ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 1, с. 14–21

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.984.55

О НЕЛОКАЛЬНОМ ВОЗМУЩЕНИИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА

© 2021 г. Д. М. Поляков

Рассматривается спектральная задача для дифференциального оператора второго порядка с периодическими краевыми условиями и интегральным возмущением. Для указанного оператора получена асимптотика собственных значений, а также оценки отклонений спектральных проекторов.

DOI: 10.31857/S0374064121010039

Введение. В настоящей работе изучается дифференциальный оператор $L : D(L) \subset \subset L_2(0,1) \to L_2(0,1)$ вида

$$(Lu)(x) \equiv -u''(x) + q(x)u(x), \quad x \in (0,1).$$

Область определения $D(L)$ этого оператора содержится в $W_2^2(0,1)$ и задаётся следующими нелокальными краевыми условиями:

$$u(0) = u(1), \quad u'(0) = u'(1) + \int\limits_0^1 \overline{p(x)}u(x)\,dx.$$

Будем предполагать, что функция p и потенциал q являются комплекснозначными функциями из класса $L_2(0,1)$.

Изучение спектральных свойств оператора L представляет интерес, в частности, для некоторых задач механики, а также в теории диффузионных процессов. Конкретные примеры физических задач, которые приводят к моделям такого вида, можно найти в статьях [1] и [2].

Дифференциальный оператор произвольного порядка с интегральными краевыми условиями рассматривался в работе [3]. В этой работе было замечено, что если краевые условия являются усиленно регулярными, то система собственных и присоединённых (корневых) функций образует базис Рисса в $L_2(0,1)$. Позже в [4] для усиленно регулярного оператора произвольного порядка была изучена асимптотика собственных значений и получены оценки равносходимости спектральных разложений. Однако наиболее интересная ситуация возникает в том случае, когда краевые условия являются регулярными. В уже упомянутой работе [3] доказано, что корневые функции образуют базис Рисса со скобками в $L_2(0,1)$. Таким образом, вопрос о базисности Рисса остался открытым.

Этот вопрос для оператора L в случае $q = 0$ рассматривался в [5]. В этой работе установлено, что свойство базисности корневых функций может меняться при сколь угодно малом изменении ядра интегрального возмущения, а также записана асимптотика собственных значений. Развитие данной тематики продолжилось в серии работ [6–8], в которых авторы получили близкие по духу результаты, но уже в случае ненулевого потенциала q. Отметим также работу [9], в которой найдены условия, обеспечивающие дискретность спектра дифференциального оператора второго порядка с нелокальными условиями, не содержащими атомарную меру концов интервала.

В настоящей работе мы ставим целью уточнить известные к настоящему времени результаты, которые относятся к асимптотике спектра оператора L, а также установить ряд утверждений об оценках отклонений спектральных проекторов. Эти оценки позволят получить новый

результат о базисности Бари из подпространств пространства $L_2(0,1)$. Напомним, что базисы, которые порождаются системами проекторов, квадратично близкими к полным и минимальным системам ортогональных проекторов, называются *базисами Бари*. Отметим, что базисы Бари обычно выделяются в особый класс и их изучение представляет собой отдельный интерес. По теореме Бари–Маркуса (см. [10, гл. VI, теорема 5.2]) всякий базис из подпространств, квадратично близкий к ортогональному базису из подпространств, является базисом Рисса из подпространств (базисом Рисса со скобками). Таким образом, полученный результат о базисности Бари из подпространств является более сильным утверждением, чем базисность Рисса из подпространств.

1. Преобразование оператора и вспомогательные результаты. Если $q=0$, то такой оператор L обычно считается невозмущённым оператором. Прямому применению методов теории возмущений мешает тот факт, что невозмущённый оператор не является оператором с хорошо изученными спектральными свойствами. В связи с этим появляется необходимость преобразования оператора L. Один из подходов состоит в переходе к сопряжённому оператору (см. [11]). Непосредственный подсчёт показывает, что сопряжённая краевая задача имеет вид

$$(L^*v)(x) = -v''(x) + \overline{q(x)}v(x) + p(x)v(0) = \overline{\lambda}v(x), \quad v(0)=v(1), \quad v'(0)=v'(1),$$

где $D(L^*)=\{v\in W_2^2(0,1)\}$. Причина перехода к сопряжённой задаче заключается в том, что в этом случае невозмущённый оператор (при $p=q=0$) является самосопряжённым оператором с известными спектральными свойствами. Наша ближайшая цель – изучить свойства оператора L^*. При этом обратный переход позволит описать свойства исходного оператора L.

Для исследования оператора L^* мы будем активно использовать технику из статьи [12], в которой изучен оператор L с $p=0$. Она основана на сведéнии с помощью подобия изучения оператора L^* к изучению некоторого оператора блочно-диагональной структуры, спектральные свойства которого легко описываются.

Представим оператор L^* в виде $L^*=L_0-B$, где оператор L_0 задан дифференциальным выражением $L_0v=-v''$ на области определения $D(L_0)=D(L^*)$, а действие оператора B задаётся правилом $Bv=-\overline{q(x)}v(x)-p(x)v(0)$. В этом случае невозмущённый оператор L_0 является самосопряжённым оператором с дискретным спектром. Его собственные значения имеют вид $\lambda_n=4\pi^2n^2$, а соответствующие им собственные функции $e_n(x)=e^{i2\pi nx}$, $n\in\mathbb{Z}$, образуют ортонормированный базис в $L_2(0,1)$.

Пусть P_n, $n\in\mathbb{Z}_+=\mathbb{N}\bigcup\{0\}$, – ортогональный проектор Рисса, построенный по множеству $\{\lambda_n\}$. Для любого $x\in L_2(0,1)$ он имеет вид

$$P_nx=(x,e_{-n})e_{-n}+(x,e_n)e_n, \quad n\in\mathbb{N}, \quad P_0x=(x,e_0)e_0.$$

Поскольку подобие операторов связано с построением оператора преобразования, то далее мы введём операторы, с помощью которых будет осуществляться указанное построение. Обозначим через $\mathfrak{S}_2$ идеал операторов Гильберта–Шмидта с нормой $\|\cdot\|_2$ (см. подробнее [10, гл. 3, § 9]). Рассмотрим операторы $J:\mathfrak{S}_2\to\mathfrak{S}_2$ и $\Gamma:\mathfrak{S}_2\to\mathfrak{S}_2$, заданные равенствами

$$JX=\sum_{n\in\mathbb{Z}_+}P_nXP_n, \quad \Gamma X=\sum_{\substack{k,j\in\mathbb{Z}_+\\ k\neq j}}\frac{P_kXP_j}{\lambda_k-\lambda_j} \tag{1}$$

для любого $X\in\mathfrak{S}_2$. В нашем исследовании эти операторы будут играть вспомогательную роль.

Наряду с введёнными операторами будем рассматривать последовательности операторов J_m, Γ_m, $m\in\mathbb{Z}_+$, следующего вида:

$$J_mX=J(X-P_{(m)}XP_{(m)})+P_{(m)}XP_{(m)}, \quad \Gamma_mX=\Gamma X-P_{(m)}(\Gamma X)P_{(m)}, \quad X\in\mathfrak{S}_2,$$

где $P_{(m)}=\sum_{j\leqslant m}P_j$. Корректность и ограниченность указанных операторов установлена в [12, лемма 2]. Отметим, что каждый оператор J_m является ортогональным проектором. По существу, операторы J_m и Γ_m отличаются от соответствующих операторов J и Γ на оператор

конечного ранга, т.е., другими словами, из операторов J_m и Γ_m "вырезается" конечномерный блок размера $m \times m$. Следовательно, выбирая подходящим образом число m, можно управлять размером блока и величиной $\|\Gamma_m X\|_2$, $X \in \mathfrak{S}_2$. Последний факт будет играть существенную роль при построении оператора преобразования.

Сформулируем необходимую для дальнейшего анализа теорему о подобии исходного оператора и оператора, имеющего блочно-диагональную структуру. Для этого введём в рассмотрение оператор B следующего вида:

$$\widetilde{B} = J_m B + B\Gamma_m B - (\Gamma_m B)J_m B - (\Gamma_m B)(I + \Gamma_m B)^{-1}(B\Gamma_m B - (\Gamma_m B)J_m B). \tag{2}$$

При этом заметим, что $\widetilde{B} \in \mathfrak{S}_2$ (см. [12, теорема 17]).

Теорема 1. *Существует такое достаточно большое число m, что выполнены условия*

$$\|\Gamma_m B\|_2 \leqslant 1/2, \quad \|\widetilde{B}\|_2 < \pi^2(2m+1). \tag{3}$$

Тогда оператор L^* подобен оператору $L_0 - J_m\widetilde{X}$, где $\widetilde{X} \in \mathfrak{S}_2$ – решение нелинейного уравнения

$$X = \widetilde{B} + \widetilde{B}\Gamma_m X - (\Gamma_m X)J_m\widetilde{B} - (\Gamma_m X)J_m(\widetilde{B}\Gamma_m X). \tag{4}$$

Для доказательства приведённой теоремы достаточно полностью повторить рассуждения из работы [12, теорема 18], в которой эта теорема установлена для случая $p = 0$. Поскольку $p \in L_2(0,1)$, то основные отличия в доказательствах этих теорем носят исключительно технический характер.

Прокомментируем содержание теоремы. Первое условие из (3) обеспечивает обратимость оператора $I + \Gamma_m B$. Этот оператор будет служить оператором преобразования подобия. Второе условие из (3) отвечает за разрешимость уравнения (4). Оба условия выполняются при подходящем выборе числа m. Так как J_m является проектором, то теорема 1 является теоремой о подобии исходного оператора L^* оператору блочно-диагонального вида $L_0 - J_m\widetilde{X}$. Поскольку спектры у подобных операторов совпадают, то дальнейший анализ мы будем проводить уже с оператором $L_0 - J_m\widetilde{X}$. Следующий результат посвящён вычислению собственных значений этого оператора. Всюду ниже общим символом $M > 0$ обозначаются различные положительные постоянные.

Теорема 2. *Пусть число m выбрано достаточно большим. Тогда оператор $L_0 - J_m\widetilde{X}$ является оператором с дискретным спектром, который совпадает со спектром оператора*

$$L_0 - J_m\widetilde{X} = L_0 - P_{(m)}\widetilde{X}P_{(m)} - \sum_{j \geqslant m+1} P_j\widetilde{X}P_j.$$

При этом

$$\sigma(L_0 - J_m\widetilde{X}) = \sigma_{(m)} \bigcup \Bigg(\bigcup_{j \geqslant m+1} \sigma_j \Bigg), \tag{5}$$

где $\sigma_{(m)}$ и σ_j – спектры сужений оператора $L_0 - J_m\widetilde{X}$ на инвариантные подпространства $\mathcal{H}_{(m)} = \operatorname{Im} P_{(m)}$ и $\mathcal{H}_j = \operatorname{Im} P_j$ соответственно. Каждое из множеств σ_n не более чем двухточечно и совпадает со спектром $\widetilde{\lambda}_n^{\pm}$ матрицы $\mathcal{A}_n$ вида

$$\mathcal{A}_n = 4\pi^2 n^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \mathcal{B}_n + \mathcal{C}_n, \quad \text{где} \quad \mathcal{B}_n = \begin{pmatrix} (\widetilde{B}e_{-n}, e_{-n}) & (\widetilde{B}e_n, e_{-n}) \\ (\widetilde{B}e_{-n}, e_n) & (\widetilde{B}e_n, e_n) \end{pmatrix}, \tag{6}$$

и при $n \geqslant m+1$ величина $\|\mathcal{C}_n\|_2$ удовлетворяет оценкам

$$\|\mathcal{C}_n\|_2 = \|J_m(\widetilde{X} - \widetilde{B})\|_2 \leqslant \frac{M}{n}\|\widetilde{B}P_n - P_n\widetilde{B}P_n\|_2. \tag{7}$$

Сформулированная теорема доказана в работе [12, теорема 12] для произвольного блочно-диагонального возмущения из класса $\mathfrak{S}_2$. По теореме 1 оператор $J_m\widetilde{X}$ принадлежит классу $\mathfrak{S}_2$. Следовательно, теорема 2 имеет место и в рассматриваемой ситуации. Она будет основой для доказательства результатов данной работы, которые мы проведём в следующем пункте.

2. Основные результаты. Перейдём к анализу спектральных свойств оператора $L_0 - J_m\widetilde{X}$ (следовательно, и оператора L^*), а также получим теоремы об асимптотике собственных значений и об оценках отклонений спектральных проекторов.

По теореме 2 для вычисления асимптотики собственных значений оператора $L_0 - J_m\widetilde{X}$ достаточно вычислить величины, которые входят в матрицы $\mathcal{B}_n$ и $\mathcal{C}_n$, а также собственные значения матрицы $\mathcal{A}_n$. Соответственно для получения асимптотики собственных значений исходного оператора L достаточно применить операцию комплексного сопряжения. Что касается оценок отклонений спектральных проекторов, то здесь мы снова будем опираться на известную ранее технику.

Итак, перейдём к формулировке и доказательству основных результатов работы. Стандартным образом через p_n и q_n обозначим коэффициенты Фурье функций p и q соответственно:

$$p_n = \int\limits_0^1 p(x)e^{-i2\pi nx}\,dx, \quad q_n = \int\limits_0^1 q(x)e^{-i2\pi nx}\,dx, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Первая теорема посвящена асимптотике собственных значений оператора L.

Теорема 3. *При достаточно большом числе n для собственных значений $\widetilde{\lambda}_n^{\pm}$ оператора L имеет место следующая асимптотическая оценка:*

$$\left|\widetilde{\lambda}_n^{\pm} - 4\pi^2n^2 - q_0 - \frac{\overline{p}_n + \overline{p}_{-n}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{4(q_{2n} + \overline{p}_{-n})(q_{-2n} + \overline{p}_n) + (\overline{p}_{-n} - \overline{p}_n)^2}\right| \leqslant M\gamma_n n^{-1}, \qquad (8)$$

где $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – некоторая суммируемая с квадратом последовательность.

Доказательство. По теореме 2 оператор $L_0 - J_m\widetilde{X}$ является оператором с дискретным спектром и имеет место представление (5). Следовательно, по теореме 1 точно такими же свойствами обладает и оператор L^*.

Опишем множества, которые входят в формулу (5). Используя представление (2), запишем оператор $L_0 - J_m\widetilde{X}$ в следующем виде:

$$L_0 - J_m\widetilde{X} = L_0 - J_m(\widetilde{X} - \widetilde{B} + \widetilde{B}) =$$

$$= L_0 - J_m\widetilde{B} - J_m(\widetilde{X} - \widetilde{B}) = L_0 - JB - J(B\Gamma B) - J(\widetilde{X} - \widetilde{B}) + T + C. \qquad (9)$$

Оператор

$$T \equiv JB - J_mB + J(B\Gamma B) - J_m(B\Gamma_m B) + J(X_* - \widetilde{B}) - J_m(X_* - \widetilde{B})$$

имеет конечный ранг, а оператор C содержит в себе все оставшиеся члены из представления (2). Конкретный их вид несущественен, поскольку в асимптотике собственных значений члены, которые отвечают операторам T и C, попадут в остаток. Заметим, что слагаемые, входящие в формулу (9), уже зависят от известного оператора B.

Проведём анализ спектральных асимптотик матрицы $\mathcal{A}_n$ вида (6). Вычислим величины, входящие в указанную формулу. Согласно неравенству (7) для анализа матрицы $\mathcal{C}_n$ необходимо оценить величину $\|\widetilde{B}P_n - P_n\widetilde{B}P_n\|_2$. Применим проектор P_n сначала справа, а затем справа и слева к равенству (2) и вычтем полученные равенства. Тогда получим

$$\widetilde{B}P_n - P_n\widetilde{B}P_n = (B\Gamma_m B)P_n - (\Gamma_m B)P_nBP_n - P_n(B\Gamma_m B)P_n +$$

$$+ (P_n(\Gamma_m B) - \Gamma_m B)(I + \Gamma_m B)^{-1}((B\Gamma_m B)P_n - (\Gamma_m B)P_n B P_n).$$

Оценим обе части последнего равенства по норме идеала операторов Гильберта–Шмидта. Используя первое условие из (3), приходим к следующим соотношениям:

$$\|\widetilde{B}P_n - P_n\widetilde{B}P_n\|_2 \leqslant \|(B\Gamma_m B)P_n\|_2 + \|(\Gamma_m B)P_n\|_2\|P_n B P_n\|_2 + \|P_n(B\Gamma_m B)P_n\|_2 +$$

$$+ \frac{\|P_n(\Gamma_m B)\|_2 + \|\Gamma_m B\|_2}{1 - \|\Gamma_m B\|_2}(\|(B\Gamma_m B)P_n\|_2 + \|(\Gamma_m B)P_n\|_2\|P_n B P_n\|_2) \leqslant$$

$$\leqslant 2\|(B\Gamma_m B)P_n\|_2 + \|(\Gamma_m B)P_n\|_2\|P_n B P_n\|_2 +$$

$$+ (2\|P_n(\Gamma_m B)\|_2 + 1)(\|(B\Gamma_m B)P_n\|_2 + \|(\Gamma_m B)P_n\|_2\|P_n B P_n\|_2). \tag{10}$$

Теперь получим оценки величин $\|(\Gamma_m B)P_n\|_2$ и $\|(B\Gamma_m B)P_n\|_2$. Для этого сначала найдём представление 2×2-матрицы, которая порождается оператором B. Имеют место равенства

$$(Be_{-j}, e_{-k}) = \int\limits_0^1 (-\overline{q}(x)e^{-i2\pi jx} - p(x))e^{i2\pi kx}\,dx =$$

$$= -\int\limits_0^1 \overline{q}(x)e^{i2\pi(k-j)x}\,dx - \int\limits_0^1 p(x)e^{i2\pi kx}\,dx = -\overline{q}_{k-j} - p_{-k}, \quad k, j \in \mathbb{Z}_+.$$

Повторяя проведённые рассуждения, получаем следующее представление матрицы оператора B:

$$(B)_{kj} = \begin{pmatrix} (\widetilde{B}e_{-j}, e_{-k}) & (\widetilde{B}e_j, e_{-k}) \\ (\widetilde{B}e_{-j}, e_k) & (\widetilde{B}e_j, e_k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\overline{q}_{k-j} - p_{-k} & -\overline{q}_{k+j} - p_{-k} \\ -\overline{q}_{-j-k} - p_k & -\overline{q}_{j-k} - p_k \end{pmatrix}, \quad k, j \in \mathbb{Z}_+. \tag{11}$$

Из второй формулы в (1) следует, что матрица оператора ΓB имеет вид

$$(\Gamma B)_{kj} = \frac{1}{4\pi^2(k^2 - j^2)} \begin{pmatrix} -\overline{q}_{k-j} - p_{-k} & -\overline{q}_{k+j} - p_{-k} \\ -\overline{q}_{-j-k} - p_k & -\overline{q}_{j-k} - p_k \end{pmatrix}, \quad k \neq j, \quad k, j \in \mathbb{Z}_+. \tag{12}$$

Это представление даёт возможность оценить $\|(\Gamma_m B)P_n\|_2$. Справедливы следующие соотношения:

$$\|(\Gamma_m B)P_n\|_2^2 = \frac{1}{16\pi^4}\sum_{k\neq n}\left(\frac{|\overline{q}_{k-n} + p_{-k}|^2}{(k^2 - n^2)^2} + \frac{|\overline{q}_{k+n} + p_{-k}|^2}{(k^2 - n^2)^2} + \frac{|\overline{q}_{-n-k} + p_k|^2}{(k^2 - n^2)^2} + \frac{|\overline{q}_{n-k} + p_k|^2}{(k^2 - n^2)^2}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{8\pi^4 n^2}\sum_{k\neq n}\left(\frac{|\overline{q}_{k-n}|^2 + |\overline{q}_{k+n}|^2 + |\overline{q}_{-n-k}|^2 + |\overline{q}_{n-k}|^2}{(k-n)^2} + \frac{2(|p_{-k}|^2 + |p_k|^2)}{(k-n)^2}\right) \leqslant \frac{\|p\|^2 + \|q\|^2}{6\pi^2 n^2}.$$

Такие же рассуждения имеют место и для оператора $P_n(\Gamma_m B)$. Таким образом, выполняются оценки

$$\|P_n(\Gamma_m B)\|_2 \leqslant \frac{M}{n}, \quad \|(\Gamma_m B)P_n\|_2 \leqslant \frac{M}{n}. \tag{13}$$

Перейдём к оценке величины $\|(B\Gamma_m B)P_n\|_2$. Используя равенства (11) и (12), получаем следующее представление:

$$(B\Gamma B)_{kj} = \frac{1}{4\pi^2}\sum_{\substack{l\in\mathbb{Z} \\ l\neq\pm j}} \frac{1}{l^2 - j^2}\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}, \tag{14}$$

где

$$k_{11} = (\overline{q}_{k-l} + p_{-k})(\overline{q}_{l-j} + p_{-l}) + (\overline{q}_{k+l} + p_{-k})(\overline{q}_{-j-l} + p_l),$$
$$k_{12} = (\overline{q}_{k-l} + p_{-k})(\overline{q}_{l+j} + p_{-l}) + (\overline{q}_{k+l} + p_{-k})(\overline{q}_{j-l} + p_l),$$
$$k_{21} = (\overline{q}_{-k-l} + p_k)(\overline{q}_{l-j} + p_{-l}) + (\overline{q}_{l-k} + p_k)(\overline{q}_{-j-l} + p_l),$$
$$k_{22} = (\overline{q}_{-k-l} + p_k)(\overline{q}_{l+j} + p_{-l}) + (\overline{q}_{l-k} + p_k)(\overline{q}_{j-l} + p_l).$$

Чтобы понять характер оценок, мы не будем анализировать все имеющиеся слагаемые, а остановимся отдельно только на двух из них. С остальными слагаемыми метод работы будет точно таким же. Действие оператора $(B\Gamma_m B)P_n$ означает, что в выражении (14) коэффициент j заменяется на n. При этом при вычислении нормы суммирование будем проводить только по аргументу k. Итак, в выражении для элемента k_{11} раскрываем скобки и анализируем первое получившееся слагаемое. Используя неравенство Гёльдера, получаем

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}_+}\Bigl|\sum_{l\neq\pm n}\frac{\overline{q}_{k-l}\overline{q}_{l-n}}{l^2-n^2}\Bigr|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+}\Bigl|\sum_{s\neq 0,-2n}\frac{\overline{q}_{k-n-s}\overline{q}_s}{s(s+2n)}\Bigr|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}_+}\Bigl(\sum_{s\neq 0,-2n}\frac{|\overline{q}_{k-n-s}|^2}{s^2}\Bigr)\Bigl(\sum_{s\neq 0,-2n}\frac{|\overline{q}_s|^2}{(s+2n)^2}\Bigr) \leqslant$$
$$\leqslant \Bigl(\sum_{k\in\mathbb{Z}_+}\max_{s\neq 0,-2n}|\overline{q}_{k-n-s}|^2\Bigr)\Bigl(\sum_{s\neq 0,-2n}\frac{1}{s^2}\Bigr)\Bigl(\sum_{l\neq 0,2n}\frac{|\overline{q}_{l-2n}|^2}{l^2}\Bigr) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\pi^2\|q\|^2}{3}\Bigl(\sum_{\substack{|l|<2n\\ l\neq 0}}\frac{|\overline{q}_{l-2n}|^2}{l^2} + \sum_{|l|\geqslant 2n+1}\frac{|\overline{q}_{l-2n}|^2}{l^2}\Bigr) \leqslant \frac{\pi^2\|q\|^2}{3}\alpha(2n)^2,$$

где последовательность $\alpha(2n)$ является суммируемой с квадратом и имеет вид

$$\alpha(2n) = \Bigl(\sum_{\substack{|l|<2n\\ l\neq 0}}\frac{\widetilde{q}(l-2n)+\widetilde{q}(l+2n)}{l^2} + \frac{\|q\|^2}{(2n+1)^2}\Bigr)^{1/2}, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Здесь $\widetilde{q}(n) = \max\{|\overline{q}_n|^2, |\overline{q}_{-n}|^2\}$, $n\in\mathbb{N}$.

Теперь рассмотрим ещё одно слагаемое, которое получается при раскрытии скобок в выражении для элемента k_{11}. Снова используем неравенство Гёльдера. Справедливы следующие оценки:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}_+}\Bigl|\sum_{l\neq\pm n}\frac{p_{-k}p_{-l}}{l^2-n^2}\Bigr|^2 \leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}_+}|p_{-k}|^2\Bigl(\sum_{l\neq\pm n}\frac{|p_{-l}|^2}{(l+n)^2}\Bigr)\Bigl(\sum_{l\neq\pm n}\frac{1}{(l-n)^2}\Bigr) \leqslant \frac{\pi^2\|p\|^4}{3n^2}.$$

Остальные слагаемые, которые получаются при раскрытии скобок в выражении (14), оцениваются теми же величинами. Для этого мы просто повторим описанную выше процедуру. Тогда будем иметь

$$\|(B\Gamma_m B)P_n\|_2 \leqslant M(\alpha(2n)+1/n) \leqslant M\gamma_n, \tag{15}$$

где $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – суммируемая с квадратом последовательность.

Учитывая последовательно неравенства (13) и (15) сначала в оценке (10), а затем в итоговом неравенстве в (7), получаем

$$\|\mathcal{C}_n\|_2 = \|J(\widetilde{X}-\widetilde{B})\|_2 \leqslant \frac{M}{n}\|\widetilde{B}P_n - P_n\widetilde{B}P_n\|_2 \leqslant \frac{M\gamma_n}{n}. \tag{16}$$

Кроме того, эта же оценка будет справедлива и для операторов $J(B\Gamma B)$, C и T (см. более подробно в [12, § 4]). Следовательно, слагаемые в асимптотике собственных значений, получаемые от операторов $J(B\Gamma B)$, C и T, попадут в остаточный член.

Перейдём к рассмотрению матрицы $\mathcal{B}_n$, которая вносит существенный вклад в асимптотику собственных значений. Указанная матрица соответствует действию оператора JB в представлении (9). Напомним, что оператор J является диагонализирующим. Следовательно, для вычисления матрицы $\mathcal{B}_n$ необходимо положить $k = j = n$ в формуле (11). Тогда матрица $\mathcal{A}_n$ из (6) принимает следующий вид:

$$\mathcal{A}_n = 4\pi^2 n^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \overline{q}_0 + p_{-n} & \overline{q}_{2n} + p_{-n} \\ \overline{q}_{-2n} + p_n & \overline{q}_0 + p_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi_n & 0 \\ 0 & \xi_n \end{pmatrix},$$

где матрица $\operatorname{diag}(\xi_n, \xi_n)$, $n \in \mathbb{N}$, допускает оценку (16). Вычисляя собственные значения матрицы $\mathcal{A}_n$ и беря комплексное сопряжение, приходим при достаточно большом числе n к асимптотической оценке (8). Теорема доказана.

В работе [5] рассматривался случай дифференциального оператора второго порядка с $q = 0$. Приведём соответствующий результат в этой ситуации. Повторяя все рассуждения, которые проведены в доказательстве теоремы 3, получаем

Следствие 1. *Если $q = 0$ в операторе L, то его собственные значения для достаточно большого n имеют вид*

$$\widetilde{\lambda}_n^{(1)} = 4\pi^2 n^2 + \mathcal{O}(n^{-2}), \quad \widetilde{\lambda}_n^{(2)} = 4\pi^2 n^2 + \overline{p}_n + \overline{p}_{-n} + \mathcal{O}(n^{-2}).$$

Результаты следствия 1 уточняют полученную ранее асимптотику собственных значений из работ [5–7].

В статье [13] рассматривался нагруженный дифференциальный оператор L^* с коэффициентом $p(x) = \cos(\pi x)$. Приведём ещё одно следствие теоремы 3, которое описывает асимптотические оценки собственных значений оператора L в этом частном случае.

Следствие 2. *Пусть $q(x) = 0$, $p(x) = \cos(\pi x)$. Тогда для достаточно большого n собственные значения $\widetilde{\lambda}_n^{(1)}$ и $\widetilde{\lambda}_n^{(2)}$ имеют вид*

$$\widetilde{\lambda}_n^{(1)} = 4\pi^2 n^2 + \mathcal{O}(n^{-2}), \quad \widetilde{\lambda}_n^{(2)} = 4\pi^2 n^2 - \frac{i2ne^{i2\pi n}}{\pi(1-4n^2)} + \mathcal{O}(n^{-2}).$$

Перейдём, наконец, к последнему результату, в котором даны оценки отклонений спектральных проекторов. Возьмём число m таким, как в теореме 1. По теореме 2 оператор L^* подобен оператору $L_0 - J_m\widetilde{X}$, спектр $\sigma(L_0 - J_m\widetilde{X})$ которого представим в виде (5). Через $\widetilde{P}_n$, $n \geqslant m+1$, обозначим проектор Рисса, который построен по множеству $\sigma_n = \{\overline{\widetilde{\lambda}}_n^+\} \bigcup \{\overline{\widetilde{\lambda}}_n^-\}$. Указанный проектор является проектором на двумерное подпространство $\mathcal{H}_n$, описанное в теореме 2. Имеет место

Теорема 4. *Для $n \geqslant m+1$ справедлива оценка $\|\widetilde{P}_n - P_n\|_2 \leqslant Mn^{-1}$. Более того, система двумерных подпространств $\{\mathcal{H}_n\}_{n \geqslant m+1}$ образует базис Бари из подпространств в пространстве $L_2(0,1)$.*

Доказательство. Необходимая оценка в случае $p = 0$ установлена в [12, теорема 5]. Для доказательства в рассматриваемом случае необходимо повторить те же самые рассуждения. Так как $p \in L_2(0,1)$, то добавление аддитивного возмущения того же класса будет влиять только на постоянную $M > 0$, а не на порядок оценки. Базисность Бари из двумерных подпространств непосредственно следует из этой оценки и теоремы Бари–Маркуса (см. [10, гл. 6, теорема 5.2]). Теорема доказана.

Автор выражает благодарность В.В. Щербакову, А.С. Макину и М.А. Садыбекову за ценные замечания, которые способствовали улучшению статьи.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 20-11-19995).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Feller W.* The parabolic differential equations and the associated semi-groups of transformations // Ann. Math. 1952. V. 55. № 4. P. 468-519.
2. *Feller W.* Diffusion processes in one dimension // Trans. Amer. Math. Soc. 1954. V. 77. P. 1–30.
3. *Шкаликов А.А.* О базисности собственных функций обыкновенных дифференциальных операторов с интегральными краевыми условиями // Вестн. Моск. гос. ун-та. Сер. 1. Мат., мех. 1982. № 6. С. 12–21.
4. *Баскаков А.Г., Кацаран Т.К.* Спектральный анализ интегро-дифференциальных операторов с нелокальными краевыми условиями // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24. № 8. С. 1424–1433.
5. *Макин А.С.* О нелокальном возмущении периодической задачи на собственные значения // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42. № 4. С. 560–562.
6. *Садыбеков М.А., Иманбаев Н.С.* О базисности корневых функций периодической задачи с интегральным возмущением краевого условия // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48. № 6. С. 889–893.
7. *Imanbaev N.S., Sadybekov M.A.* On spectral properties of a periodic problem with an integral perturbation of the boundary condition // Eurasian Math. J. 2013. V. 4. № 3. P. 53–62.
8. *Садыбеков М.А., Иманбаев Н.С.* Регулярный дифференциальный оператор с возмущённым краевым условием // Мат. заметки. 2017. Т. 101. № 5. С. 768–778.
9. *Скубачевский А.Л., Стеблов Г.М.* О спектре дифференциальных операторов с областью определения, не плотной в $L_2(0,1)$ // Докл. АН СССР. 1991. Т. 321. № 6. С. 1158–1163.
10. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Введение в теорию линейных несамосопряжённых операторов в гильбертовом пространстве. М., 1965.
11. *Krall A.M.* The development of general differential and general differential-boundary systems // Rocky Mountain J. Math. 1975. V. 5. № 4. P. 493–542.
12. *Баскаков А.Г., Поляков Д.М.* Метод подобных операторов в спектральном анализе оператора Хилла с негладким потенциалом // Мат. сб. 2017. Т. 208. № 1. С. 3–47.
13. *Ломов И.С., Чернов В.В.* Исследование спектральных свойств одного нагруженного дифференциального оператора второго порядка // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 7. С. 861–865.

Южный математический институт –
филиал Владикавказского научного центра РАН,
Институт математики с вычислительным центром
Уфимского федерального исследовательского центра РАН

Поступила в редакцию 11.06.2020 г.
После доработки 24.07.2020 г.
Принята к публикации 13.10.2020 г.