем характеристическое уравнение (3) в виде

$$\frac{\cos((1-\varkappa)\mu)}{1-\varkappa} = \frac{\cos((1+\varkappa)\mu)}{1+\varkappa}. \tag{4}$$

Так как обе части этого равенства непрерывны как функции μ и принимают бесконечно много раз значения $\pm(1-\varkappa)^{-1}$ в левой и $\pm(1+\varkappa)^{-1}$ в правой части на растущих последовательностях действительных чисел, то множество корней характеристического уравнения не пусто и содержит бесконечно много действительных чисел. Тем самым, множество нулей $\Delta(\mu)$ как целой функции экспоненциального типа образует счётное множество в $\mathbb{C}$ с единственной предельной точкой на бесконечности.

Если предположить, что среди нулей функции $\Delta(\mu)$ содержится последовательность $\{\mu_k\}$, на которой $|\operatorname{Im}\mu_k| \to \infty$, то соответствующая дробь $\cos((1-\varkappa)\mu_k)/\cos((1+\varkappa)\mu_k)$ будет стремиться к нулю. Но это противоречит равенству (4), в котором эта дробь должна быть равна ненулевой константе. Лемма доказана.

Отметим, что в зависимости от значения $\varkappa$ корни характеристического уравнения (3) могут быть как вещественными, так и невещественными.

Например, при $\varkappa = 1/2$ уравнение (3) равносильно уравнению

$$\cos\frac{\mu}{2}\left(2\cos^2\frac{\mu}{2} - 3\right) = 0,$$

у которого есть как вещественные, так и невещественные корни. При $\varkappa = 2/3$ получится уравнение

$$\cos^3\frac{\mu}{3}\left(4\cos^2\frac{\mu}{3} - 5\right) = 0,$$

*) Отметим, что нуль не принадлежит спектру оператора $\mathcal{L}_\alpha$.

**) Здесь и далее через C, C_1, ... обозначены некоторые положительные константы.

для которого наблюдается та же ситуация, только среди вещественных корней есть трёхкратные. Наконец, при $\varkappa = 4$ уравнение (3) равносильно уравнению $\cos^3\mu(6\cos^2\mu - 5) = 0$ – здесь все корни вещественны.

Лемма 2. *Если число $\varkappa$ рационально, то корни уравнения (3) образуют периодическое множество на комплексной плоскости, а следовательно, найдётся такое $\delta > 0$, что для любых различных корней μ' и μ'' выполнено неравенство $|\mu' - \mu''| \geqslant \delta$.*

Утверждение леммы 2 тривиально вытекает из периодичности функции $\Delta(\mu)$ при $\varkappa \in \mathbb{Q}$.

Лемма 3. *Оператор $\mathcal{L}_\alpha$ имеет кратные корни тогда и только тогда, когда $\varkappa$ рационально и представимо в виде $2m_0/(2n_0 - 1)$, где m_0, n_0 – натуральные числа, причём все кратные собственные значения имеют кратность* 3.

Доказательство. Характеристическое уравнение имеет кратный корень в том и только том случае, когда наряду с (3) выполнено равенство $d\Delta(\mu)/d\mu = 0$, т.е.

$$(1 - \varkappa^2)\sin(\varkappa\mu)\cos\mu = 0.$$

Но тогда из (3) следует, что равенства $\sin(\varkappa\mu) = 0$ и $\cos\mu = 0$ должны выполняться одновременно, а это имеет место лишь тогда, когда $\varkappa = 2m_0/(2n_0 - 1)$, $m_0, n_0 \in \mathbb{N}$.

Если $\varkappa$ имеет указанное представление в виде несократимой дроби, то кратные корни образуют последовательность $\mu_k^* = \pi(2n_0 - 1)(2k + 1)/2$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ При этих значениях получаем

$$\frac{d^2}{d\mu^2}\Delta(\mu_k^*) = (1 - \varkappa^2)(\varkappa\cos(\varkappa\mu_k^*)\cos\mu_k^* - \sin(\varkappa\mu_k^*)\sin(\mu_k^*)) = 0$$

и

$$\frac{d^3}{d\mu^3}\Delta(\mu_k^*) = (\varkappa^2 - 1)((\varkappa^2 + 1)\sin(\varkappa\mu_k^*)\cos\mu_k^* + 2\varkappa\cos(\varkappa\mu_k^*)\sin(\mu_k^*)) =$$

$$= 2\varkappa(\varkappa^2 - 1)\cos(\varkappa\mu_k^*)\sin(\mu_k^*) \neq 0.$$

Следовательно, все кратные собственные значения имеют кратность три. Лемма доказана.

Отметим, что среди всех значений параметра $\varkappa$, для которых появляется трёхкратный спектр, выделяется число $\varkappa = 2$ (т.е. $\alpha = -3/5$). Если $\varkappa = 2$, то уравнение (3) равносильно уравнению $\cos^3\mu = 0$ и, значит, все собственные значения оператора $\mathcal{L}_\alpha$ трёхкратны.

Лемма 4. *Если число $\varkappa$ иррационально, то множество корней уравнения (3) не отделимо, т.е. существуют две попарно различные последовательности корней $\{\mu_k'\}$ и $\{\mu_k''\}$, для которых $\mu_k' - \mu_k'' \to 0$, и при этом $\operatorname{Im}\mu_k', \operatorname{Im}\mu_k'' \to 0$.*

Доказательство. Рассмотрим уравнение (3) с иррациональным параметром $\varkappa$. Используем указанные в лемме 3 значения параметра $\varkappa_* = 2m/(2n - 1)$, при которых характеристическое уравнение имеет трёхкратные корни. В силу теоремы Чебышёва [26, с. 53] неравенство

$$\left|\varkappa - \frac{2m}{2n - 1}\right| < \frac{6}{n^2} \tag{5}$$

имеет бесконечно много решений $m, n \in \mathbb{N}$. Для получающейся таким образом последовательности $\{n\} \subset \mathbb{N}$ рассмотрим первые трёхкратные нули уравнения (3) с соответствующим значением $\varkappa_* = 2m/(2n - 1)$ из (5): $\mu_n^* = \pi(1 + 2n)/2$. Тем самым, если

$$\Delta_*(\mu) = \varkappa_*\cos(\varkappa_*\mu)\cos\mu + \sin(\varkappa_*\mu)\sin\mu,$$

то $\Delta_*(\mu_n^*) = 0$.

Опишем вокруг точек μ_n^* окружности $\Gamma_n = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu - \mu_n^*| = r_n\}$ с пока произвольными радиусами $r_n \leqslant 1$ и покажем, что r_n можно выбрать так, чтобы при $\mu \in \Gamma_n$ выполнялось неравенство

$$|\Delta(\mu) - \Delta_*(\mu)| < |\Delta_*(\mu)|. \tag{6}$$

Действительно, так как $\cos\mu_n^* = 0$, то при $\mu \in \Gamma_n$ имеем

$$|\Delta(\mu) - \Delta_*(\mu)| \leqslant |\cos\mu - \cos\mu_n^*|(|\varkappa - \varkappa_*||\cos(\varkappa\mu)| + \varkappa_*|\cos(\varkappa_*\mu) - \cos(\varkappa\mu)|) +$$

$$+|\sin\mu||\sin(\varkappa_*\mu)-\sin(\varkappa\mu)|\leqslant e^{\varkappa+2}|\mu-\mu_n^*|\frac{6}{n^2}(1+(\varkappa+1)e|\mu|)+e^{1+\varkappa}\frac{6}{n^2}|\mu|$$

в силу неравенства (5) и того, что $|\operatorname{Im}\mu|\leqslant 1$. Следовательно, при $\mu\in\Gamma_n$ справедлива оценка

$$|\Delta(\mu)-\Delta_*(\mu)|\leqslant\frac{C_1}{n}r_n. \tag{7}$$

С другой стороны, так как $\Delta_*(\mu_n^*)=\Delta_*'(\mu_n^*)=\Delta_*''(\mu_n^*)=0$ и $|\Delta_*'''(\mu_n^*)|=2\varkappa|\varkappa^2-1|\neq 0$, то

$$|\Delta_*(\mu)|=|\Delta_*(\mu)-\Delta_*(\mu_n^*)|\geqslant C_2|\mu-\mu_n^*|^3=C_2r_n^3. \tag{8}$$

Осталось только выбрать $r_n\leqslant 1$ таким, чтобы для правых частей оценок (7) и (8) выполнялось неравенство

$$\frac{C_1}{n}r_n<C_2r_n^3,\quad \text{т.е.}\quad r_n>\sqrt{\frac{C_1}{C_2n}}.$$

Если взять, например, $r_n=\min(1,2\sqrt{C_1/(C_2n)})$, то неравенство (6) будет выполняться для $\mu\in\Gamma_n$, начиная с некоторого n, а радиусы r_n будут стремиться к нулю при $n\to\infty$.

В таком случае из теоремы Руше следует, что $\Delta(\mu)$ имеет внутри Γ_n столько же (простых!) нулей, сколько их с учётом кратности имеет $\Delta_*(\mu)$, и при этом μ_n^* – трёхкратный нуль $\Delta_*(\mu)$. Таким образом, внутри Γ_n функция $\Delta(\mu)$ имеет по крайней мере два различных нуля μ_n' и μ_n'', и для них выполнено неравенство $|\mu_n'-\mu_n''|\leqslant 2r_n$. Кроме того, разности $\mu_n'-\mu_n^*$ и $\mu_n''-\mu_n^*$ стремятся к нулю и, значит, $\operatorname{Im}\mu_n',\operatorname{Im}\mu_n''\to 0$. Лемма доказана.

2. Собственные функции. Наряду с задачей (1), (2) рассмотрим сопряжённую задачу

$$l_\alpha v(x)=\overline{\lambda}v(x),\quad -1<x<1, \tag{9}$$

$$\alpha v(-1)=v(1),\quad \alpha v'(-1)=-v'(1). \tag{10}$$

Соответствующий ей оператор будем обозначать $\mathcal{L}_\alpha^*$.

Выберем собственные функции задач (1), (2) и (9), (10) следующим образом:

$$u^{(0)}(x,\mu)=\sin(\varkappa\mu x)+\beta(\mu)\cos(\mu x) \tag{11}$$

для оператора $\mathcal{L}_\alpha$,

$$v^{(0)}(x,\overline{\mu})=-\varkappa^2\sin(\varkappa\overline{\mu}x)+\beta(\overline{\mu})\cos(\overline{\mu}x) \tag{12}$$

для оператора $\mathcal{L}_\alpha^*$. Здесь μ – корни характеристического уравнения (3), а коэффициент $\beta(\mu)$ задаётся соотношением

$$\beta(\mu)=-\varkappa\cos(\varkappa\mu)\sin\mu+\sin(\varkappa\mu)\cos\mu.$$

Лемма 5. *Системы собственных функций (11) и (12) почти нормированы в* $L_2(-1,1)$, *и для них справедливо равенство*

$$(u^{(0)}(\,\cdot\,,\mu),v^{(0)}(\,\cdot\,,\overline{\mu}))=(1-\varkappa^2)\sin^2(\varkappa\mu). \tag{13}$$

Доказательство. Непосредственное вычисление даёт*) равенство

$$\|u^{(0)}(\,\cdot\,,\mu)\|_2^2=\left(\frac{\operatorname{sh}(2\varkappa\operatorname{Im}\mu)}{2\varkappa\operatorname{Im}\mu}-\frac{\sin(2\varkappa\operatorname{Re}\mu)}{2\varkappa\operatorname{Re}\mu}\right)+|\beta(\mu)|^2\left(\frac{\operatorname{sh}(2\operatorname{Im}\mu)}{2\operatorname{Im}\mu}+\frac{\sin(2\operatorname{Re}\mu)}{2\operatorname{Re}\mu}\right). \tag{14}$$

Для нормы $\|v^{(0)}(\,\cdot\,,\overline{\mu})\|_2$ справедливо такое же равенство, только перед первой скобкой правой части стоит множитель $\varkappa^2$.

*) Символ $\|\cdot\|_2$ означает здесь и далее норму в $L_2(-1,1)$.

Так как корни уравнения (3) расположены в полосе (лемма 1), то равномерно по μ, удовлетворяющим характеристическому уравнению, выполнены оценки

$$\|u^{(0)}(\,\cdot\,,\mu)\|_2 \leqslant C_3, \quad \|v^{(0)}(\,\cdot\,,\overline{\mu})\|_2 \leqslant C_3. \tag{15}$$

Из неравенства $\operatorname{sh} t \geqslant t$ вытекает, что для больших по модулю значений μ, а значит, в силу леммы 1, больших значений $\operatorname{Re}\mu$, выполнены также оценки снизу

$$\|u^{(0)}(\,\cdot\,,\mu)\|_2^2 \geqslant \frac{1}{2}(1+|\beta(\mu)|^2), \quad \|v^{(0)}(\,\cdot\,,\overline{\mu})\|_2^2 \geqslant \frac{1}{2}(\varkappa^2+|\beta(\mu)|^2).$$

И так как рассматриваемые квадраты норм – непрерывные относительно μ и положительные величины, то равномерно по всем μ, удовлетворяющим уравнению (3), выполнены равномерные оценки

$$\|u^{(0)}(\,\cdot\,,\mu)\|_2 \geqslant C_4, \quad \|v^{(0)}(\,\cdot\,,\overline{\mu})\|_2 \geqslant C_4. \tag{16}$$

Оценки (15) и (16) доказывают почти нормированность систем собственных функций.

Установим теперь равенство (13). Имеем

$$(u^{(0)}(\,\cdot\,,\mu), v^{(0)}(\,\cdot\,,\overline{\mu})) = -2\varkappa^2 \int\limits_0^1 \sin^2(\varkappa\mu x)\,dx + 2\beta^2(\mu)\int\limits_0^1 \cos^2(\mu x)\,dx =$$

$$= -\varkappa^2 + \beta^2(\mu) + \mu^{-1}(\varkappa\sin(\varkappa\mu)\cos(\varkappa\mu) + \beta^2(\mu)\sin\mu\cos\mu). \tag{17}$$

Сначала заметим, что из характеристического уравнения (3) следует равенство

$$\beta^2(\mu) = \varkappa^2\cos^2(\varkappa\mu) + \sin^2(\varkappa\mu).$$

Аналогично для квадрата выражения, стоящего в круглых скобках правой части равенства (17), получаем

$$(\varkappa^2\cos^2(\varkappa\mu) - \beta^2(\mu)\sin^2\mu)(\sin^2(\varkappa\mu) - \beta^2(\mu)\cos^2\mu) = -(\varkappa^2\cos^2(\varkappa\mu)\cos^2\mu - \sin^2(\varkappa\mu)\sin^2\mu)^2,$$

т.е. это выражение равно нулю в силу (3).

Итак, окончательно

$$(u^{(0)}(\,\cdot\,,\mu), v^{(0)}(\,\cdot\,,\overline{\mu})) = -\varkappa^2 + \beta^2(\mu) = (1-\varkappa^2)\sin^2(\varkappa\mu).$$

Лемма доказана.

Отметим, что равенство леммы 5 соответствует тому факту, что если μ – кратный корень, то скалярное произведение (13) равно нулю, а если μ – простой корень, то оно отлично от нуля.

Лемма 6. *Если число $\varkappa$ иррационально, то можно выбрать последовательности $\{\lambda_k'\}$ и $\{\lambda_k''\}$ попарно различных собственных значений оператора $\mathcal{L}_\alpha$ так, чтобы соответствующие им собственные функции $\widetilde{u}_k^{(0)}(x)$ и $\widetilde{\widetilde{u}}_k^{(0)}(x)$ удовлетворяли соотношению*

$$\left\| \frac{\widetilde{u}_k^{(0)}(x)}{\|\widetilde{u}_k^{(0)}\|_2} - \frac{\widetilde{\widetilde{u}}_k^{(0)}(x)}{\|\widetilde{\widetilde{u}}_k^{(0)}\|_2} \right\|_2 \to 0 \tag{18}$$

при $k\to\infty$. Такое же свойство имеет место и для собственных функций сопряжённого оператора $\mathcal{L}_\alpha^*$.

Доказательство. Рассмотрим построенные в лемме 4 последовательности $\{\mu_k'\}$ и $\{\mu_k''\}$ корней характеристического уравнения и соответствующие им собственные функции $\widetilde{u}_k^{(0)}(x)$ и $\widetilde{\widetilde{u}}_k^{(0)}(x)$, задаваемые равенством (11) при $\mu=\mu_k'$ и $\mu=\mu_k''$ соответственно. Тогда

$$(\widetilde{u}_k^{(0)}, \widetilde{\widetilde{u}}_k^{(0)}) = (1+\beta(\mu_k')\beta(\overline{\mu}_k''))\frac{\sin(\varkappa(\mu_k'-\overline{\mu}_k''))}{\varkappa(\mu_k'-\overline{\mu}_k'')} - (1-\beta(\mu_k')\beta(\overline{\mu}_k''))\frac{\sin(\mu_k'+\overline{\mu}_k'')}{\mu_k'+\overline{\mu}_k''} =$$

$$= 1+\beta^2(\mu_k^*) + o(1) = 1+\varkappa^2+o(1)$$

при $k\to\infty$ в силу свойств выбранных последовательностей.

Из равенства (14) следует, что для квадратов норм $\|\widetilde{u}_k^{(0)}\|_2^2$ и $\|\widetilde{\widetilde{u}}_k^{(0)}\|_2^2$ справедливы соотношения $1+\beta^2(\mu_k^*)+o(1)=1+\varkappa^2+o(1)$. Таким образом, величина $\|\widetilde{u}_k^{(0)}\|_2^{-1}\|\widetilde{\widetilde{u}}_k^{(0)}\|_2^{-1}(\widetilde{u}_k^{(0)},\widetilde{\widetilde{u}}_k^{(0)})$ стремится к единице, что и доказывает сходимость (18). Лемма доказана.

Утверждение леммы 6, по своей сути, означает следующее: *если число $\varkappa$ иррационально, то системы собственных функций операторов $\mathcal{L}_\alpha$ и $\mathcal{L}_\alpha^*$ не являются равномерно минимальными в пространстве $L_2(-1,1)$.*

3. Функция Грина задачи (1), (2). Решение уравнения $l_\alpha u(x)=\lambda u(x)+f(x)$, удовлетворяющее условиям (2) при значениях λ, лежащих вне спектра оператора $\mathcal{L}_\alpha$, имеет вид

$$u(x)=\int\limits_{-1}^{1}G(x,t;\lambda)f(t)\,dt, \tag{19}$$

где $G(x,t;\lambda)=g_0(x,t;\lambda)+g_1(x,t;\lambda)$,

$$g_0(x,t;\lambda)=\frac{1}{2(1-\alpha)\mu\Delta(\mu)}[(\varkappa\cos(\varkappa\mu)\cos(\mu x)-\sin\mu\sin(\varkappa\mu x))(\varkappa\cos(\varkappa\mu)\sin(\varkappa\mu t)+$$

$$+\sin\mu\cos(\mu t))-(\sin(\varkappa\mu)\cos(\mu x)+\cos\mu\sin(\varkappa\mu x))(\cos\mu\cos(\mu t)-\varkappa^2\sin(\varkappa\mu)\sin(\varkappa\mu t))],$$

$$g_1(x,t;\lambda)=\frac{1}{2(1-\alpha)\mu}\begin{cases}\operatorname{sgn}t(-\cos(\mu x)\sin(\mu t)+\varkappa\sin(\varkappa\mu x)\cos(\varkappa\mu t)), & \text{если } |x|\leqslant|t|\leqslant 1,\\ \operatorname{sgn}x(-\sin\mu x\cos(\mu t)+\varkappa\cos(\varkappa\mu x)\sin(\varkappa\mu t)), & \text{если } |t|\leqslant|x|\leqslant 1.\end{cases}$$

Представление (19) для решения проверяется непосредственно*).

Оценим функцию Грина оператора $\mathcal{L}_\alpha$ вне точек его спектра.

Лемма 7. *Пусть $\{\mu_n\}$ – корни уравнения (3). Для любого $\delta>0$ найдётся константа $C=C(\delta)>0$, при которой равномерно по $\mu\in\mathbb{C}$ таким, что $|\mu-\mu_n|\geqslant\delta$, и $-1\leqslant x,\,t\leqslant 1$, выполнена оценка*

$$|G(x,t;\lambda)|\leqslant\frac{C}{|\mu|}r(x,t,\mu), \tag{20}$$

где

$$r(x,t,\mu)=\exp(-\min(1,\varkappa)|\operatorname{Im}\mu||x|-|t||)+\exp(-\min(1,\varkappa)|\operatorname{Im}\mu|(2-|x|-|t|)).$$

Доказательство. Рассмотрим значения μ, для которых $\nu\equiv\operatorname{Im}\mu>0$, и покажем, как проводится оценка функции Грина, например, в случаях $0\leqslant x\leqslant t\leqslant 1$ и $0\leqslant t\leqslant x\leqslant 1$.

Воспользуемся уравнением (3) и запишем функцию $G(x,t;\lambda)$ при $0\leqslant x\leqslant t\leqslant 1$ в виде

$$G(x,t;\lambda)=\frac{1}{2(1-\alpha)\mu\Delta(\mu)}[\varkappa(\sin\mu\sin(\varkappa\mu x)\sin(\varkappa\mu(1-t))+\cos(\varkappa\mu)\cos(\mu x)\sin\mu(1-t))+$$

$$+\varkappa^2(\cos\mu\sin(\varkappa\mu x)\cos(\varkappa\mu(1-t))-\sin(\varkappa\mu)\cos(\mu x)\cos\mu(1-t))+$$

$$+\varkappa^2\cos(\mu x)\sin(\varkappa\mu t)-\sin(\varkappa\mu x)\cos(\mu t)].$$

Тогда

$$|G(x,t;\lambda)|=O(1/|\mu\Delta(\mu)|)(e^{(1+\varkappa)\nu+\varkappa\nu(x-t)}+e^{(1+\varkappa)\nu+\nu(x-t)}+e^{\nu(x+\varkappa t)}+e^{\nu(\varkappa x+t)}).$$

Отсюда, так как для рассматриваемых значений μ выполнено неравенство $|\Delta(\mu)|\geqslant Ce^{(1+\varkappa)\nu}$, получаем оценку (20).

*) Функция Грина $G(x,t;\lambda)$ строится так же, как в [14]. Конкретный вид функции Грина в (19) предоставлен авторам А. М. Сарсенби.

При $0 \leqslant t \leqslant x \leqslant 1$ функция $G(x,t;\lambda)$ записывается по-другому:

$$G(x,t;\lambda) = \frac{1}{2(1-\alpha)\mu\Delta(\mu)}[\varkappa(\cos(\varkappa\mu)\cos(\mu t)\sin\mu(1-x) + \sin\mu\sin(\varkappa\mu t)\sin(\varkappa\mu(1-x))) +$$

$$+ \varkappa^2(\cos(\mu x)\sin(\varkappa\mu t) + \cos\mu\sin(\varkappa\mu t)\cos(\varkappa\mu(1-x))) -$$

$$- \sin(\varkappa\mu x)\cos(\mu t) - \sin(\varkappa\mu)\cos(\mu t)\cos(\mu(1-x))].$$

Следовательно,

$$|G(x,t;\lambda)| = O(1/|\mu\Delta(\mu)|)(e^{(1+\varkappa)\nu+\nu(t-x)} + e^{(1+\varkappa)\nu+\varkappa\nu(t-x)} + e^{\nu(x+\varkappa t)} + e^{\nu(\varkappa x+t)}),$$

откуда также следует оценка (20). Лемма доказана.

Из полученной оценки функции Грина и утверждения леммы 1 о расположении спектра следует, что применима теорема о полноте [27] и справедлива следующая

Теорема 1. *При всех α, удовлетворяющих неравенствам $0 < |\alpha| < 1$, системы корневых функций операторов $\mathcal{L}_\alpha$ и $\mathcal{L}_\alpha^*$ полны в $L_2(-1,1)$.*

Отметим, что утверждение теоремы 1 для сопряжённого оператора следует из того, что его функция Грина $G^*(x,t;\lambda)$ совпадает с функцией $\overline{G(t,x;\overline{\lambda})}$.

Прямым следствием леммы 6 и теоремы 1 является

Теорема 2. *Если α, удовлетворяющее неравенствам $0 < |\alpha| < 1$, таково, что число $\varkappa$ иррационально, то системы корневых функций операторов $\mathcal{L}_\alpha$ и $\mathcal{L}_\alpha^*$ полны в $L_2(-1,1)$, но не образуют базисов.*

4. Базисность корневых функций. Рассмотрим сначала случай, когда $\varkappa$ рационально и спектр простой.

Теорема 3. *Пусть число $\varkappa$ рационально и не представимо в виде $2m_0/(2n_0-1)$, $m_0, n_0 \in \mathbb{N}$. Тогда система собственных функций оператора $\mathcal{L}_\alpha$ (оператора $\mathcal{L}_\alpha^*$) образует базис Рисса в $L_2(-1,1)$.*

Доказательство. Вследствие теоремы 1 система U собственных функций (11) полна в $L_2(-1,1)$, а так как $\sin(\varkappa\mu) \neq 0$ при рассматриваемых $\varkappa$, то из равенства (13) следует, что система $V = \{(1-\varkappa^2)^{-1}\sin^{-2}(\varkappa\mu)v^{(0)}(x,\overline{\mu})\}$ является полной биортогонально сопряжённой системой собственных функций оператора $\mathcal{L}_\alpha^*$. Поэтому система U минимальна в $L_2(-1,1)$.

Из лемм 1, 2 и 5 вытекает, что выполнены все условия теоремы о безусловной базисности [13] и система U (а следовательно, и система V) образует базис Рисса пространства $L_2(-1,1)$. Теорема доказана.

Перейдём к описанному в лемме 3 случаю кратного спектра оператора $\mathcal{L}_\alpha$.

Теорема 4. *Пусть число $\varkappa$ представимо в виде несократимой дроби $2m_0/(2n_0-1)$, $m_0, n_0 \in \mathbb{N}$. Тогда в системе корневых функций оператора $\mathcal{L}_\alpha$ (оператора $\mathcal{L}_\alpha^*$) можно выбрать присоединённые функции так, чтобы эта система образовывала базис Рисса в $L_2(-1,1)$.*

Доказательство. Выделим в множестве корней уравнения (3) кратные корни $\mu_k^* = \pi \times (2n_0-1)(2k+1)/2$, остальные обозначим μ_k^{**} (как известно, для безусловной базисности упорядочение собственных значений не играет роли).

Для простых корней μ_k^{**} возьмём собственные функции операторов $\mathcal{L}_\alpha$ и $\mathcal{L}_\alpha^*$ в виде (11) и (12). В силу равенства (13) и соотношения $\sin(\varkappa\mu_k^{**}) \neq 0$ получаем, что системы функций

$$U^{**} = \{u^{(0)}(x,\mu_k^{**})\}, \quad V^{**} = \{(1-\varkappa^2)^{-1}\sin^{-2}(\varkappa\mu_k^{**})v^{(0)}(x,\overline{\mu_k^{**}})\} \tag{21}$$

образуют почти нормированную биортогональную пару в $L_2(-1,1)$.

Для кратных корней μ_k^* воспользуемся тем, что корневые подпространства $K(\mu_k^*)$ и $K^*(\mu_l^*)$ операторов $\mathcal{L}_\alpha$ и $\mathcal{L}_\alpha^*$, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны. Поэтому построение систем корневых функций проведём только в паре соответствующих пространств $K(\mu_k^*)$ и $K^*(\mu_k^*)$.

Так как $\beta(\mu_k^*) = -\varkappa\cos(\varkappa\mu_k^*)\sin\mu_k^* = \varkappa(-1)^{m_0+n_0+k} \equiv \varkappa\beta_k$, то собственные функции (11) и (12) примут вид

$$\widetilde{u}_k^{(0)}(x) = \sin(\varkappa\mu_k^* x) + \varkappa\beta_k\cos(\mu_k^* x),$$
$$\widetilde{v}_k^{(0)}(x) = -\varkappa\sin(\varkappa\mu_k^* x) + \beta_k\cos(\mu_k^* x).$$

Решая уравнения

$$\mathcal{L}_\alpha\widetilde{u}_k^{(1)}(x) = \lambda\widetilde{u}_k^{(1)}(x) + \widetilde{u}_k^{(0)}(x), \quad \mathcal{L}_\alpha^*\widetilde{v}_k^{(1)}(x) = \lambda\widetilde{v}_k^{(1)}(x) + \widetilde{v}_k^{(0)}(x),$$
$$\mathcal{L}_\alpha\widetilde{u}_k^{(2)}(x) = \lambda\widetilde{u}_k^{(2)}(x) + \widetilde{u}_k^{(1)}(x), \quad \mathcal{L}_\alpha^*\widetilde{v}_k^{(2)}(x) = \lambda\widetilde{v}_k^{(2)}(x) + \widetilde{v}_k^{(1)}(x),$$

найдём присоединённые функции первого и второго порядков.

Тогда соотношения

$$(\widetilde{u}_k^{(0)}, \widetilde{v}_k^{(0)}) = (\widetilde{u}_k^{(0)}, \widetilde{v}_k^{(1)}) = (\widetilde{u}_k^{(1)}, \widetilde{v}_k^{(0)}) = 0,$$
$$(\widetilde{u}_k^{(0)}, \widetilde{v}_k^{(2)}) = (\widetilde{u}_k^{(1)}, \widetilde{v}_k^{(1)}) = (\widetilde{u}_k^{(2)}, \widetilde{v}_k^{(0)}), \quad (\widetilde{u}_k^{(2)}, \widetilde{v}_k^{(1)}) = (\widetilde{u}_k^{(1)}, \widetilde{v}_k^{(2)})$$

выполняются автоматически, и для соблюдения условий биортогональности

$$(u_k^{(1)}, v_k^{(2)}) = (u_k^{(2)}, v_k^{(2)}) = 0$$

присоединённые функции, при необходимости, модифицируются выбором подходящих констант в соотношениях

$$u_k^{(1)}(x) = \widetilde{u}_k^{(1)}(x) + A_k\widetilde{u}_k^{(0)}(x), \quad u_k^{(2)}(x) = \widetilde{u}_k^{(2)}(x) + A_k\widetilde{u}_k^{(1)}(x) + B_k\widetilde{u}_k^{(0)}(x),$$
$$v_k^{(1)}(x) = \widetilde{v}_k^{(1)}(x) + A_k^*\widetilde{v}_k^{(0)}(x), \quad v_k^{(2)}(x) = \widetilde{v}_k^{(2)}(x) + A_k^*\widetilde{v}_k^{(1)}(x) + B_k^*\widetilde{v}_k^{(0)}(x).$$

После нормировки корневых функций

$$(u_k^{(0)}, v_k^{(2)}) = (u_k^{(1)}, v_k^{(1)}) = (u_k^{(2)}, v_k^{(0)}) = 1$$

получится требуемая биортогональная пара систем в корневых подпространствах $K(\mu_k^*)$ и $K^*(\mu_k^*)$.

Эти корневые функции имеют следующий вид:

$$u_k^{(0)}(x) = \frac{2(1-\alpha)\mu_k^*}{\varkappa}(\sin(\varkappa\mu_k^* x) + \varkappa\beta_k\cos(\mu_k^* x)),$$

$$u_k^{(1)}(x) = x(-\beta_k\sin(\mu_k^* x) + \cos(\varkappa\mu_k^* x)) + \frac{1}{4\varkappa\mu_k^*}(\sin(\varkappa\mu_k^* x) + \varkappa\beta_k\cos(\mu_k^* x)),$$

$$u_k^{(2)}(x) = \frac{1}{4(1-\alpha)\mu_k^*}\biggl[\left(\frac{3}{5} - x^2\right)(\varkappa\sin(\varkappa\mu_k^* x) + \beta_k\cos(\mu_k^* x)) -$$
$$- \frac{x}{2\mu_k^*}(\cos(\varkappa\mu_k^* x) - \beta_k\sin(\mu_k^* x)) - \frac{32\varkappa^2(\mu_k^*)^2 + 5}{80(\mu_k^*)^2}\beta_k\cos(\mu_k^* x) - \frac{32(\mu_k^*)^2 + 5}{80\varkappa(\mu_k^*)^2}\sin(\varkappa\mu_k^* x)\biggr],$$

$$v_k^{(0)}(x) = \frac{6(1-\alpha)\mu_k^*}{1-\varkappa^2}(-\varkappa\sin(\varkappa\mu_k^* x) + \beta_k\cos(\mu_k^* x)),$$

$$v_k^{(1)}(x) = \frac{3}{2(1-\varkappa^2)}\biggl[-x(\beta_k\sin(\mu_k^* x) + \varkappa^2\cos(\varkappa\mu_k^* x)) - \frac{1}{2\mu_k^*}(-\varkappa\sin(\varkappa\mu_k^* x) + \beta_k\cos(\mu_k^* x))\biggr],$$

$$v_k^{(2)}(x) = \frac{3}{4(1-\varkappa^2)(1-\alpha)\mu_k^*}\biggl[\left(\frac{3}{5} - x^2\right)(-\varkappa^3\sin(\varkappa\mu_k^* x) + \beta_k\cos(\mu_k^* x)) +$$
$$+ \frac{x}{2\mu_k^*}(\varkappa^2\cos(\varkappa\mu_k^* x) + \beta_k\sin(\mu_k^* x)) - \frac{32\varkappa^2(\mu_k^*)^2 + 5}{80(\mu_k^*)^2}\beta_k\cos(\mu_k^* x) + \frac{32(\mu_k^*)^2 + 5}{80\varkappa(\mu_k^*)^2}\varkappa\sin(\varkappa\mu_k^* x)\biggr].$$

Отметим, что для этих функций выполнены равномерные по k оценки

$$\|u_k^{(0)}\|_2\|v_k^{(2)}\|_2 \leqslant C, \quad \|u_k^{(1)}\|_2\|v_k^{(1)}\|_2 \leqslant C, \quad \|u_k^{(2)}\|_2\|v_k^{(0)}\|_2 \leqslant C. \tag{22}$$

Установленные в леммах 1, 2 и 5 свойства, почти нормированность собственных функций (21) и оценки (22) показывают, что для построенной системы корневых функций выполнены все условия теоремы о базисности Рисса в $L_2(-1,1)$ [13]. Теорема доказана.

Работа Крицкова Л.В. выполнена при финансовой поддержке Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (грант AP 08855792).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Przeworska-Rolewicz D.* Equations with Transformed Argument. Algebraic Approach. Amsterdam; Warsiawa, 1973.
2. *Wiener J.* Generalized Solutions of Functional Differential Equations. Singapore; New Jersey; London; Hong Kong, 1993.
3. *Wu J.* Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations. New York, 1996.
4. *Cabada A., Tojo F.A.F.* Differential Equations with Involutions. Amsterdam; Paris; Beijing, 2015.
5. *Курдюмов В.П., Хромов А.П.* О базисах Рисса из собственных и присоединенных функций функционально-дифференциального уравнения с оператором отражения // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44. № 2. С. 196–204.
6. *Бурлуцкая М.Ш., Хромов А.П.* Об одной теореме равносходимости на всем отрезке для функционально-дифференциальных операторов // Изв. Саратовск. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9. № 4 (1). С. 3–10.
7. *Бурлуцкая М.Ш., Хромов А.П.* Метод Фурье в смешанной задаче для уравнения с частными производными первого порядка с инволюцией // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2011. Т. 51. № 12. С. 2233–2246.
8. *Бурлуцкая М.Ш.* Асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций функционально-дифференциального оператора с инволюцией // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика и Математика. 2011. № 2. С. 64–72.
9. *Бурлуцкая М.Ш.* О смешанной задаче для уравнения с частными производными первого порядка с инволюцией и с периодическими краевыми условиями // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2014. Т. 54. № 1. С. 3–12.
10. *Курдюмов В.П.* О базисах Рисса из собственных функций дифференциального оператора второго порядка с инволюцией и интегральными краевыми условиями // Изв. Саратовск. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15. № 4. С. 392–405.
11. *Садыбеков М.А., Сарсенби А.М.* Критерий базисности системы собственных функций оператора кратного дифференцирования с инволюцией // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48. № 8. С. 1126–1132.
12. *Kopzhassarova A.A., Sarsenbi A.M.* Basis properties of eigenfunctions of second-order differential operators with involution // Abstr. Appl. Anal. 2012. Art. ID 576843.
13. *Крицков Л.В., Сарсенби А.М.* Базисность Рисса системы корневых функций дифференциального оператора второго порядка с инволюцией // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 1. С. 35–48.
14. *Kritskov L.V., Sarsenbi A.M.* Equiconvergence property for spectral expansions related to perturbations of the operator $-u''(-x)$ with initial data // Filomat. 2018. V. 32. № 3. P. 1069–1078.
15. *Шкаликов А.А., Владыкина В.Е.* Спектральные свойства обыкновенных дифференциальных операторов с инволюцией // Докл. РАН. 2019. Т. 484. № 1. С. 12–17.
16. *Кальменов Т.Ш., Искакова У.А.* Критерий сильной разрешимости смешанной задачи Коши для уравнения Лапласа // Докл. РАН. 2007. Т. 414. № 2. С. 168–171.
17. *Figueroa R., Pouso R.L.* Minimal and maximal solutions to second-order boundary value problems with state-dependent deviating arguments // Bull. London Math. Soc. 2011. V. 43. P. 164–174.
18. *Kirane M., Nasser A.-S.* Inverse problems for a nonlocal wave equation with an involution perturbation // J. Nonlin. Sci. Appl. 2016. V. 9. P. 1243–1251.
19. *Ashyralyev A., Sarsenbi A.M.* Well-posedness of a parabolic equation with involution // Numer. Func. Anal. Opt. 2017. V. 38. № 10. P. 1295–1304.
20. *Сарсенби А.А.* Некорректная задача для уравнения теплопроводности с инволюцией // Журн. Средневолжского мат. о-ва. 2019. Т. 21. № 1. С. 48–59.

21. *Крицков Л.В., Сарсенби А.М.* Спектральные свойства одной нелокальной задачи для дифференциального уравнения второго порядка с инволюцией // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 8. С. 990–996.
22. *Kritskov L.V., Sarsenbi A.M.* Basicity in L_p of root functions for differential equations with involution // Electr. J. Differ. Equat. 2015. V. 2015. № 278. P. 1–9.
23. *Ильин В.А.* О связи между видом краевых условий и свойствами базисности и равносходимости с тригонометрическим рядом разложений по корневым функциям несамосопряжённого дифференциального оператора // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 9. С. 1516–1529.
24. *Kritskov L.V., Sadybekov M.A., Sarsenbi A.M.* Nonlocal spectral problem for a second-order differential operator with an involution // Bull. of the Karaganda Univ. Math. 2018. V. 91. № 3. P. 53–60.
25. *Kritskov L.V., Sadybekov M.A., Sarsenbi A.M.* Properties in L_p of root functions for a nonlocal problem with involution // Turkish J. Math. 2019. V. 43. P. 393–401.
26. *Хинчин А.Я.* Цепные дроби. М., 1978.
27. *Наймарк М.А.* О некоторых признаках полноты системы собственных и присоединённых векторов линейного оператора в гильбертовом пространстве // Докл. АН СССР. 1954. Т. 98. № 5. С. 727–730.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 04.06.2020 г.
После доработки 17.09.2020 г.
Принята к публикации 13.10.2020 г.