ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 1, с. 22–42

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.911+517.925.51

ГЛОБАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ, ОГРАНИЧЕННОСТЬ И УСТОЙЧИВОСТЬ ИХ РЕШЕНИЙ. I

© 2021 г. М. С. Филипковская

Для нестационарных полулинейных дифференциально-алгебраических уравнений доказаны теоремы о существовании и единственности глобальных решений, теоремы об устойчивости по Лагранжу (ограниченность глобальных решений), диссипативности (предельная ограниченность решений) и неустойчивости по Лагранжу (отсутствие глобальных решений).

DOI: 10.31857/S0374064121010040

Введение. Дифференциально-алгебраические уравнения (ДАУ), которые также называют вырожденными дифференциальными уравнениями (ДУ), алгебро-дифференциальными системами (АДС) и дескрипторными уравнениями, являются удобной абстрактной формой записи многих динамических моделей реальных процессов и объектов в радиоэлектронике, экономике, робототехнике, теории управления, химии и экологии [1–4]. Дифференциальным уравнениям этого типа посвящено большое число работ, например, монографии [1–4] и статьи [5–7] (см. также приведённую в них библиографию), где представлены различные подходы к их исследованию. Основная часть работ, посвящённых полулинейным, квазилинейным и нелинейным ДАУ, связана с исследованием их локальной разрешимости, в том числе с изучением структуры ДАУ, и с разработкой численных методов их решения. Гораздо меньшее число работ посвящено глобальной разрешимости этих уравнений. Достаточно много работ связано с исследованием устойчивости по Ляпунову положения равновесия ДАУ (см., например, [2–4] и библиографию в них). В [2–4] представлены теоремы об устойчивости и асимптотической устойчивости по Ляпунову для полулинейных и нелинейных ДАУ, использующие как классические (в смысле теории устойчивости), так и различные специфические (связанные со спецификой подходов к исследованию ДАУ) ограничения. В [7] изучалась робастная устойчивость стационарных линейных ДАУ. Условия для глобальной разрешимости полулинейных ДАУ с регулярным характеристическим пучком операторов и регулярных нелинейных ДАУ представлены в [1, 3]. Различные условия глобальной разрешимости стационарных полулинейных ДАУ с регулярным характеристическим пучком получены в [5, 8, 9]. В работах [10] и [11] установлены условия устойчивости по Лагранжу, которые также включают условия глобальной разрешимости, для стационарных полулинейных ДАУ с регулярным и сингулярным (нерегулярным) характеристическими пучками соответственно.

В настоящей работе рассматриваются неявные обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) (т.е. ОДУ, не разрешённые относительно старшей производной неизвестной функции) вида

$$\frac{d}{dt}[A(t)x(t)] + B(t)x(t) = f(t, x(t)), \quad A(t)\frac{d}{dt}x(t) + B(t)x(t) = f(t, x(t)),$$

где линейный оператор $A(t)$ (зависящий от параметра t) в общем случае вырожден (в этом случае рассматриваемые ДУ называют нестационарными полулинейными ДАУ) и линейный оператор $B(t)$ также может быть вырожденным. Получены теоремы о глобальной разрешимости, устойчивости по Лагранжу, диссипативности (предельной ограниченности решений) и неустойчивости по Лагранжу, которые представлены в части 1 статьи, а также теоремы об

устойчивости и асимптотической устойчивости по Ляпунову, асимптотической устойчивости в целом и неустойчивости по Ляпунову, которые представлены в части 2 статьи. В части 2 продемонстрировано также применение теорем о глобальной разрешимости для решения прикладной задачи и предложен некоторый конкретный вид для функции V, присутствующей в полученных теоремах. В отличие от теорем о глобальной разрешимости и устойчивости (асимптотической устойчивости) по Ляпунову из [3] в полученных теоремах не требуется, чтобы рассматриваемые ДАУ являлись регулярными ДАУ индекса податливости 1 (индекса преобразуемости, "tractability index" в оригинале), т.е. чтобы пучок $\lambda A(t)+B(t)-\partial f(t,x)/\partial x$ являлся регулярным пучком индекса 1 (для более точного сравнения см. определение "tractability index" для регулярных ДАУ в [3, с. 91, 319–320] и комментарии относительно его связи с другими понятиями индекса, которые даны в [3] и [10, раздел 2]), а требуется, только чтобы пучок $\lambda A(t)+B(t)$, который отвечает линейной (левой) части рассматриваемых ДАУ, был регулярным пучком индекса не выше 1 (см. определение в п. 1). Заметим, что регулярный пучок $\lambda A(t)+B(t)$ индекса не выше 1 удовлетворяет критерию "ранг-степень" (см. определение в [2, с. 30–31]) для каждого t. Также в полученных теоремах не требуется, чтобы рассматриваемые ДАУ являлись "сжимающими" (см. [3, с. 379]). Отметим, что в полученных теоремах о глобальной разрешимости не используется глобальное условие Липшица, как, например, в [1], или подобные ограничения, что позволяет использовать теоремы для решения более широких классов прикладных задач. Подробнее это обсуждается в пп. 2.1. Во второй части статьи в п. 5 продемонстрировано применение теорем 2.1, 2.2 о глобальной разрешимости (которые не содержат глобальных условий Липшица) для решения одной задачи по электротехнике, а также показано, что условия теорем могут выполняться для функций, не удовлетворяющих условию утверждения 2.1 о глобальной разрешимости, в котором требуется, чтобы "алгебраическая часть" ДАУ удовлетворяла глобальному условию Липшица по компоненте $P_2(t)x$ переменной x (некоторые условия теорем и утверждения совпадают), а для функций, удовлетворяющих условиям утверждения, условия теорем также будут выполнены. Вообще, из доказательства утверждения 2.1 следует, что если его условия выполнены, то выполнены и условия теорем 2.1, 2.2. Отметим также, что в полученных теоремах по сравнению с соответствующими теоремами из [2, 3] ослаблены требования к гладкости нелинейной части ДАУ.

Устойчивость по Лагранжу ДАУ (диссипативность ДАУ) означает существование глобальных решений для всех согласованных начальных значений, т.е. для всех возможных начальных значений, и ограниченность (предельную ограниченность) всех решений. Таким образом, в отличие от устойчивости по Ляпунову, устойчивость по Лагранжу и диссипативность ДАУ можно рассматривать как в определённом смысле устойчивость всего ДАУ (т.е. в определённом смысле устойчивость всех его решений), а не только отдельного, исследуемого на устойчивость, решения.

В работе применяются нестационарные спектральные проекторы [12, 1], позволяющие привести полулинейные ДАУ к эквивалентным полуявным ДАУ. Также используются второй метод Ляпунова и основанные на нём методы Ж. Ла-Салля [13] и Т. Йошизавы [14] для исследования продолжаемости решений, устойчивости по Лагранжу и диссипативности явных ОДУ (т.е. ОДУ, разрешённых относительно старшей производной неизвестной функции). При доказательстве теоремы об асимптотической устойчивости (асимптотической устойчивости в целом положения равновесия) ДАУ используется теорема Барбашина–Красовского об асимптотической устойчивости явных ОДУ [15].

1. Постановка задачи, определения и предварительные сведения. Рассмотрим неявные дифференциальные уравнения

$$\frac{d}{dt}[A(t)x(t)]+B(t)x(t)=f(t,x(t)),\quad t\in[t_+,\infty), \tag{1.1}$$

$$A(t)\frac{d}{dt}x(t)+B(t)x(t)=f(t,x(t)),\quad t\in[t_+,\infty), \tag{1.2}$$

и начальное условие

$$x(t_0)=x_0, \tag{1.3}$$

где $t_0 \geqslant t_+ \geqslant 0$, $A, B\colon [t_+, \infty) \to \mathrm{L}(\mathbb{R}^n)$ (через $\mathrm{L}(X, Y)$ обозначается векторное пространство непрерывных линейных операторов, действующих из векторного пространства X в векторное пространство Y; $\mathrm{L}(X, X) = \mathrm{L}(X)$) и $f\colon [t_+, \infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Операторы $A(t)$ и $B(t)$ могут быть вырожденными (необратимыми). Уравнения типа (1.1), (1.2) с вырожденным (при некотором t) оператором $A(t)$ называют *вырожденными дифференциальными уравнениями* или *дифференциально-алгебраическими уравнениями*. В терминологии ДАУ уравнения вида (1.1), (1.2) принято называть *полулинейными*, однако их иногда называют нелинейными из-за наличия нелинейной функции f. Поскольку операторы $A(t)$, $B(t)$ нестационарны, то уравнения (1.1), (1.2) называются *нестационарными* полулинейными ДАУ или нестационарными вырожденными дифференциальными уравнениями. В дальнейшем, для общности, уравнения (1.1) и (1.2), где $A(t)$ $(A\colon [t_+, \infty) \to \mathrm{L}(\mathbb{R}^n))$ – произвольный (не обязательно вырожденный) оператор, будем называть *нестационарными полулинейными ДАУ*.

Левой (линейной) части уравнений (1.1) и (1.2) отвечает пучок операторов $\lambda A(t) + B(t)$. Пусть для каждого $t \geqslant t_+$ пучок регулярен, т.е. для каждого $t \geqslant t_+$ множество его регулярных точек не пусто (множеством регулярных точек пучка $\lambda A(t) + B(t)$ является множество регулярных точек его комплексного расширения). Для регулярных точек λ существует резольвента $R(\lambda, t) = (\lambda A(t) + B(t))^{-1}$.

В дальнейшем предполагается, что для каждого $t \geqslant t_+$ пучок регулярен и выполнено следующее условие: существуют функции $C_1\colon [t_+, \infty) \to (0, \infty)$ и $C_2\colon [t_+, \infty) \to (0, \infty)$ такие, что для любого $t \in [t_+, \infty)$ выполнена оценка

$$\|R(\lambda, t)\| \leqslant C_1(t), \quad |\lambda| \geqslant C_2(t). \tag{1.4}$$

Условие (1.4) означает, что либо точка $\mu = 0$ является для резольвенты $(A(t) + \mu B(t))^{-1}$ простым полюсом (это эквивалентно тому, что $\lambda = \infty$ является устранимой особой точкой резольвенты $R(\lambda, t)$), либо $\mu = 0$ является регулярной точкой пучка $A(t) + \mu B(t)$.

Согласно [1, с. 181] индексом регулярного пучка $\lambda A + B$, где A, B – стационарные квадратные матрицы, называется наибольшая длина цепочки из собственного и присоединённых векторов пучка матриц $A + \mu B$ в точке $\mu = 0$. Следуя монографии [1], определим индекс пучка $\lambda A(t) + B(t)$.

Если пучок $\lambda A(t) + B(t)$ регулярен для каждого t и удовлетворяет условию (1.4), то он является *регулярным пучком индекса не выше* 1 (т.е. индекса 0 или 1). Если оператор $A(t)$ невырожден для всех t, т.е. $\mu = 0$ является регулярной точкой пучка $A(t) + \mu B(t)$ для каждого t, то $\lambda A(t) + B(t)$ является *регулярным пучком индекса* 0. Если $A(t)$ вырожден для всех t и выполнено условие (1.4) (т.е. $\mu = 0$ является простым полюсом резольвенты $(A(t) + \mu B(t))^{-1}$ для каждого t), то $\lambda A(t) + B(t)$ является *регулярным пучком индекса* 1.

Ниже приведены сведения из [12; 1, с. 82–84], которые будут использоваться в дальнейшем. Если регулярный пучок удовлетворяет условию (1.4), то для каждого $t \in [t_+, \infty)$ существуют две пары взаимно дополнительных проекторов

$$P_1(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\lambda| = C_2(t)} R(\lambda, t)\, d\lambda\, A(t), \quad P_2(t) = I_{\mathbb{R}^n} - P_1(t),$$

$$Q_1(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\lambda| = C_2(t)} A(t) R(\lambda, t)\, d\lambda, \quad Q_2(t) = I_{\mathbb{R}^n} - Q_1(t) \tag{1.5}$$

($P_i(t)P_j(t) = \delta_{ij} P_i(t)$, $P_1(t) + P_2(t) = I_{\mathbb{R}^n}$, и $Q_i(t)Q_j(t) = \delta_{ij} Q_i(t)$, $Q_1(t) + Q_2(t) = I_{\mathbb{R}^n}$, $I_{\mathbb{R}^n}$ – тождественный оператор в $\mathbb{R}^n$, δ_{ij} – символ Кронекера), которые порождают прямые разложения пространств

$$\mathbb{R}^n = X_1(t) \dot{+} X_2(t), \quad X_j(t) = P_j(t)\mathbb{R}^n, \quad \mathbb{R}^n = Y_1(t) \dot{+} Y_2(t), \quad Y_j(t) = Q_j(t)\mathbb{R}^n, \quad j = 1, 2, \tag{1.6}$$

такие, что пары подпространств $X_1(t)$, $Y_1(t)$ и $X_2(t)$, $Y_2(t)$ инвариантны относительно $A(t)$, $B(t)$ (т.е. $A(t), B(t)\colon X_j(t) \to Y_j(t)$). Суженные операторы $A_j(t) = A(t)|_{X_j(t)}\colon X_j(t) \to Y_j(t)$,

$B_j(t) = B(t)|_{X_j(t)}\colon X_j(t) \to Y_j(t)$, $j = 1,2$, таковы, что $A_2(t) = 0$ и существуют $A_1^{-1}(t)$ (если $X_1(t) \neq \{0\}$) и $B_2^{-1}(t)$ (если $X_2(t) \neq \{0\}$). Подпространства $X_j(t)$, $Y_j(t)$ таковы, что $Y_1(t) = \mathcal{R}(A(t))$ ($\mathcal{R}(A(t))$ – область значений $A(t)$), $X_2(t) = \operatorname{Ker} A(t)$, $Y_2(t) = B(t)X_2(t)$ и $X_1(t) = R(\lambda,t)Y_1(t)$, $|\lambda| \geqslant C_2(t)$. Спектральные проекторы (1.5) являются вещественными (поскольку $A(t)$ и $B(t)$ вещественные) и удовлетворяют следующим свойствам:

$$A(t)P_1(t)=Q_1(t)A(t)=A(t), \quad A(t)P_2(t)=Q_2(t)A(t)=0, \quad B(t)P_j(t)=Q_j(t)B(t), \quad j=1,2. \tag{1.7}$$

Используя спектральные проекторы, для каждого $t \in [t_+,\infty)$ получаем вспомогательный оператор

$$G(t) = A(t) + B(t)P_2(t) = A(t) + Q_2(t)B(t) \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^n) \tag{1.8}$$

такой, что $G(t)\colon X_j(t) \to Y_j(t)$ ($G(t)X_j(t) = Y_j(t)$) [12; 1, с. 82–84]. Этот оператор имеет обратный $G^{-1}(t) = A_1^{-1}(t)Q_1(t) + B_2^{-1}(t)Q_2(t) \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^n)$ ($G^{-1}(t)\colon Y_j(t) \to X_j(t)$) со свойствами

$$G^{-1}(t)A(t)P_1(t) = G^{-1}(t)A(t) = P_1(t), \quad G^{-1}(t)B(t)P_2(t) = P_2(t),$$

$$A(t)G^{-1}(t)Q_1(t) = A(t)G^{-1}(t) = Q_1(t), \quad B(t)G^{-1}(t)Q_2(t) = Q_2(t).$$

Проекторы $P_i(t)$, $Q_i(t)$ ($i = 1,2$) и операторы $G(t)$, $G^{-1}(t)$ как оператор-функции имеют ту же степень гладкости, что и оператор-функции $A(t)$, $B(t)$ и функция $C_2(t)$ [1, с. 82–84]. Вообще, в [12; 1, с. 82–84] рассматривались оператор-функции (операторы) $A(t)$, $B(t)$ в банаховых пространствах и требовалось, чтобы они были сильно непрерывно дифференцируемыми, тогда $P_i(t)$, $Q_i(t)$, $G(t)$, $G^{-1}(t)$ также будут сильно непрерывно дифференцируемы, но, как известно, в конечномерных пространствах это свойство равносильно непрерывной дифференцируемости в обычном смысле (по норме).

Предположим, что $A, B \in C^1([t_+,\infty),\mathrm{L}(\mathbb{R}^n))$ и $C_2 \in C^1([t_+,\infty),(0,\infty))$, тогда $P_i(t)$, $Q_i(t)$, $G(t)$ и $G^{-1}(t)$ также непрерывно дифференцируемы как оператор-функции на $[t_+,\infty)$ (т.е. $P_i, Q_i, G, G^{-1} \in C^1([t_+,\infty),\mathrm{L}(\mathbb{R}^n))$).

Функцию $x \in C([t_0,t_1),\mathbb{R}^n)$, $[t_0,t_1) \subseteq [t_+,\infty)$, называют *решением уравнения (1.1) на промежутке* $[t_0,t_1)$, если $A(t)x(t)$ непрерывно дифференцируема на $[t_0,t_1)$ и $x(t)$ удовлетворяет уравнению (1.1) на $[t_0,t_1)$. Если функция $x(t)$ дополнительно удовлетворяет начальному условию (1.3), то её называют *решением задачи Коши* (*начальной задачи*) (1.1), (1.3).

Функцию $x \in C^1([t_0,t_1),\mathbb{R}^n)$ называют *решением уравнения (1.2) на* $[t_0,t_1)$, если $x(t)$ удовлетворяет уравнению (1.2) на $[t_0,t_1)$. Если функция $x(t)$ дополнительно удовлетворяет начальному условию (1.3), то её называют *решением задачи Коши* (1.2), (1.3).

Замечание 1.1. Заметим, что $\operatorname{rank} P_j(t) = \operatorname{rank} Q_j(t) = \dim X_j(t) = \dim Y_j(t)$, $j = 1,2$, и $\dim Y_1(t) = \operatorname{rank} A(t)$, и что в силу непрерывности проекторов $P_j(t)$ и $Q_j(t)$ размерности подпространств $X_j(t) = P_j(t)\mathbb{R}^n$, $Y_j(t) = Q_j(t)\mathbb{R}^n$ постоянны (см. [16, с. 34, лемма 4.10]): $\dim X_1(t) = \dim Y_1(t) = \mathrm{const}$ и $\dim X_2(t) = \dim Y_2(t) = \mathrm{const}$ для всех $t \in [t_+,\infty)$. Будем обозначать $\dim X_2(t) = \dim Y_2(t) = d$, тогда $\dim X_1(t) = \dim Y_1(t) = n - d$.

Для каждого t любой вектор $x \in \mathbb{R}^n$ единственным образом представим (относительно разложения (1.6)) в виде

$$x = P_1(t)x + P_2(t)x = x_{p_1}(t) + x_{p_2}(t), \quad x_{p_i}(t) = P_i(t)x \in X_i(t). \tag{1.9}$$

Заметим, что ДАУ (1.1) можно записать в виде

$$A(t)[P_1(t)x(t)]' + A'(t)[P_1(t)x(t)] + B(t)x(t) = f(t,x(t)).$$

Применим к ДАУ (1.1) проекторы $Q_1(t)$ и $Q_2(t)$ и, воспользовавшись свойствами (1.7), получим эквивалентную ему систему

$$A(t)P_1(t)[P_1(t)x(t)]' + Q_1(t)A'(t)P_1(t)x(t) + B(t)P_1(t)x(t) = Q_1(t)f(t,x(t)), \tag{1.10}$$

$$Q_2(t)A'(t)P_1(t)x(t) + B(t)P_2(t)x(t) = Q_2(t)f(t,x(t)). \tag{1.11}$$

Далее применим к системе (1.10), (1.11) оператор $G^{-1}(t)$ и воспользуемся его свойствами и равенством $P_1(t)[P_1(t)x(t)]' = [P_1(t)x(t)]' - P_1'(t)P_1(t)x(t)$, в результате получим эквивалентную систему

$$[P_1(t)x(t)]' = [P_1'(t) - G^{-1}(t)Q_1(t)[A'(t) + B(t)]]P_1(t)x(t) + G^{-1}(t)Q_1(t)f(t, x(t)), \tag{1.12}$$

$$G^{-1}(t)Q_2(t)[f(t, x(t)) - A'(t)P_1(t)x(t)] - P_2(t)x(t) = 0. \tag{1.13}$$

Таким образом, ДАУ (1.1) сведено к эквивалентной системе, состоящей из явного ОДУ (1.12) (относительно $P_1(t)x(t)$) и алгебраического уравнения (1.13). Используя представление (1.9) ($x_{p_i}(t) = P_i(t)x(t)$), запишем систему (1.12), (1.13) в виде

$$x_{p_1}'(t) = [P_1'(t) - G^{-1}(t)Q_1(t)[A'(t) + B(t)]]x_{p_1}(t) + G^{-1}(t)Q_1(t)f(t, x_{p_1}(t) + x_{p_2}(t)), \tag{1.14}$$

$$G^{-1}(t)Q_2(t)[f(t, x_{p_1}(t) + x_{p_2}(t)) - A'(t)x_{p_1}(t)] - x_{p_2}(t) = 0. \tag{1.15}$$

Система (1.14), (1.15) и эквивалентная ей система (1.12), (1.13) являются неавтономными полуявными ДАУ (в общем случае *неавтономными полуявными ДАУ* называют системы вида $\dot{y} = f(t, y, z)$, $0 = g(t, y, z)$).

Теперь применим проекторы $Q_1(t)$ и $Q_2(t)$ к ДАУ (1.2) и получим эквивалентную ему систему

$$A(t)P_1(t)x'(t) + B(t)P_1(t)x(t) = Q_1(t)f(t, x(t)), \tag{1.16}$$

$$B(t)P_2(t)x(t) = Q_2(t)f(t, x(t)). \tag{1.17}$$

Далее применим к системе (1.16), (1.17) оператор $G^{-1}(t)$ и воспользуемся равенством

$$P_1(t)x'(t) = [P_1(t)x(t)]' - P_1'(t)x(t),$$

в результате получим эквивалентную ей систему

$$\begin{gathered} [P_1(t)x(t)]' = G^{-1}(t)[-B(t)P_1(t)x(t) + Q_1(t)f(t, x(t))] + P_1'(t)x(t), \\ G^{-1}(t)Q_2(t)f(t, x(t)) - P_2(t)x(t) = 0. \end{gathered} \tag{1.18}$$

Таким образом, ДАУ (1.2) сведено к эквивалентной системе (1.18). Используя представление (1.9) ($x_{p_i}(t) = P_i(t)x(t)$), запишем систему (1.18) в виде

$$x_{p_1}'(t) = G^{-1}(t)[-B(t)x_{p_1}(t) + Q_1(t)f(t, x_{p_1}(t) + x_{p_2}(t))] + P_1'(t)(x_{p_1}(t) + x_{p_2}(t)), \tag{1.19}$$

$$G^{-1}(t)Q_2(t)f(t, x_{p_1}(t) + x_{p_2}(t)) - x_{p_2}(t) = 0. \tag{1.20}$$

Замечание 1.2. Введём многообразия

$$L_{t_+} = \{(t, x) \in [t_+, \infty) \times \mathbb{R}^n \mid Q_2(t)[A'(t)P_1(t)x + B(t)x - f(t, x)] = 0\}, \tag{1.21}$$

$$\widehat{L}_{t_+} = \{(t, x) \in [t_+, \infty) \times \mathbb{R}^n \mid Q_2(t)[B(t)x - f(t, x)] = 0\}. \tag{1.22}$$

Условие согласования $(t_0, x_0) \in L_{t_+}$ ($(t_0, x_0) \in \widehat{L}_{t_+}$) для начальной точки (t_0, x_0) является одним из необходимых условий существования решения задачи Коши (1.1), (1.3) (задачи Коши (1.2), (1.3)). Начальная точка (t_0, x_0), удовлетворяющая этому условию, называется *согласованной начальной точкой* (соответствующие начальные значения t_0, x_0 называются *согласованными начальными значениями*).

Это замечание следует из эквивалентности ДАУ (1.1) и ДАУ (1.2) соответственно системам (1.10), (1.11) и (1.16), (1.17).

В формулах (1.21), (1.22) число t_+ является параметром. В частности, в дальнейшем будет использоваться обозначение L_T для многообразия, имеющего вид L_{t_+}, где $t_+ = T$.

Очевидно, что графики решений $x(t)$ ДАУ (1.1) и ДАУ (1.2) (т.е. множества точек $(t, x(t))$, где t из области определения решения $x(t)$) должны лежать в многообразиях L_{t_+} и $\widehat{L}_{t_+}$ соответственно.

Напомним некоторые классические определения. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – некоторая область, содержащая начало координат. Функция $W \in C(D, \mathbb{R})$ называется *положительно определённой*, если $W(x) > 0$ при всех $x \neq 0$ и $W(0) = 0$. Функция $V \in C([t_+, \infty) \times D, \mathbb{R})$ называется *положительно определённой*, если $V(t, 0) \equiv 0$ и существует такая положительно определённая функция $W \in C(D, \mathbb{R})$, что $V(t, x) \geqslant W(x)$ при всех $x \neq 0$, $t \in [t_+, \infty)$.

Определение 1.1. Рассмотрим оператор-функцию $H\colon J \to \mathrm{L}(X)$, где X – некоторое линейное конечномерное или гильбертово пространство и $J \subseteq \mathbb{R}$ – некоторый промежуток. Оператор $H(t) \in \mathrm{L}(X)$ $(t \in J)$, являющийся самосопряжённым при каждом $t \in J$, будем называть просто самосопряжённым. По аналогии с определениями из [17, с. 50, 51, 209] введём следующие определения. Самосопряжённый оператор $H(t) \in \mathrm{L}(X)$ $(t \in J)$ называется *положительным*, если $(H(t)x, x) > 0$ для всех $t \in J$, $x \neq 0$. Самосопряжённый оператор $H(t)$ называется *положительно определённым* или *равномерно положительным*, если существует константа $H_0 > 0$ такая, что $(H(t)x, x) \geqslant H_0\|x\|^2$ для всех t, x.

Оператор-функция $H\colon J \to \mathrm{L}(X)$ называется *самосопряжённой*, если оператор $H(t)$ является самосопряжённым. Самосопряжённая оператор-функция $H\colon J \to \mathrm{L}(X)$ называется *положительной*, если оператор $H(t)$ положителен, и *положительно определённой* или *равномерно положительной*, если оператор $H(t)$ положительно определён.

Если X – линейное конечномерное пространство и самосопряжённый оператор $H \in \mathrm{L}(X)$ является стационарным и положительным (т.е. $(Hx, x) > 0$ при всех $x \neq 0$), то он является также положительно определённым (равномерно положительным): $(Hx, x) \geqslant H_0\|x\|^2$, где $H_0 = \inf\limits_{\|x\|=1} (Hx, x) > 0$ [17]. Для нестационарного оператора $H(t)$ можно брать

$$H_0 = \inf_{\substack{\|x\|=1 \\ t \in [t_+, \infty)}} (H(t)x, x).$$

Следуя [13], рассмотрим дифференциальные неравенства

$$v' \leqslant \chi(t, v), \tag{1.23}$$

$$v' \geqslant \chi(t, v), \tag{1.24}$$

где $\chi \in C([t_+, \infty) \times (0, \infty), \mathbb{R})$ (в дальнейшем нас будут интересовать только положительные скалярные функции $v \in C^1([t_+, \infty), (0, \infty))$, удовлетворяющие одному из этих неравенств). Если функция $\chi(t, v)$ имеет вид

$$\chi(t, v) = k(t)U(v),$$

где $k \in C([t_+, \infty), \mathbb{R})$ и $U \in C(0, \infty)$ (т.е. $U \in C((0, \infty), (0, \infty))$), то верны следующие утверждения [13, с. 132–133]: если $\int_{v_0}^{\infty} (U(v))^{-1}\, dv = \infty$ ($v_0 > 0$ – некоторая константа), то неравенство (1.23) не имеет положительных решений $v(t)$ с конечным временем определения; если $\int_{v_0}^{\infty} (U(v))^{-1}\, dv = \infty$ и $\int_{t_0}^{\infty} k(t)\, dt < \infty$ ($t_0 \geqslant t_+$ – некоторое число), то неравенство (1.23) не имеет положительных неограниченных при $t \geqslant t_+$ решений; если $\int_{v_0}^{\infty} (U(v))^{-1}\, dv < \infty$ и $\int_{t_0}^{\infty} k(t)\, dt = \infty$, то неравенство (1.24) не имеет положительных неограниченно продолжаемых решений (т.е. решений, определённых на всём промежутке $[t_+, \infty)$).

Используя дифференциальные неравенства вида (1.23), (1.24), Ж. Ла-Салль получил условия неограниченной продолжаемости решений, устойчивости и неустойчивости (решения имеют конечное время определения) по Лагранжу ОДУ $x' = f(t, x)$ [13]. Соответствующие определения для (явного) ОДУ приведены в [13]. Ниже даны соответствующие определения для ДАУ.

2. Существование, единственность и ограниченность глобальных решений ДАУ.

Определение 2.1. Решение $x(t)$ задачи Коши (1.1), (1.3) называется *глобальным* или *неограниченно продолжаемым*, если оно существует на всём промежутке $[t_0, \infty)$. Решение $x(t)$ задачи Коши (1.1), (1.3) называется *устойчивым по Лагранжу*, если оно является глобальным и ограниченным, т.е. $x(t)$ существует на $[t_0, \infty)$ и $\sup\limits_{t \in [t_0, \infty)} \|x(t)\| < \infty$.

Определение 2.2. Решение $x(t)$ задачи Коши (1.1), (1.3) имеет *конечное время определения*, если оно существует на некотором конечном интервале $[t_0, T)$ и неограниченно на нём, т.е. существует число $T > t_0$ $(T < \infty)$ такое, что $\lim\limits_{t\to T-0} \|x(t)\| = \infty$. Решение $x(t)$ задачи Коши (1.1), (1.3) называется *неустойчивым по Лагранжу*, если оно имеет конечное время определения.

Если решение неустойчиво по Лагранжу, то также говорят, что оно "взрывается" или "уходит на бесконечность" за конечный промежуток времени.

Определение 2.3. Уравнение (1.1) называется *устойчивым по Лагранжу для начальной точки* (t_0, x_0), если для этой начальной точки решение задачи Коши (1.1), (1.3) устойчиво по Лагранжу.

Уравнение (1.1) устойчиво по Лагранжу, если каждое решение задачи Коши (1.1), (1.3) устойчиво по Лагранжу (т.е. уравнение устойчиво по Лагранжу для каждой согласованной начальной точки).

Определение 2.4. Уравнение (1.1) называется *неустойчивым по Лагранжу для начальной точки* (t_0, x_0), если для этой начальной точки решение задачи Коши (1.1), (1.3) неустойчиво по Лагранжу.

Уравнение (1.1) неустойчиво по Лагранжу, если каждое решение задачи Коши (1.1), (1.3) неустойчиво по Лагранжу.

Аналогичные определения формулируются для ДАУ (1.2) (задачи Коши (1.2), (1.3)).

2.1. Глобальная разрешимость ДАУ. В дальнейшем через $U_R^c(0)$ будем обозначать множество $\{z \in \mathbb{R}^n \mid \|z\| \geqslant R\}$ $(R > 0)$.

Теорема 2.1 (глобальная разрешимость ДАУ (1.1)). *Пусть* $f \in C([t_+, \infty) \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $\partial f/\partial x \in C([t_+, \infty) \times \mathbb{R}^n, \mathrm{L}(\mathbb{R}^n))$, $A, B \in C^1([t_+, \infty), \mathrm{L}(\mathbb{R}^n))$, *пучок* $\lambda A(t) + B(t)$ *удовлетворяет условию (1.4), где* $C_2 \in C^1([t_+, \infty), (0, \infty))$, *и выполнены следующие условия:*

1) для каждых $t \in [t_+, \infty)$, $x_{p_1}(t) \in X_1(t)$ *существует единственный* $x_{p_2}(t) \in X_2(t)$ *такой, что*

$$(t, x_{p_1}(t) + x_{p_2}(t)) \in L_{t_+}; \tag{2.1}$$

2) для каждых $t_* \in [t_+, \infty)$, $x^*_{p_1}(t_*) \in X_1(t_*)$, $x^*_{p_2}(t_*) \in X_2(t_*)$ *таких, что*

$$(t_*, x^*_{p_1}(t_*) + x^*_{p_2}(t_*)) \in L_{t_+},$$

оператор $\Phi_{t_*, x^*_{p_1}(t_*), x^*_{p_2}(t_*)}$, *определённый как*

$$\Phi_{t_*, x^*_{p_1}(t_*), x^*_{p_2}(t_*)} = \left[\frac{\partial}{\partial x}[Q_2(t_*) f(t_*, x^*_{p_1}(t_*) + x^*_{p_2}(t_*))] - B(t_*)\right] P_2(t_*) \colon X_2(t_*) \to Y_2(t_*), \tag{2.2}$$

обратим;

3) существуют функция $k \in C([t_+, \infty), \mathbb{R})$, *функция* $U \in C(0, \infty)$, *удовлетворяющая соотношению* $\int_{v_0}^{\infty} (U(v))^{-1}\, dv = \infty$ $(v_0 > 0$ *– некоторая константа), число* $R > 0$ *и положительно определённая функция* $V \in C^1([t_+, \infty) \times U_R^c(0), \mathbb{R})$ *такие, что*

3.1) $V(t, z) \to \infty$ *равномерно по* t *на каждом конечном полуинтервале* $[a, b) \subset [t_+, \infty)$ *при* $\|z\| \to \infty$;

3.2) для всех $t \in [t_+, \infty)$, $x_{p_1}(t) \in X_1(t)$, $x_{p_2}(t) \in X_2(t)$ *таких, что* $(t, x_{p_1}(t) + x_{p_2}(t)) \in L_{t_+}$ *и* $\|x_{p_1}(t)\| \geqslant R$, *справедливо неравенство*

$$V'_{(1.14)}(t, x_{p_1}(t)) \leqslant k(t) U(V(t, x_{p_1}(t))), \tag{2.3}$$

где $V'_{(1.14)}(t, x_{p_1}(t))$ *– производная функции* V *в силу уравнения (1.14) (где* $x_{p_1}(t) = z(t)$*):*

$$V'_{(1.14)}(t, x_{p_1}(t)) = \frac{\partial V}{\partial t}(t, x_{p_1}(t)) + \Bigg(\frac{\partial V}{\partial z}(t, x_{p_1}(t)), [P_1'(t) - G^{-1}(t) Q_1(t)[A'(t) + B(t)]] x_{p_1}(t) + \\ + G^{-1}(t) Q_1(t) f(t, x_{p_1}(t) + x_{p_2}(t))\Bigg). \tag{2.4}$$

Тогда для каждой начальной точки $(t_0, x_0) \in L_{t_+}$ *существует единственное глобальное решение задачи Коши (1.1), (1.3).*

Доказательство. Как показано выше, ДАУ (1.1) эквивалентно системе (1.12), (1.13) или (1.14), (1.15). Введём отображения $\Pi, F \in C([t_+,\infty)\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$, определив их равенствами

$$\Pi(t,z,u) = [P_1'(t) - G^{-1}(t)Q_1(t)[A'(t)+B(t)]]P_1(t)z + G^{-1}(t)Q_1(t)f(t,P_1(t)z+P_2(t)u), \quad (2.5)$$

$$F(t,z,u) = G^{-1}(t)Q_2(t)[f(t,P_1(t)z+P_2(t)u) - A'(t)P_1(t)z] - u. \quad (2.6)$$

Эти отображения имеют непрерывные частные производные первого порядка по z и по u на $[t_+,\infty)\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$. Запишем эти частные производные для отображения $F(t,z,u)$ (заметим, что $Q_2(t)A'(t) = Q_2(t)A'(t)P_1(t)$):

$$\frac{\partial}{\partial z}F(t,z,u) = G^{-1}(t)\frac{\partial}{\partial x}[Q_2(t)f(t,P_1(t)z+P_2(t)u)]P_1(t) - G^{-1}(t)Q_2(t)A'(t), \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial u}F(t,z,u) = G^{-1}(t)\frac{\partial}{\partial x}[Q_2(t)f(t,P_1(t)z+P_2(t)u)]P_2(t) - I_{\mathbb{R}^n} =$$
$$= G^{-1}(t)\Phi_{t,P_1(t)z,P_2(t)u}P_2(t) - P_1(t), \quad (2.8)$$

где $\Phi_{t,P_1(t)z,P_2(t)u}$ – оператор (2.2), и обозначим $\tilde{\Phi}_{t,z,u} = \Phi_{t,P_1(t)z,P_2(t)u}$.

Рассмотрим систему

$$z'(t) = \Pi(t,z(t),u(t)), \quad (2.9)$$

$$F(t,z(t),u(t)) = 0. \quad (2.10)$$

Для дальнейших рассуждений нам понадобятся две леммы.

Лемма 2.1. *Если функция $x(t)$ является решением ДАУ (1.1) на $[t_0,t_1)$ и удовлетворяет начальному условию (1.3), то функции $z(t) = P_1(t)x(t)$, $u(t) = P_2(t)x(t)$ являются решением системы (2.9), (2.10) на $[t_0,t_1)$ и удовлетворяют начальным условиям $z(t_0) = P_1(t_0)x_0$, $u(t_0) = P_2(t_0)x_0$ и включениям $z\in C^1([t_0,t_1),\mathbb{R}^n)$, $u\in C([t_0,t_1),\mathbb{R}^n)$.*

Обратно, если функции $z\in C^1([t_0,t_1),\mathbb{R}^n)$, $u\in C([t_0,t_1),\mathbb{R}^n)$ являются решением системы (2.9), (2.10) на $[t_0,t_1)$ и удовлетворяют начальным условиям $z(t_0) = P_1(t_0)x_0$, $u(t_0) = P_2(t_0)x_0$, то $P_1(t)z(t) = z(t)$, $P_2(t)u(t) = u(t)$ и функция $x(t) = z(t)+u(t)$ является решением ДАУ (1.1) на $[t_0,t_1)$ и удовлетворяет начальному условию (1.3).

Доказательство. Пусть функция $x(t)$ является решением ДАУ (1.1) на $[t_0,t_1)$ и удовлетворяет (1.3). Заметим, что $(t_0,x_0)\in L_{t_+}$, так как ДАУ (1.1) эквивалентно системе (1.10), (1.11) и при $t=t_0$ (тогда $x(t_0)=x_0$) выполняется равенство (1.11) (замечание 1.2). Поскольку ДАУ (1.1) эквивалентно системе (1.12), (1.13), то функции $z(t) = P_1(t)x(t)$, $u(t) = P_2(t)x(t)$, являются решением системы (1.12), (1.13) на $[t_0,t_1)$ и, следовательно, решением системы (2.9), (2.10). Очевидно, что $z(t_0) = P_1(t_0)x_0$ и $u(t_0) = P_2(t_0)x_0$. Гладкость функций $z(t)$, $u(t)$ следует из гладкости функции $x(t)$ и проекторов $P_i(t)$, $i=1,2$.

Пусть теперь функции $z\in C^1([t_0,t_1),\mathbb{R}^n)$, $u\in C([t_0,t_1),\mathbb{R}^n)$ являются решением системы (2.9), (2.10) на $[t_0,t_1)$ и $z(t_0) = P_1(t_0)x_0$, $u(t_0) = P_2(t_0)x_0$. Очевидно, что $(t_0,x_0)\in L_{t_+}$. Умножив уравнение (2.10) на $P_1(t)$ и на $P_2(t)$, будем иметь $P_1(t)u(t)\equiv 0$ и $P_2(t)u(t)\equiv u(t)$. Умножив уравнение (2.9) на $P_2(t)$, получим, что $z(t)$ удовлетворяет уравнению $P_2(t)z'(t) = P_2(t)P_1'(t)P_1(t)z(t)$. Так как $P_2(t)z'(t) = [P_2(t)z(t)]' - P_2'(t)z(t)$, $P_2(t)P_1'(t) = -P_2'(t)P_1(t)$ и $z(t_0)\in X_1(t_0)$, то функция $P_2(t)z(t)$ удовлетворяет уравнению $[P_2(t)z(t)]' = P_2'(t)[P_2(t)z(t)]$ и начальному условию $P_2(t_0)z(t_0) = 0$. Следовательно, $P_2(t)z(t)\equiv 0$ и, значит, $P_1(t)z(t)\equiv z(t)$. Таким образом, функция $x(t) = z(t)+u(t)$ такова, что $P_1(t)x(t) = z(t)$ и $P_2(t)x(t) = u(t)$. Следовательно, функция $x(t) = z(t)+u(t)$ является решением системы (1.12), (1.13) на $[t_0,t_1)$ и $x(t_0) = x_0$. Поэтому она является решением ДАУ (1.1) на $[t_0,t_1)$ и удовлетворяет условию (1.3). Лемма доказана.

В доказательстве леммы 2.1 показано, что если $u(t)\in\mathbb{R}^n$ удовлетворяет равенству (2.10), т.е. $F(t,z(t),u(t)) = 0$, то $u(t) = P_2(t)u(t)$, т.е. $u(t)\in X_2(t)$.

Лемма 2.2. *Для каждых $t\in[t_+,\infty)$, $z\in\mathbb{R}^n$ существует единственный $u\in X_2(t)$ такой, что*

$$F(t,z,u) = 0. \quad (2.11)$$

Доказательство. Заметим, что $F(t,z,u) = F(t,P_1(t)z,u)$ для любого $z \in \mathbb{R}^n$ и что $(t, x_{p_1}(t) + x_{p_2}(t)) \in L_{t_+}$ тогда и только тогда, когда t, $x_{p_1}(t)$, $x_{p_2}(t)$ удовлетворяют уравнению (1.15) или, что то же самое, t, $z(t) = x_{p_1}(t)$, $u(t) = x_{p_2}(t)$ удовлетворяют уравнению (2.10) (т.е. $F(t, x_{p_1}(t), x_{p_2}(t)) = 0$). Значит в силу условия 1) для каждых $t \in [t_+, \infty)$ и $z \in \mathbb{R}^n$ существует единственный $u = x_{p_2}(t) \in X_2(t)$ такой, что $(t, P_1(t)z+u) \in L_{t_+}$, т.е. $F(t,z,u) = 0$. Лемма доказана.

Вернёмся к доказательству теоремы. Возьмём произвольную начальную точку $(t_0, x_0) \in L_{t_+}$ и любые фиксированные $t_* \in [t_0, \infty)$, $z_* \in \mathbb{R}^n$, где $z_* = P_1(t_*)x_0$ при $t_* = t_0$. По лемме 2.2 существует единственный $u_* \in X_2(t_*)$ ($u_* = P_2(t_*)x_0$ при $t_* = t_0$) такой, что $F(t_*, z_*, u_*) = 0$. Поскольку в силу условия 2) оператор $\tilde{\Phi}_{t,z,u}$ обратим для каждой точки $(t,z,u) = (t_*, z_*, u_*)$ такой, что $u_* \in X_2(t_*)$ и $F(t_*, z_*, u_*) = 0$ (т.е. $(t_*, P_1(t_*)z_* + u_*) \in L_{t_0}$), то для таких $(t,z,u) = (t_*, z_*, u_*)$ оператор

$$\Psi_{t,z,u} = \frac{\partial}{\partial u} F(t,z,u) = G^{-1}(t)\tilde{\Phi}_{t,z,u}P_2(t) - P_1(t) \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^n) \tag{2.12}$$

имеет обратный $[\Psi_{t,z,u}]^{-1} = [\tilde{\Phi}_{t,z,u}]^{-1}G(t)P_2(t) - P_1(t) \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^n)$.

Воспользовавшись теоремами о неявной функции, получаем следующее утверждение: существуют промежуток $U_{\delta_1}(t_*) = \{t \in (t_0, \infty) : |t - t_*| < \delta_1\}$ ($U_{\delta_1}(t_0) = [t_0, t_0 + \delta_1)$ при $t_* = t_0$), окрестности $U_{\delta_2}(z_*) \subset \mathbb{R}^n$ и $U_{\delta_3}(u_*) \subset \mathbb{R}^n$ точек z_* и u_* соответственно и единственная функция $\nu(t,z) \in C(U_{\delta_1}(t_*) \times U_{\delta_2}(z_*), U_{\delta_3}(u_*))$, непрерывно дифференцируемая по z и такая, что $F(t,z,\nu(t,z)) = 0$ для $(t,z) \in U_{\delta_1}(t_*) \times U_{\delta_2}(z_*)$, и $\nu(t_*, z_*) = u_*$. Поскольку $F(t,z,\nu(t,z)) = 0$, т.е. функция $u = \nu(t,z)$ является решением уравнения (2.11), то $\nu(t,z) = P_2(t)\nu(t,z) \in X_2(t)$ для каждого $(t,z) \in U_{\delta_1}(t_*) \times U_{\delta_2}(z_*)$. Таким образом, доказано, что в некоторой окрестности $U(t_*, z_*)$ каждой точки $(t_*, z_*) \in [t_0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ (где $z_* = P_1(t_*)x_0$ при $t_* = t_0$) существует единственное решение $u = \nu_{t_*,z_*}(t,z)$ уравнения (2.11), непрерывное по (t,z), непрерывно дифференцируемое по z и такое, что $\nu_{t_*,z_*}(t,z) \in X_2(t)$ для каждой точки $(t,z) \in U(t_*, z_*)$.

Введём функцию $\eta\colon [t_0, \infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ и определим $\eta(t,z) = \nu_{t_*,z_*}(t,z)$ в точке $(t,z) = (t_*, z_*)$ для каждой точки $(t_*, z_*) \in [t_0, \infty) \times \mathbb{R}^n$. Тогда функция $u = \eta(t,z)$ непрерывна по (t,z), непрерывно дифференцируема по z, является решением уравнения (2.11) и $\eta(t,z) \in X_2(t)$ для $(t,z) \in [t_0, \infty) \times \mathbb{R}^n$. Докажем единственность введённой функции. Допустим, существует функция $u = \mu(t,z)$, обладающая в некоторой точке $(\tilde{t}, \tilde{z}) \in [t_0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ теми же свойствами, что и функция $u = \eta(t,z)$. По лемме 2.2 существует единственный вектор $\tilde{u} \in X_2(\tilde{t})$ такой, что $(t,z,u) = (\tilde{t}, \tilde{z}, \tilde{u})$ удовлетворяет уравнению (2.11). Значит, $\eta(\tilde{t}, \tilde{z}) = \mu(\tilde{t}, \tilde{z}) = \tilde{u}$. Аналогично доказывается, что если точка $(\tilde{t}, \tilde{z})$ принадлежит пересечению окрестностей $U^1(t^1, z^1)$ и $U^2(t^2, z^2)$ некоторых точек $(t^1, z^1), (t^2, z^2) \in [t_0, \infty) \times \mathbb{R}^n$, в которых определены соответственно решения $u = \nu_{t^1,z^1}(t,z)$ и $u = \nu_{t^2,z^2}(t,z)$ уравнения (2.11), то $\nu_{t^1,z^1}(\tilde{t}, \tilde{z}) = \nu_{t^2,z^2}(\tilde{t}, \tilde{z}) = \eta(\tilde{t}, \tilde{z}) = \tilde{u}$. Это выполнено для любой точки $(\tilde{t}, \tilde{z}) \in [t_0, \infty) \times \mathbb{R}^n$, следовательно, существует единственная функция $u = \eta(t,z)$ с указанными выше свойствами.

Подставим функцию $u = \eta(t,z)$ в (2.5) и обозначим $\widetilde{\Pi}(t,z) = \Pi(t,z,\eta(t,z))$. Тогда уравнение (2.9) примет вид

$$z'(t) = \widetilde{\Pi}(t, z(t)). \tag{2.13}$$

Вследствие свойств функций η и Π функция $\widetilde{\Pi}$ непрерывна по (t,z) и непрерывно дифференцируема по z на $[t_0, \infty) \times \mathbb{R}^n$. Следовательно, существует единственное решение $z = \zeta(t)$ уравнения (2.13) на некотором промежутке $[t_0, \alpha)$, удовлетворяющее начальному условию $\zeta(t_0) = z_0$, где $z_0 = P_1(t_0)x_0$. Решение $\zeta(t)$ может быть продолжено на максимальный промежуток $[t_0, \omega)$ ($\omega \leqslant \infty$) существования (т.е. до непродолжаемого решения), и это продолжение единственно (см., например, [18, с. 16]).

Поскольку функции $z = \zeta(t)$ и $u = \eta(t, \zeta(t))$ являются решением системы (2.9), (2.10) на $[t_0, \omega)$ и удовлетворяют начальным условиям $\zeta(t_0) = z_0 = P_1(t_0)x_0$, $\eta(t_0, z_0) = P_2(t_0)x_0$, то по лемме 2.1 $\zeta(t) = P_1(t)\zeta(t) \in X_1(t)$, $\eta(t, \zeta(t)) = P_2(t)\eta(t, \zeta(t)) \in X_2(t)$ для всех $t \in [t_0, \omega)$, а функция $x(t) = \zeta(t) + \eta(t, \zeta(t))$ является решением ДАУ (1.1) на $[t_0, \omega)$ и удовлетворяет

начальному условию (1.3). Из единственности решения $u = \eta(t, z)$ уравнения (2.11) и единственности решения $z = \zeta(t)$ уравнения (2.13) следует единственность решения $z = \zeta(t)$, $u = \eta(t, \zeta(t))$ системы (2.9), (2.10) и, следовательно, решения $x(t)$ ДАУ (1.1) на $[t_0, \omega)$.

В силу теорем о продолжении решения либо $\omega = \infty$, т.е. максимальный интервал существования решения $z = \zeta(t)$ уравнения (2.13) совпадает с $[t_0, \infty)$, либо $\omega < \infty$ и $\lim\limits_{t\to\omega-0} \|\zeta(t)\| = \infty$, т.е. решение имеет конечное время определения $[t_0, \omega)$. Докажем, что $\omega = \infty$. Напомним, что $\zeta(t) = P_1(t)x(t) = x_{p_1}(t)$, $\eta(t, \zeta(t)) = P_2(t)x(t) = x_{p_2}(t)$, где $x(t) = \zeta(t) + \eta(t, \zeta(t))$ – решение ДАУ (1.1), а также, что ДАУ (1.1) эквивалентно системе (1.14), (1.15) и соответственно функции $x_{p_1}(t) = \zeta(t)$, $x_{p_2}(t) = \eta(t, \zeta(t))$ являются решением системы (1.14), (1.15) ($z = \zeta(t)$ – решение уравнения (2.13), совпадающего с уравнением (1.14) при $x_{p_1}(t) = P_1(t)z(t)$, $x_{p_2}(t) = \eta(t, z(t))$). Допустим, что $\omega < \infty$ (значит, $\lim\limits_{t\to\omega-0} \|\zeta(t)\| = \infty$). Тогда существует $t_1 \in (t_0, \omega)$ такое, что при каждом $t \in [t_1, \omega)$ решение $\zeta(t)$ содержится в множестве $E = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (t, x) \in L_{t_0},\ \|P_1(t)x\| \geqslant R_0 > R\} \subset U_R^c(0)$. В силу условия 3) для всех $t \geqslant t_1$ производная функции V в силу уравнения (2.13) удовлетворяет неравенству

$$V'_{(2.13)}(t, \zeta(t)) = \frac{\partial V}{\partial t}(t, \zeta(t)) + \left(\frac{\partial V}{\partial z}(t, \zeta(t)), \widetilde{\Pi}(t, \zeta(t))\right) \leqslant k(t)U(V(t, \zeta(t))). \tag{2.14}$$

Значит, при $t \geqslant t_1$ функция $v(t) = V(t, \zeta(t))$ является положительным решением дифференциального неравенства

$$v' \leqslant k(t)U(v). \tag{2.15}$$

По предположению решение $\zeta(t)$ имеет конечное время определения, следовательно, и функция $v(t)$ имеет конечное время определения. С другой стороны, поскольку, согласно условию 3), $k \in C([t_+, \infty), \mathbb{R})$, а для функции $U \in C(0, \infty)$ справедливо соотношение $\int_{v_0}^{\infty} (U(v))^{-1}\, dv = \infty$, то неравенство (2.15) не имеет положительных решений с конечным временем определения, что противоречит предположению. Следовательно, $\omega = \infty$ и решение $\zeta(t)$ является глобальным.

Таким образом, доказано, что функция $x(t) = \zeta(t) + \eta(t, \zeta(t))$ является единственным решением задачи Коши (1.1), (1.3) на $[t_0, \infty)$. Поскольку (t_0, x_0) – произвольная точка из L_{t_+}, то существование единственного глобального решения доказано для каждой начальной точки $(t_0, x_0) \in L_{t_+}$. Теорема доказана.

Аддитивным разложением единицы в s-мерном линейном пространстве Z называется система из s попарно дизъюнктных проекторов $\{\Theta_k\}_{k=1}^s$ (проекторы одномерны), $\Theta_k \in L(Z)$, которые в сумме дают тождественный (единичный) оператор I_Z в Z, т.е. $\Theta_i\Theta_j = \delta_{ij}\Theta_i$ и $I_Z = \sum_{k=1}^s \Theta_k$ [9]. Аддитивное разложение единицы порождает разложение $Z = Z_1 \dot{+} \ldots \dot{+} Z_s$ пространства Z в прямую сумму одномерных подпространств $Z_k = \Theta_k Z$, а система векторов $\{z_k \in Z\}_{k=1}^s$ таких, что $z_k \neq 0$ и $z_k = \Theta_k z_k$, образует базис в Z.

Ниже дано определение базисной обратимости, введённое в [9].

Определение 2.5. Оператор-функция $\Phi\colon D \to \mathrm{L}(W, Z)$, где W, Z – s-мерные линейные пространства и $D \subset W$, называется *базисно обратимой* на отрезке $[\hat{w}, \tilde{w}] \subset D$ (на промежутке $J \subset D$), если для некоторого аддитивного разложения единицы $\{\Theta_k\}_{k=1}^s$ в пространстве Z и для любого набора элементов $\{w^k\}_{k=1}^s \subset [\hat{w}, \tilde{w}]$ ($\{w^k\}_{k=1}^s \subset J$) оператор $\Lambda = \sum_{k=1}^s \Theta_k \Phi(w^k) \in \mathrm{L}(W, Z)$ имеет обратный $\Lambda^{-1} \in \mathrm{L}(Z, W)$.

Очевидно, что из базисной обратимости отображения Φ на промежутке $J \subset D$ следует обратимость Φ на J, т.е. для каждой точки $w^* \in J$ её образ $\Phi(w^*)$ при отображении Φ является обратимым оператором. Обратное утверждение не верно (см. [10, пример 2.1]), кроме случая, когда пространства W, Z одномерны.

Отметим, что свойство базисной обратимости не зависит от выбора аддитивного разложения единицы или базиса в Z.

Если в условии 2) теоремы 2.1 заменить требование обратимости на требование базисной обратимости, то в условии 1) не нужно требовать единственности $x_{p_2}(t)$ (см. формулировку теоремы ниже).

Теорема 2.2 (глобальная разрешимость ДАУ (1.1)). *Пусть* $f \in C([t_+,\infty)\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$, $\partial f/\partial x \in C([t_+,\infty)\times\mathbb{R}^n,\mathrm{L}(\mathbb{R}^n))$, $A,B\in C^1([t_+,\infty),\mathrm{L}(\mathbb{R}^n))$, *пучок* $\lambda A(t)+B(t)$ *удовлетворяет условию (1.4), где* $C_2\in C^1([t_+,\infty),(0,\infty))$, *и выполнены следующие условия:*

1) для каждых $t\in[t_+,\infty)$, $x_{p_1}(t)\in X_1(t)$ *существует* $x_{p_2}(t)\in X_2(t)$ *такой, что верно включение (2.1);*

2) для каждых $t_*\in[t_+,\infty)$, $x^*_{p_1}(t_*)\in X_1(t_*)$, $x^i_{p_2}(t_*)\in X_2(t_*)$, $i=1,2$, *таких, что* $(t_*,x^*_{p_1}(t_*)+x^i_{p_2}(t_*))\in L_{t_+}$, $i=1,2$, *оператор-функция* $\Phi_{t_*,x^*_{p_1}(t_*)}(x_{p_2}(t_*))$, *определённая как*

$$\Phi_{t_*,x^*_{p_1}(t_*)}\colon X_2(t_*)\to \mathrm{L}(X_2(t_*),Y_2(t_*)),$$
$$\Phi_{t_*,x^*_{p_1}(t_*)}(x_{p_2}(t_*))=\left[\frac{\partial}{\partial x}[Q_2(t_*)f(t_*,x^*_{p_1}(t_*)+x_{p_2}(t_*))]-B(t_*)\right]P_2(t_*), \tag{2.16}$$

базисно обратима на $[x^1_{p_2}(t_*),x^2_{p_2}(t_*)]$;

3) выполняется условие 3) теоремы 2.1.

Тогда для каждой начальной точки $(t_0,x_0)\in L_{t_+}$ *существует единственное глобальное решение задачи Коши (1.1), (1.3).*

Замечание 2.1. В случае, если пространство $X_2(t)$ одномерно, условие 2) теоремы 2.2 эквивалентно условию 2) теоремы 2.1.

Доказательство теоремы 2.2. Как и в доказательстве теоремы 2.1, рассмотрим отображения (2.5), (2.6) и систему (2.9), (2.10). Частные производные по z и по u отображения $F(t,z,u)$ (2.6) имеют вид (2.7), (2.8), где в (2.8) оператор $\Phi_{t,P_1(t)z,P_2(t)u}$ заменён на оператор-функцию $\Phi_{t,P_1(t)z}(P_2(t)u)$ (см. (2.16)), т.е.

$$\frac{\partial}{\partial u}F(t,z,u)=G^{-1}(t)\frac{\partial}{\partial x}[Q_2(t)f(t,P_1(t)z+P_2(t)u)]P_2(t)-I_{\mathbb{R}^n}=G^{-1}(t)\Phi_{t,P_1(t)z}(P_2(t)u)P_2(t)-P_1(t).$$

Обозначим $\tilde\Phi_{t,z}(u)=\Phi_{t,P_1(t)z}(P_2(t)u)$ и введём оператор-функцию

$$\Psi_{t,z}\colon\mathbb{R}^n\to\mathrm{L}(\mathbb{R}^n),\quad \Psi_{t,z}(u)=\frac{\partial}{\partial u}F(t,z,u)=G^{-1}(t)\tilde\Phi_{t,z}(u)P_2(t)-P_1(t). \tag{2.17}$$

В силу базисной обратимости оператор-функции (2.16) для любых фиксированных $t_*\in[t_+,\infty)$, $z_*\in\mathbb{R}^n$, $u^i_*\in X_2(t_*)$, $i=1,2$, таких, что $F(t_*,z_*,u^i_*)=0$ (т.е. $(t_*,P_1(t_*)z_*+u^i_*)\in L_{t_+}$), оператор-функция $\tilde\Phi_{t_*,z_*}$ является базисно обратимой на $[u^1_*,u^2_*]$. Это свойство понадобится для доказательства леммы 2.2 (см. ниже). Из базисной обратимости оператор-функции $\tilde\Phi_{t_*,z_*}(u)$ следует также, что для любых фиксированных $t_*\in[t_+,\infty)$, $z_*\in\mathbb{R}^n$, $u_*\in X_2(t_*)$ таких, что $F(t_*,z_*,u_*)=0$, существует обратный оператор $[\tilde\Phi_{t_*,z_*}(u_*)]^{-1}$ и, следовательно, для таких точек (t_*,z_*,u_*) оператор $\Psi_{t_*,z_*}(u_*)$ имеет обратный

$$[\Psi_{t_*,z_*}(u_*)]^{-1}=[\tilde\Phi_{t_*,z_*}(u_*)]^{-1}G(t_*)P_2(t_*)-P_1(t_*)\in\mathrm{L}(\mathbb{R}^n).$$

Леммы 2.1 и 2.2 остаются в силе, однако доказательство леммы 2.2 меняется.

Докажем лемму 2.2, исходя из условий теоремы 2.2. В силу условия 1) (здесь не требуется существование единственного $x_{p_2}(t)$, в отличие от условия 1) теоремы 2.1) для каждых $t\in\in[t_+,\infty)$, $z\in\mathbb{R}^n$ существует $u\in X_2(t)$, при котором $(t,P_1(t)z+u)\in L_{t_+}$, т.е. $F(t,z,u)=0$. Докажем единственность такого элемента u. Рассмотрим произвольные фиксированные $t_*\in\in[t_+,\infty)$, $z_*\in\mathbb{R}^n$, $u^i_*\in X_2(t_*)$, $i=1,2$, такие, что $F(t_*,z_*,u^i_*)=0$. Базисная обратимость оператор-функции $\tilde\Phi_{t_*,z_*}(u)$ на $[u^1_*,u^2_*]$ означает, что для любого набора точек $\{u_k\}_{k=1}^d\subset\subset[u^1_*,u^2_*]$ оператор

$$\Lambda_1=\sum_{k=1}^d\tilde\Theta_k(t_*)\tilde\Phi_{t_*,z_*}(u_k)\in\mathrm{L}(X_2(t_*),Y_2(t_*)), \tag{2.18}$$

где $\{\tilde{\Theta}_k(t_*)\}_{k=1}^d$ – некоторое аддитивное разложение единицы в $Y_2(t_*)$ и $d = \dim Y_2(t) = \dim X_2(t)$, $t \in [t_+, \infty)$ (см. замечание 1.1), имеет обратный $\Lambda_1^{-1} \in L(Y_2(t_*), X_2(t_*))$. Поскольку оператор $Q_2(t_*)$ (суженный на $Y_2(t_*)$) является тождественным в $Y_2(t_*)$ (так как $Q_2(t_*)y_* = y_*$ при любом $y_* \in Y_2(t_*)$), то выберем $\{\tilde{\Theta}_k(t_*)\}_{k=1}^d$ так, чтобы $\sum_{k=1}^d \tilde{\Theta}_k(t_*) = Q_2(t_*)|_{Y_2(t_*)}$, т.е. $\{\tilde{\Theta}_k(t_*)\}_{k=1}^d$ – аддитивное разложение единицы $Q_2(t_*)|_{Y_2(t_*)}$ в $Y_2(t_*)$. Тогда система $\{\Theta_k(t_*)\}_{k=1}^d$ проекторов $\Theta_k(t_*) = G^{-1}(t_*)\tilde{\Theta}_k(t_*)G(t_*)|_{X_2(t_*)}$ будет аддитивным разложением единицы $P_2(t_*)|_{X_2(t_*)}$ в $X_2(t_*)$ ($\sum_{k=1}^d \Theta_k(t_*) = P_2(t_*)|_{X_2(t_*)}$). Заметим, что $F(t_*, z_*, u_*) = P_2(t_*)F(t_*, z_*, u_*)$ при любых $t_* \in [t_+, \infty)$, $z_* \in \mathbb{R}^n$, $u_* \in X_2(t_*)$. Проекции $F_k(t_*, z_*, u_*) = \Theta_k(t_*)F(t_*, z_*, u_*) = \Theta_k(t_*)P_2(t_*)F(t_*, z_*, u_*)$, где $u_* \in X_2(t_*)$, являются функциями со значениями в одномерных пространствах $\Theta_k(t_*)X_2(t_*)$, изоморфных $\mathbb{R}$. Согласно формуле конечных приращений существует точка $u_k \in [u_*^1, u_*^2]$ такая, что

$$F_k(t_*, z_*, u_*^2) - F_k(t_*, z_*, u_*^1) = \frac{\partial}{\partial u}F_k(t_*, z_*, u_k)(u_*^2 - u_*^1) =$$

$$= \Theta_k(t_*)P_2(t_*)\frac{\partial}{\partial u}F(t_*, z_*, u_k)(u_*^2 - u_*^1) = \Theta_k(t_*)P_2(t_*)\Psi_{t_*,z_*}(u_k)(u_*^2 - u_*^1), \quad k = \overline{1, d}.$$

Суммируя полученные выражения по k и учитывая равенства $F(t_*, z_*, u_*^i) = 0$ $(i = 1, 2)$, получаем

$$\sum_{k=1}^d \Theta_k(t_*)P_2(t_*)\Psi_{t_*,z_*}(u_k)(u_*^2 - u_*^1) = G^{-1}(t_*)\sum_{k=1}^d \tilde{\Theta}_k(t_*)\tilde{\Phi}_{t_*,z_*}(u_k)(u_*^2 - u_*^1) =$$

$$= G^{-1}(t_*)\Lambda_1(u_*^2 - u_*^1) = 0.$$

Поскольку существует оператор Λ_1^{-1}, то $u_*^2 = u_*^1$. Лемма доказана.

Дальнейшее доказательство совпадает с доказательством теоремы 2.1 (см. часть доказательства после леммы 2.2). Теорема доказана.

Теорема 2.3 (глобальная разрешимость ДАУ (1.2)). *Пусть* $f \in C^1([t_+, \infty) \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $A, B \in C^1([t_+, \infty), \mathrm{L}(\mathbb{R}^n))$, *пучок* $\lambda A(t) + B(t)$ *удовлетворяет условию (1.4), в котором* $C_2 \in C^1([t_+, \infty), (0, \infty))$, *и выполнены следующие условия:*

1) для каждых $t \in [t_+, \infty)$, $x_{p_1}(t) \in X_1(t)$ *существует единственный* $x_{p_2}(t) \in X_2(t)$ *такой, что*

$$(t, x_{p_1}(t) + x_{p_2}(t)) \in \widehat{L}_{t_+}; \tag{2.19}$$

2) для каждых $t_* \in [t_+, \infty)$, $x_{p_1}^*(t_*) \in X_1(t_*)$, $x_{p_2}^*(t_*) \in X_2(t_*)$ *таких, что*

$$(t_*, x_{p_1}^*(t_*) + x_{p_2}^*(t_*)) \in \widehat{L}_{t_+},$$

оператор $\Phi_{t_*, x_{p_1}^*(t_*), x_{p_2}^*(t_*)}$ *(2.2) обратим;*

3) существуют функция $k \in C([t_+, \infty), \mathbb{R})$, *функция* $U \in C(0, \infty)$, *удовлетворяющая соотношению* $\int_{v_0}^\infty (U(v))^{-1}\,dv = \infty$ *($v_0 > 0$ – некоторая константа), число* $R > 0$ *и положительно определённая функция* $V \in C^1([t_+, \infty) \times U_R^c(0), \mathbb{R})$ *такие, что*

3.1) $V(t, z) \to \infty$ *равномерно по* t *на каждом конечном полуинтервале* $[a, b) \subset [t_+, \infty)$ *при* $\|z\| \to \infty$;

3.2) для всех $t \in [t_+, \infty)$, $x_{p_1}(t) \in X_1(t)$, $x_{p_2}(t) \in X_2(t)$ *таких, что* $(t, x_{p_1}(t) + x_{p_2}(t)) \in \widehat{L}_{t_+}$ *и* $\|x_{p_1}(t)\| \geqslant R$, *справедливо неравенство*

$$V'_{(1.19)}(t, x_{p_1}(t)) \leqslant k(t)U(V(t, x_{p_1}(t))), \tag{2.20}$$

где $V'_{(1.19)}(t, x_{p_1}(t))$ *– производная функции* V *в силу уравнения (1.19) (где* $x_{p_1}(t) = z(t)$*):*

$$V'_{(1.19)}(t, x_{p_1}(t)) = \frac{\partial V}{\partial t}(t, x_{p_1}(t)) + \Bigg(\frac{\partial V}{\partial z}(t, x_{p_1}(t)), G^{-1}(t)[-B(t)x_{p_1}(t) +$$

$$+ Q_1(t)f(t, x_{p_1}(t) + x_{p_2}(t))] + P_1'(t)[x_{p_1}(t) + x_{p_2}(t)]\Big). \tag{2.21}$$

Тогда для каждой начальной точки $(t_0, x_0) \in \widehat{L}_{t_+}$ *существует единственное глобальное решение задачи Коши (1.2), (1.3).*

Теорема 2.4 (глобальная разрешимость ДАУ (1.2)). *Пусть* $f \in C^1([t_+, \infty) \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $A, B \in C^1([t_+, \infty), \mathrm{L}(\mathbb{R}^n))$, *пучок* $\lambda A(t) + B(t)$ *удовлетворяет условию (1.4), в котором* $C_2 \in C^1([t_+, \infty), (0, \infty))$, *и выполнены следующие условия:*

1) для каждых $t \in [t_+, \infty)$, $x_{p_1}(t) \in X_1(t)$ *существует* $x_{p_2}(t) \in X_2(t)$ *такой, что верно включение (2.19);*

2) для каждых $t_* \in [t_+, \infty)$, $x^*_{p_1}(t_*) \in X_1(t_*)$, $x^i_{p_2}(t_*) \in X_2(t_*)$, $i = 1, 2$, *таких, что* $(t_*, x^*_{p_1}(t_*) + x^i_{p_2}(t_*)) \in \widehat{L}_{t_+}$, $i = 1, 2$, *оператор-функция* $\Phi_{t_*, x^*_{p_1}(t_*)}(x_{p_2}(t_*))$ *(2.16) базисно обратима на* $[x^1_{p_2}(t_*), x^2_{p_2}(t_*)]$;

3) выполняется условие 3) теоремы 2.3.

Тогда для каждой начальной точки $(t_0, x_0) \in \widehat{L}_{t_+}$ *существует единственное глобальное решение задачи Коши (1.2), (1.3).*

Доказательство сформулированных теорем о глобальной разрешимости для ДАУ (1.2) проводится аналогично доказательству соответствующих теорем для ДАУ (1.1).

Выше представлены теоремы о глобальной разрешимости полулинейных ДАУ без использования глобальных условий Липшица и других подобных ограничений. Это позволяет расширить область применения данных теорем, поскольку полулинейные ДАУ, возникающие при моделировании динамики реальных объектов и процессов, часто содержат нелинейные функции, не удовлетворяющие таким ограничениям. Отметим, что теоремы о глобальной разрешимости (на $[t_0, \infty)$ или на произвольном отрезке $[t_0, T]$) полулинейных ДАУ, содержащие глобальные условия Липшица или другие подобные ограничения, известны (см., например, [1], а также [19], где рассматривается автономное полуявное ДАУ). Как правило, эти условия накладываются на "всю" нелинейную часть ДАУ (относительно фазовых переменных), причём нелинейная "алгебраическая часть" удовлетворяет глобальному условию Липшица с константой, меньшей единицы. Легко проверить, что в этом случае условия приведённых выше теорем выполнены. Ниже показано, что в доказанных выше теоремах о глобальной разрешимости вместо выполнения условий 1), 2) можно потребовать, чтобы нелинейная "алгебраическая часть" ДАУ (для ДАУ (1.1) это нелинейная функция в уравнениях (1.12) или (1.15)) удовлетворяла глобальному условию Липшица с константой меньшей единицы по $x_{p_2}(t)$.

Известны также теоремы о глобальной разрешимости, в которых требуется, чтобы нелинейная "алгебраическая часть" ДАУ не зависела от фазовой переменной (чтобы ДАУ сводилось к системе из явного нелинейного ДУ и линейного алгебраического уравнения). Подобные ограничения в настоящей работе отсутствуют.

Утверждение 2.1. *Теорема 2.1 останется справедливой, если вместо условий 1), 2) потребовать, чтобы существовала константа* $0 \leqslant \alpha < 1$ *такая, что неравенство*

$$\|G^{-1}(t)Q_2(t)f(t, x_{p_1}(t) + x^1_{p_2}(t)) - G^{-1}(t)Q_2(t)f(t, x_{p_1}(t) + x^2_{p_2}(t))\| \leqslant \alpha\|x^1_{p_2}(t) - x^2_{p_2}(t)\| \tag{2.22}$$

верно для любых $t \in [t_+, \infty)$, $x_{p_1}(t) \in X_1(t)$ *и* $x^i_{p_2}(t) \in X_2(t)$, $i = 1, 2$.

Замечание 2.2. Очевидно, что условие (2.22) можно заменить на следующее: существует константа $0 \leqslant \alpha < 1$ такая, что для любых $t \in [t_+, \infty)$, $x_{p_1}(t) \in X_1(t)$ и $x_{p_2}(t) \in X_2(t)$ выполняется неравенство

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x}[G^{-1}(t)Q_2(t)f(t, x_{p_1}(t) + x_{p_2}(t))]P_2(t) \right\| \leqslant \alpha. \tag{2.23}$$

Замечание 2.3. Утверждение, аналогичное утверждению 2.1, имеет место для теоремы 2.3 (условия (2.22) и (2.23) не меняются).

Доказательство утверждения. Обозначим

$$W(t, z, u) = G^{-1}(t)Q_2(t)[f(t, P_1(t)z + P_2(t)u) - A'(t)P_1(t)z] \tag{2.24}$$

и запишем уравнение (2.11), т.е. $F(t,z,u)=0$, где $F(t,z,u)=W(t,z,u)-u$ (см. (2.6)), в виде

$$u=W(t,z,u). \tag{2.25}$$

Очевидно, что отображение $W(t,z,u)$ непрерывно по (t,z,u) и имеет непрерывные частные производные первого порядка по z и по u на $[t_+,\infty)\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$.

Заметим, что если для u выполняется (2.25) (или (2.11)), то $P_1(t)u\equiv 0$, т.е. $u\in X_2(t)$, и $P_2(t)u=W(t,z,u)=W(t,z,P_2(t)u)$. Далее будем рассматривать отображение $W(t,z,u)$ как отображение $W\colon [t_+,\infty)\times\mathbb{R}^n\times X_2(t)\to X_2(t)$. В силу условия (2.22) (которое можно заменить на (2.23)) существует константа $0\leqslant\alpha<1$ такая, что

$$\|W(t,z,u_1)-W(t,z,u_2)\|\leqslant\alpha\|u_1-u_2\| \tag{2.26}$$

для любых $t\in[t_+,\infty)$, $z\in\mathbb{R}^n$, $u_i\in X_2(t)$, $i=1,2$ (заметим, что $W(t,z,u)=W(t,P_1(t)z,u)$). Следовательно, для каждых $t\in[t_+,\infty)$ и $z\in\mathbb{R}^n$ отображение $W(t,z,u)$ является сжимающим по u в $X_2(t)$. Несложно убедиться, что вследствие непрерывности $f(t,x)$, $G^{-1}(t)$, $Q_2(t)$, $A'(t)$ и $P_j(t)$, $j=1,2$, при каждом $u_*\in X_2(t_*)$ отображение $W_{u_*}(t,z)=W(t,z,u_*)$ является непрерывным по (t,z) для любой точки $(t,z)\in[t_+,\infty)\times\mathbb{R}^n$. Следовательно, по теоремам о неподвижной точке [18, с. 108, 110] существует единственная функция $\eta\colon[t_+,\infty)\times\mathbb{R}^n\to\to X_2(t)$ такая, что $\eta(t,z)=W(t,z,\eta(t,z))$, и $\eta(t,z)$ непрерывна на $[t_+,\infty)\times\mathbb{R}^n$. Поскольку функция $u=\eta(t,z)$ является единственным решением уравнения (2.25), то она также является единственным решением уравнения (2.11) (относительно $u\in X_2(t)$), и для любой точки $(t_0,x_0)\in L_{t_+}$ справедливо равенство $\eta(t_0,P_1(t_0)x_0)=P_2(t_0)x_0$.

Для частных производных первого порядка по z и по u отображения $W(t,z,u)$ имеют место равенства

$$\frac{\partial}{\partial z}W(t,z,u)=\frac{\partial}{\partial z}F(t,z,u)$$

(см. формулу (2.7)),

$$\frac{\partial}{\partial u}W(t,z,u)=G^{-1}(t)\frac{\partial}{\partial x}[Q_2(t)f(t,P_1(t)z+P_2(t)u)]P_2(t)\quad\text{и}\quad\frac{\partial}{\partial u}F(t,z,u)=\frac{\partial}{\partial u}W(t,z,u)-I_{\mathbb{R}^n}$$

(см. формулу (2.8)). Из (2.26) (так же, как из (2.23)) следует, что

$$\left\|\frac{\partial}{\partial u}W(t,z,u)\right\|\leqslant\alpha<1 \tag{2.27}$$

для любых $t\in[t_+,\infty)$, $z\in\mathbb{R}^n$, $u\in X_2(t)$. Заметим, что $P_2(t)$ является тождественным оператором в $X_2(t)$. Следовательно, в силу (2.27) получаем, что (по теореме об обратимости оператора, близкого к тождественному) для каждых $t\in[t_+,\infty)$, $z\in\mathbb{R}^n$, $u\in X_2(t)$ существует линейный непрерывный обратный оператор $[\partial W(t,z,u)/\partial u-P_2(t)]^{-1}\colon X_2(t)\to X_2(t)$ и этот оператор непрерывен как оператор-функция по (t,z,u). Поскольку функция $\eta(t,z)$ является решением уравнения $W(t,z,u)-P_2(t)u=0$ $(F(t,z,P_2(t)u)=0)$ или $W(t,z,u)-u=0$ $(F(t,z,u)=0$ (см. (2.11))) относительно $u\in X_2(t)$ (напомним, что если u удовлетворяет (2.25) или (2.11), то $u\in X_2(t)$), то по теореме о дифференцируемости неявной функции она непрерывно дифференцируема по z на $[t_+,\infty)\times\mathbb{R}^n$. Кроме того, для каждых $t\in[t_+,\infty)$, $z\in\mathbb{R}^n$, $u\in X_2(t)$ существует обратный оператор

$$\left[\frac{\partial}{\partial u}F(t,z,u)\right]^{-1}=\left[\frac{\partial}{\partial u}W(t,z,u)-P_2(t)\right]^{-1}P_2(t)-P_1(t)\in\mathrm{L}(\mathbb{R}^n),$$

непрерывный как оператор-функция по (t,z,u), и, следовательно, непрерывность по (t,z) и непрерывная дифференцируемость по z неявно заданной функции $\eta(t,z)$ могут быть установлены так же, как в доказательстве теоремы 2.1. Таким образом, функция $\eta\colon[t_+,\infty)\times\times\mathbb{R}^n\to X_2(t)$ непрерывна по (t,z) и непрерывно дифференцируема по z на $[t_+,\infty)\times\mathbb{R}^n$, а $u=\eta(t,z)$ является решением уравнения (2.11).

Функция $\eta(t,z)$ с такими же свойствами получена и в доказательстве теоремы 2.1 с использованием условий 1), 2). В остальном доказательства данного утверждения и теоремы 2.1 аналогичны. Утверждение доказано.

Очевидно, что утверждение, аналогичное доказанному выше, имеет место для теоремы 2.2 и её условий 1), 2).

Заметим, что если условия утверждения 2.1 выполнены, то условия теорем 2.1 и 2.2 также будут выполнены (это следует из доказательства утверждения). Таким образом, теоремы 2.1 и 2.2 накладывают более слабые ограничения на нелинейную часть ДАУ, чем утверждение 2.1.

2.2. Устойчивость по Лагранжу ДАУ (ограниченность решений).

Теорема 2.5 (устойчивость по Лагранжу ДАУ (1.1)). *Пусть* $f \in C([t_+,\infty)\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$, $\partial f/\partial x \in C([t_+,\infty)\times\mathbb{R}^n,\mathrm{L}(\mathbb{R}^n))$, $A,B\in C^1([t_+,\infty),\mathrm{L}(\mathbb{R}^n))$, *пучок* $\lambda A(t)+B(t)$ *удовлетворяет условию (1.4), где* $C_2\in C^1([t_+,\infty),(0,\infty))$, *и выполнены условия 1), 2) теоремы 2.1 или 1), 2) теоремы 2.2, а также условие*

3) существуют функции $k\in C([t_+,\infty),\mathbb{R})$ *и* $U\in C(0,\infty)$, *для которых* $\int_{t_+}^{\infty}k(t)\,dt < \infty$ *и* $\int_{v_0}^{\infty}(U(v))^{-1}\,dv=\infty$ *($v_0>0$ – некоторая константа), число* $R>0$ *и положительно определённая функция* $V\in C^1([t_+,\infty)\times U_R^c(0),\mathbb{R})$ *такие, что*

3.1) $V(t,z)\to\infty$ *равномерно по* t *на* $[t_+,\infty)$ *при* $\|z\|\to\infty$;

3.2) для всех $t\in[t_+,\infty)$, $x_{p_1}(t)\in X_1(t)$, $x_{p_2}(t)\in X_2(t)$ *таких, что* $(t,x_{p_1}(t)+x_{p_2}(t))\in L_{t_+}$ *и* $\|x_{p_1}(t)\|\geqslant R$, *справедливо неравенство (2.3).*

Пусть, кроме того, выполнено одно из следующих условий:

4.a) для всех $(t,x_{p_1}(t)+x_{p_2}(t))\in L_{t_+}$, $\|x_{p_1}(t)\|\leqslant M<\infty$ *(M – произвольная константа), выполнено неравенство*

$$\|G^{-1}(t)Q_2(t)[f(t,x_{p_1}(t)+x_{p_2}(t))-A'(t)x_{p_1}(t)]\|\leqslant K_M<\infty, \tag{2.28}$$

где $K_M=K(M)$ *– некоторая константа;*

4.b) для всех $(t,x_{p_1}(t)+x_{p_2}(t))\in L_{t_+}$, $\|x_{p_1}(t)\|\leqslant M<\infty$ *(M – произвольная константа), справедливо неравенство* $\|x_{p_2}(t)\|\leqslant K_M<\infty$, *где* $K_M=K(M)$ *– некоторая константа;*

4.c) для каждого $t_*\in[t_+,\infty)$ *существует* $\tilde{x}_{p_2}(t_*)\in X_2(t_*)$ *такой, что для каждых* $x^*_{p_i}(t_*)\in X_i(t_*)$, $i=1,2$, *для которых* $(t_*,x^*_{p_1}(t_*)+x^*_{p_2}(t_*))\in L_{t_+}$, *оператор-функция* $\Phi_{t_*,x^*_{p_1}(t_*)}(x_{p_2}(t_*))$ *(2.16) базисно обратима на* $(\tilde{x}_{p_2}(t_*),x^*_{p_2}(t_*)]$ *и соответствующий обратный оператор (т.е. оператор* $\Lambda_1^{-1}=[\sum_{k=1}^d\tilde{\Theta}_k(t_*)\Phi_{t_*,x^*_{p_1}(t_*)}(x_{p_2,k}(t_*))]^{-1}$, *обратный к оператору (2.18), где* $z_*=x^*_{p_1}(t_*)$, $\{u_k=x_{p_2,k}(t_*)\}_{k=1}^d$ *– произвольный набор элементов из* $(\tilde{x}_{p_2}(t_*),x^*_{p_2}(t_*)])$ *равномерно ограничен по* t_*, $x_{p_2}(t_*)$ *(по* t_*, $x_{p_2,k}(t_*)$*) на* $[t_+,\infty)$, $(\tilde{x}_{p_2}(t_*),x^*_{p_2}(t_*)]$, *а также выполнены неравенства* $\sup\limits_{t_*\in[t_+,\infty)}\|\tilde{x}_{p_2}(t_*)\|<\infty$ *и*

$$\sup_{\substack{t\in[t_+,\infty)\\ \|x_{p_1}(t)\|\leqslant M<\infty}}\|G^{-1}(t)Q_2(t)[f(t,x_{p_1}(t)+\tilde{x}_{p_2}(t_*))-A'(t)x_{p_1}(t)]\|<\infty \tag{2.29}$$

(M – произвольная константа).

Тогда ДАУ (1.1) устойчиво по Лагранжу.

Доказательство. Так же, как и в доказательстве теоремы 2.1, доказываем, что $z=\zeta(t)$ и $u=\eta(t,\zeta(t))$ $(\zeta(t)\in X_1(t)$, $\eta(t,\zeta(t))\in X_2(t)$, $(t,\zeta(t)+\eta(t,\zeta(t)))\in L_{t_0}$ для всех $t\in[t_0,\infty))$ являются единственным решением системы (2.9), (2.10) на $[t_0,\infty)$, удовлетворяющим начальным условиям $\zeta(t_0)=P_1(t_0)x_0$, $\eta(t_0,\zeta(t_0))=P_2(t_0)x_0$, где $(t_0,x_0)\in L_{t_+}$, и $x(t)=\zeta(t)+\eta(t,\zeta(t))$ является единственным решением задачи Коши (1.1), (1.3).

Докажем, что решение $z=\zeta(t)$ уравнения (2.13) ограничено на $[t_0,\infty)$. Допустим, что $\zeta(t)$ не ограничено на $[t_0,\infty)$. Значит, существует последовательность $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}\subset[t_0,\infty)$ такая, что $t_k\to\infty$ при $k\to\infty$ и $\|\zeta(t_k)\|\to\infty$ при $k\to\infty$. Тогда функция $v(t)=V(t,\zeta(t))$ будет положительным неограниченным при $t\geqslant t_1$ решением дифференциального неравенства (2.15), но в силу условия 3) (вследствие свойств функций $k(t)$, $U(v)$) неравенство (2.15) не

имеет положительных неограниченных при $t \geqslant t_1$ решений, что приводит к противоречию. Таким образом, существует константа M такая, что

$$\|\zeta(t)\| \leqslant M, \quad t \in [t_0, \infty). \tag{2.30}$$

Поскольку уравнение (2.10) можно записать в виде

$$u(t) = G^{-1}(t)Q_2(t)[f(t, P_1(t)z(t) + P_2(t)u(t)) - A'(t)z(t)],$$

то

$$\eta(t, \zeta(t)) = G^{-1}(t)Q_2(t)[f(t, \zeta(t) + \eta(t, \zeta(t))) - A'(t)\zeta(t)]. \tag{2.31}$$

Следовательно, в силу оценки (2.30) и условия 4.a) существует константа K_M, при которой для всех $t \in [t_0, \infty)$ выполнена оценка

$$\|\eta(t, \zeta(t))\| \leqslant K_M. \tag{2.32}$$

Учитывая оценку (2.30), из условия 4.b) также заключаем, что существует константа K_M, при которой для любого $t \in [t_0, \infty)$ справедлива оценка (2.32).

Теперь докажем ограниченность $\|\eta(t, \zeta(t))\|$, используя условие 4.c). Возьмём произвольные фиксированные $t_* \in [t_+, \infty)$, $z_* \in \mathbb{R}^n$, $u_* \in X_2(t_*)$, для которых выполняется равенство $F(t_*, z_*, u_*) = 0$ (т.е. $(t_*, P_1(t_*)z_* + u_*) \in L_{t_+}$). В силу условия 4.c) существует элемент $\tilde{u}_* = \tilde{u}(t_*) \in X_2(t_*)$ такой, что оператор-функция $\tilde{\Phi}_{t_*,z_*}(u) = \Phi_{t_*,P_1(t_*)z_*}(P_2(t_*)u)$ (2.16) базисно обратима на $(\tilde{u}_*, u_*]$ и соответствующий обратный оператор, т.е. оператор

$$\Lambda_1^{-1} = \left[\sum_{k=1}^{d} \tilde{\Theta}_k(t_*)\tilde{\Phi}_{t_*,z_*}(u_k)\right]^{-1} = \Lambda_1^{-1}(t_*, z_*, u_k) \in L(Y_2(t_*), X_2(t_*)),$$

обратный к оператору (2.18), где $\{u_k\}_{k=1}^d$ – произвольный набор элементов из $(\tilde{u}_*, u_*]$ ($d = \dim X_2(t_*)$), $\{\tilde{\Theta}_k(t_*)\}_{k=1}^d$ – некоторое аддитивное разложение единицы в $Y_2(t_*)$, равномерно ограничен по t_* и u_k на $[t_+, \infty)$ и $(\tilde{u}_*, u_*]$ соответственно. Как в доказательстве леммы 2.2, проведённом в доказательстве теоремы 2.2, выберем $\{\tilde{\Theta}_k(t_*)\}_{k=1}^d$ так, чтобы $\sum_{k=1}^d \tilde{\Theta}_k(t_*) = Q_2(t_*)|_{Y_2(t_*)}$, и возьмём аддитивное разложение единицы $P_2(t_*)|_{X_2(t_*)}$ в $X_2(t_*)$ вида $\{\Theta_k(t_*) = G^{-1}(t_*)\tilde{\Theta}_k(t_*)G(t_*)|_{X_2(t_*)}\}_{k=1}^d$. Рассмотрим проекции

$$F_k(t_*, z_*, u) = \Theta_k(t_*)F(t_*, z_*, u) = \Theta_k(t_*)P_2(t_*)F(t_*, z_*, u),$$

где $u \in X_2(t_*)$. Согласно формуле конечных приращений существует точка $u_k \in (\tilde{u}_*, u_*]$ такая, что имеют место равенства

$$F_k(t_*, z_*, u_*) - F_k(t_*, z_*, \tilde{u}_*) = \frac{\partial}{\partial u}F_k(t_*, z_*, u_k)(u_* - \tilde{u}_*) = \Theta_k(t_*)P_2(t_*)\Psi_{t_*,z_*}(u_k)(u_* - \tilde{u}_*),$$

$k = \overline{1, d}$, где оператор-функция $\Psi_{t,z}$ определена в (2.17). Поскольку $F_k(t_*, z_*, u_*) = 0$, то, суммируя полученные равенства по k, получаем, что существует набор $\{u_k\}_{k=1}^d \subset (\tilde{u}_*, u_*]$ такой, что $-F(t_*, z_*, \tilde{u}_*) = G^{-1}(t_*)\Lambda_1(u_* - \tilde{u}_*)$. Так как в силу условия 4.c) существует Λ_1^{-1}, то

$$u_* = \tilde{u}_* - \Lambda_1^{-1}G(t_*)F(t_*, z_*, \tilde{u}_*) = \tilde{u}_* - \Lambda_1^{-1}(Q_2(t_*)[f(t_*, P_1(t_*)z_* + P_2(t_*)\tilde{u}_*) - A'(t_*)z_*] - G(t_*)\tilde{u}_*).$$

Это равенство справедливо для любых фиксированных $t_* \in [t_+, \infty)$, $z_* \in \mathbb{R}^n$, $u_* \in X_2(t_*)$, для которых $F(t_*, z_*, u_*) = 0$. Следовательно, для каждого $t_* \in [t_0, \infty)$ выполнено равенство

$$\eta(t_*, \zeta(t_*)) = \tilde{u}_* - \Lambda_1^{-1}G(t_*)F(t_*, z_*, \tilde{u}_*) =$$

$$= \tilde{u}_* - \Lambda_1^{-1}G(t_*)(G^{-1}(t_*)Q_2(t_*)[f(t_*, \zeta(t_*) + P_2(t_*)\tilde{u}_*) - A'(t_*)\zeta(t_*)] - \tilde{u}_*).$$

В силу условия 4.c) множество элементов $\tilde{u}_* = \tilde{u}(t_*)$ ограничено, т.е. существует константа $\tilde{M}$ такая, что $\|\tilde{u}_*\| = \|\tilde{u}(t_*)\| \leqslant \tilde{M} < \infty$ для каждого $t_* \in [t_+, \infty)$. Из непрерывности нелинейного отображения $\Lambda_1^{-1} = \Lambda_1^{-1}(t_*, z_*, u_k)$ по t_*, z_* и компактности шара $\|\zeta(t_*)\| \leqslant M$, $t_* \in [t_0, \infty)$, где $z = \zeta(t) \in C([t_0, \infty), \mathbb{R}^n)$ $(\zeta(t) \in X_1(t))$, следует равномерная непрерывность Λ_1^{-1} по z_* (по $P_1(t_*)z_*$) и его ограниченность на $\|z_*\| = \|\zeta(t_*)\| \leqslant M$. По условию 4.c) оператор $\Lambda_1^{-1} = \Lambda_1^{-1}(t_*, z_*, u_k) \in L(Y_2(t_*), X_2(t_*))$ равномерно ограничен по t_* и u_k на $[t_+, \infty)$ и $(\tilde{u}_*, u_*]$ соответственно. Следовательно, существует константа $N > 0$, не зависящая от t_*, z_*, u_k, такая, что $\|\Lambda_1^{-1}\| \leqslant N$ для каждых $t_* \in [t_+, \infty)$, $z_* \in \mathbb{R}^n$, $u_* \in X_2(t_*)$, удовлетворяющих равенству $F(t_*, z_*, u_*) = 0$, и любого набора $\{u_k\}_{k=1}^d \subset (\tilde{u}_*, u_*]$. Таким образом, получаем, что

$$\|\eta(t_*, \zeta(t_*))\| \leqslant \tilde{M}(1 + N\|G(t_*)\|) + \|G^{-1}(t_*)Q_2(t_*)[f(t_*, \zeta(t_*) + P_2(t_*)\tilde{u}_*) - A'(t_*)\zeta(t_*)]\|$$

для каждого $t_* \in [t_+, \infty)$. Тогда из неравенств (2.30), (2.29) следует, что существует константа K_M такая, что $\|\eta(t_*, \zeta(t_*))\| \leqslant K_M$ для всех $t_* \in [t_+, \infty)$.

Учитывая сказанное выше, получаем: $\|x(t)\| = \|\zeta(t) + \eta(t, \zeta(t))\| \leqslant M + K_M$ для всех $t \in [t_0, \infty)$, т.е. решение $x(t)$ ограничено на $[t_0, \infty)$ и, значит, устойчиво по Лагранжу. Поскольку для каждой согласованной начальной точки (t_0, x_0), т.е. для $(t_0, x_0) \in L_{t_+}$, существует единственное решение задачи Коши (1.1), (1.3), которое устойчиво по Лагранжу, то каждое решение задачи Коши (1.1), (1.3) устойчиво по Лагранжу (напомним, что задача Коши (1.1), (1.3) имеет решение только для начальных точек $(t_0, x_0) \in L_{t_+}$). Таким образом, уравнение (1.1) устойчиво по Лагранжу. Теорема доказана.

Замечание 2.4. Условие 4.a) является следствием условия 4.b), так как уравнение

$$Q_2(t)[A'(t)P_1(t)x + B(t)P_2(t)x - f(t, x)] = 0,$$

определяющее многообразие L_{t_+}, можно записать в виде

$$G^{-1}(t)Q_2(t)[f(t, x_{p_1}(t) + x_{p_2}(t)) - A'(t)x_{p_1}(t)] = x_{p_2}(t)$$

(см. формулу (1.15)).

Доказательство следующей теоремы проводится аналогично доказательству предыдущей.

Теорема 2.6 (устойчивость по Лагранжу ДАУ (1.2)). *Пусть* $f \in C^1([t_+, \infty) \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $A, B \in C^1([t_+, \infty), \mathrm{L}(\mathbb{R}^n))$, *пучок* $\lambda A(t) + B(t)$ *удовлетворяет условию (1.4), где* $C_2 \in C^1([t_+, \infty), (0, \infty))$, *и выполнены условия 1), 2) теоремы 2.3 или 1), 2) теоремы 2.4, а также выполнено условие 3) теоремы 2.5, где* L_{t_+} *заменено на* $\widehat{L}_{t_+}$ *и неравенство (2.3) заменено на (2.20). Пусть, кроме того, выполняется одно из следующих условий:*

либо условие 4.a) теоремы 2.5, где L_{t_+} *заменено на* $\widehat{L}_{t_+}$ *и неравенство (2.28) заменено на*

$$\|G^{-1}(t)Q_2(t)f(t, x_{p_1}(t) + x_{p_2}(t))\| \leqslant K_M < \infty,$$

либо условие 4.b) теоремы 2.5, где L_{t_+} *заменено на* $\widehat{L}_{t_+}$,

либо условие 4.c) теоремы 2.5, где L_{t_+} *заменено на* $\widehat{L}_{t_+}$ *и требование (2.29) заменено на*

$$\sup_{\substack{t \in [t_+, \infty) \\ \|x_{p_1}(t)\| \leqslant M < \infty}} \|G^{-1}(t)Q_2(t)f(t, x_{p_1}(t) + \tilde{x}_{p_2}(t_*))\| < \infty.$$

Тогда ДАУ (1.2) устойчиво по Лагранжу.

2.3. Диссипативность ДАУ (предельная ограниченность решений). Предельно ограниченные (или ограниченные в пределе) системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которые также называют диссипативными системами (или D-системами), исследовались, в частности, в [13, 14, 20]. Сформулированные ниже определения для ДАУ подобны тем, что приведены в [13; 14, с. 144; 20, с. 17] для систем (явных) ОДУ.

Определение 2.6. Решения ДАУ (1.1) называются *предельно ограниченными* (или *ограниченными в пределе*), если существует константа $K > 0$ (константа не зависит от выбора

решения, т.е. от выбора начальных значений t_0, x_0) и для каждого решения $x(t)$ с начальной точкой (t_0, x_0) существует число $\tau = \tau(t_0, x_0) \geqslant t_0$ такие, что $\|x(t)\| < K$ для всех $t \in [t_0 + \tau, \infty)$.

ДАУ (1.1) называется *предельно ограниченным* или *диссипативным*, если для любой согласованной начальной точки (t_0, x_0) существует глобальное решение задачи Коши (1.1), (1.3) и все решения предельно ограничены.

Определение 2.7. Если в определении 2.6 число τ не зависит от выбора t_0, т.е. $\tau = \tau(x_0)$, то решения ДАУ (1.1) называются *равномерно предельно ограниченными* и, соответственно, ДАУ (1.1) называется *равномерно предельно ограниченным* или *равномерно диссипативным.*

Аналогичные определения формулируются для ДАУ (1.2).

Теорема 2.7 (равномерная предельная ограниченность (диссипативность) ДАУ (1.1)). *Пусть* $f \in C([t_+, \infty) \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $\partial f/\partial x \in C([t_+, \infty) \times \mathbb{R}^n, \mathrm{L}(\mathbb{R}^n))$, $A, B \in C^1([t_+, \infty), \mathrm{L}(\mathbb{R}^n))$, *пучок* $\lambda A(t) + B(t)$ *удовлетворяет условию (1.4), где* $C_2 \in C^1([t_+, \infty), (0, \infty))$, *и выполнены условия 1), 2) теоремы 2.1 или 1), 2) теоремы 2.2. Пусть, кроме того, выполняются следующие условия:*

3) существуют число $R > 0$, *положительно определённая функция* $V \in C^1([t_+, \infty) \times \times U_R^c(0), \mathbb{R})$, *неубывающая функция* $U_0 \in C([0, \infty))$, *возрастающая функция* $U_1 \in C([0, \infty))$ *и функция* $U_2 \in C([0, \infty))$ *такие, что* $U_0(r) \to +\infty$ *при* $r \to +\infty$, $U_2(r) > 0$ *при* $r > 0$ *и для всех* $t \in [t_+, \infty)$, $x_{p_1}(t) \in X_1(t)$, $x_{p_2}(t) \in X_2(t)$, *для которых* $(t, x_{p_1}(t) + x_{p_2}(t)) \in \in L_{t_+}$ *и* $\|x_{p_1}(t)\| \geqslant R$, *выполнены условие* $U_0(\|x_{p_1}(t)\|) \leqslant V(t, x_{p_1}(t)) \leqslant U_1(\|x_{p_1}(t)\|)$ *и одно из следующих неравенств:*

3.a) $V'_{(1.14)}(t, x_{p_1}(t)) \leqslant -U_2(\|x_{p_1}(t)\|)$ ($V'_{(1.14)}(t, x_{p_1}(t))$ *имеет вид (2.4));*

3.b) $V'_{(1.14)}(t, x_{p_1}(t)) \leqslant -U_2((H(t)x_{p_1}(t), x_{p_1}(t)))$, *где* $H \in C([t_+, \infty), \mathrm{L}(\mathbb{R}^n))$ *– некоторая положительно определённая самосопряжённая оператор-функция, для которой*

$$\sup_{t \in [t_+, \infty)} \|H(t)\| < \infty;$$

3.c) $V'_{(1.14)}(t, x_{p_1}(t)) \leqslant -CV(t, x_{p_1}(t))$, *где* $C > 0$ *– некоторая константа;*

4) существуют константа $c > 0$ *и число* $T > t_+$ *такие, что*

$$\|G^{-1}(t)Q_2(t)[f(t, x_{p_1}(t) + x_{p_2}(t)) - A'(t)x_{p_1}(t)]\| \leqslant c\|x_{p_1}(t)\| \tag{2.33}$$

для всех $(t, x_{p_1}(t) + x_{p_2}(t)) \in L_T$.

Тогда ДАУ (1.1) равномерно предельно ограничено (равномерно диссипативно).

Доказательство. Как и в доказательстве теорем 2.1 или 2.2 получаем, что для каждой начальной точки $(t_0, x_0) \in L_{t_+}$ существует единственное глобальное решение $x(t) = \zeta(t) + + \eta(t, \zeta(t))$ задачи Коши (1.1), (1.3), где $\zeta(t) = P_1(t)x(t) = x_{p_1}(t)$, $\eta(t, \zeta(t)) = P_2(t)x(t) = x_{p_2}(t)$. Действительно, поскольку в силу условия 3) вместо неравенства (2.14) выполнено одно из следующих неравенств: $V'_{(2.13)}(t, \zeta(t)) \leqslant -U_2(\|\zeta(t)\|)$, $V'_{(2.13)}(t, \zeta(t)) \leqslant -U_2((H(t)\zeta(t), \zeta(t)))$, $V'_{(2.13)}(t, \zeta(t)) \leqslant -CV(t, \zeta(t))$, то вместо неравенства (2.15) выполняется неравенство $v' \leqslant 0$, которое также не имеет положительных решений с конечным временем определения. В остальном доказательство этого факта совпадает с тем, что приведено в доказательстве теорем 2.1 или 2.2.

В силу условия 3) с неравенствами 3.a) и 3.c), как и в доказательстве теоремы Йошизавы [14, теорема 10.4] и следствия из неё, получаем, что решения ОДУ (2.13) равномерно предельно ограничены, т.е. существует константа $N > 0$ и для каждого решения $z = \zeta(t)$, удовлетворяющего начальному условию $\zeta(t_0) = P_1(t_0)x_0$, существует число $\tau_1 = \tau_1(x_0) \geqslant t_0$ такие, что $\|\zeta(t)\| < N$ при всех $t \geqslant t_0 + \tau_1$. Нетрудно проверить, что из условия 3) с неравенством 3.b) также следует, что решения ОДУ (2.13) равномерно предельно ограничены. Здесь используется тот факт, что вследствие свойств оператора $H(t)$ существуют константы $H_0, H_1 > 0$ такие, что $H_0\|z\|^2 \leqslant (H(t)z, z) \leqslant H_1\|z\|^2$ для всех $t \in [t_+, \infty)$, $z \in \mathbb{R}^n$.

Вследствие условия 4) и равенства (2.31) существуют такие константа $c > 0$ и число $\tau_2 = = \tau_2(x_0) > t_0$, что $\|\eta(t, \zeta(t))\| \leqslant c\|\zeta(t)\| < cN$ для всех $t \geqslant \tau_2$. Таким образом, для каждого

решения с начальной точкой (t_0, x_0) существует число $\tau = \tau(x_0) \geqslant t_0$ такое, что

$$\|x(t)\| \leqslant \|\zeta(t)\| + \|\eta(t, \zeta(t))\| < (1+c)N$$

для всех $t \in [t_0 + \tau, \infty)$, где константа $(1+c)N > 0$ не зависит от t_0, x_0. Следовательно, уравнение (1.1) равномерно предельно ограничено. Теорема доказана.

Аналогично доказывается следующая теорема.

Теорема 2.8 (равномерная предельная ограниченность (диссипативность) ДАУ (1.2)). *Пусть $f \in C^1([t_+, \infty) \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $A, B \in C^1([t_+, \infty), \mathrm{L}(\mathbb{R}^n))$, пучок $\lambda A(t) + B(t)$ удовлетворяет условию (1.4), где $C_2 \in C^1([t_+, \infty), (0, \infty))$, и выполнены условия 1), 2) теоремы 2.3 или 1), 2) теоремы 2.4. Пусть, кроме того, выполнены условие 3) теоремы 2.7, где L_{t_+} заменено на $\widehat{L}_{t_+}$ и производная $V'_{(1.14)}(t, x_{p_1}(t))$ заменена на производную $V'_{(1.19)}(t, x_{p_1}(t))$ (2.21), и условие 4) теоремы 2.7, где L_T заменено на $\widehat{L}_T$ и неравенство (2.33) заменено на*

$$\|G^{-1}(t) Q_2(t) f(t, x_{p_1}(t) + x_{p_2}(t))\| \leqslant c \|x_{p_1}(t)\|.$$

Тогда ДАУ (1.2) равномерно предельно ограничено (равномерно диссипативно).

2.4. Неустойчивость по Лагранжу ДАУ (отсутствие глобальных решений). Теорема о неустойчивости по Лагранжу даёт достаточные условия, при выполнении которых ДАУ не имеет глобальных решений, точнее, условия, при которых ДАУ неустойчиво по Лагранжу для согласованных начальных точек (t_0, x_0), где компонента $P_1(t_0)x_0$ из определённой области (см. определения 2.2, 2.4). Кроме того, из неустойчивости решения по Лагранжу следует его неустойчивость по Ляпунову, а из неустойчивости решения по Ляпунову в общем случае не следует его неустойчивость по Лагранжу.

Теорема 2.9 (неустойчивость по Лагранжу ДАУ (1.1)). *Пусть $f \in C([t_+, \infty) \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $\partial f / \partial x \in C([t_+, \infty) \times \mathbb{R}^n, \mathrm{L}(\mathbb{R}^n))$, $A, B \in C^1([t_+, \infty), \mathrm{L}(\mathbb{R}^n))$ и пучок $\lambda A(t) + B(t)$ удовлетворяет условию (1.4), где $C_2 \in C^1([t_+, \infty), (0, \infty))$. Пусть, кроме того, выполнены условия 1), 2) теоремы 2.1 или 1), 2) теоремы 2.2, а также следующие условия:*

3) существует область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ такая, что $0 \notin \Omega$ и компонента $P_1(t)x(t)$ каждого существующего решения $x(t)$ с начальной точкой $(t_0, x_0) \in L_{t_+}$, где $P_1(t_0)x_0 \in \Omega$, всё время остаётся в Ω;

4) существуют функции $k \in C([t_+, \infty), \mathbb{R})$ и $U \in C(0, \infty)$, для которых

$$\int\limits_{t_+}^{\infty} k(t)\, dt = \infty \quad \text{и} \quad \int\limits_{v_0}^{\infty} \frac{1}{U(v)}\, dv < \infty$$

($v_0 > 0$ – некоторая константа), и положительно определённая функция $V \in C^1([t_+, \infty) \times \Omega, \mathbb{R})$ такие, что для всех $t \in [t_+, \infty)$, $x_{p_1}(t) \in X_1(t)$, $x_{p_2}(t) \in X_2(t)$, для которых $(t, x_{p_1}(t) + x_{p_2}(t)) \in L_{t_+}$ и $x_{p_1}(t) \in \Omega$, выполнено неравенство

$$V'_{(1.14)}(t, x_{p_1}(t)) \geqslant k(t) U(V(t, x_{p_1}(t))) \quad (V'_{(1.14)}(t, x_{p_1}(t)) \ \text{имеет вид (2.4)}).$$

Тогда для каждой начальной точки $(t_0, x_0) \in L_{t_+}$ такой, что $P_1(t_0)x_0 \in \Omega$, существует единственное решение задачи Коши (1.1), (1.3), и это решение неустойчиво по Лагранжу.

Доказательство. Аналогично тому, как это сделано в доказательстве теореме 2.1, устанавливается, что существует единственное решение $z = \zeta(t)$ уравнения (2.13) на $[t_0, \omega)$, удовлетворяющее начальному условию $\zeta(t_0) = P_1(t_0)x_0$, где $[t_0, \omega)$ – максимальный промежуток существования решения. Далее, как и в доказательстве теоремы 2.1, получаем, что существует единственное решение $x(t) = \zeta(t) + \eta(t, \zeta(t))$ ДАУ (1.1) на $[t_0, \omega)$, удовлетворяющее начальному условию (1.3). Напомним, что функции $z = \zeta(t)$ и $u = \eta(t, \zeta(t))$ $(\zeta(t) \in X_1(t)$, $\eta(t, \zeta(t)) \in X_2(t))$ являются единственным решением системы (2.9), (2.10) на $[t_0, \omega)$, удовлетворяющим начальным условиям $\zeta(t_0) = P_1(t_0)x_0$, $\eta(t_0, \zeta(t_0)) = P_2(t_0)x_0$.

Докажем, что решение $x(t)$ неустойчиво по Лагранжу, т.е. имеет конечное время определения $(\omega < \infty)$. Согласно условию 3) существует область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ такая, что $0 \notin \Omega$ и компонента $P_1(t)x(t) = x_{p_1}(t)$ каждого существующего решения $x(t)$ с начальной точкой $(t_0, x_0) \in L_{t_+}$, где $P_1(t_0)x_0 \in \Omega$, все время остаётся в Ω. Поскольку $\zeta(t) = P_1(t)x(t)$, то каждое решение $\zeta(t)$ уравнения (2.13), начинающееся в области Ω, все время остаётся в ней. В силу условия 4) для всех $t \geqslant t_0$ и $\zeta(t) \in \Omega$ выполняется неравенство

$$V'_{(2.13)}(t, \zeta(t)) \geqslant k(t)U(V(t, \zeta(t))).$$

Значит, при $t \geqslant t_0$ функция $v(t) = V(t, \zeta(t))$ является положительным решением дифференциального неравенства

$$v' \geqslant k(t)U(v). \tag{2.34}$$

Так как в силу условия 4) (в силу свойств функций $k(t)$, $U(v)$) неравенство (2.34) не имеет положительных неограниченно продолжаемых решений, то, как и в доказательстве теоремы [13, с. 109, теорема XIV], получаем, что решение $\zeta(t)$ имеет конечное время определения, т.е. $\omega < \infty$ и $\lim\limits_{t \to \omega - 0} \|\zeta(t)\| = \infty$. Поэтому решение $x(t) = \zeta(t) + \eta(t, \zeta(t))$ задачи Коши (1.1), (1.3) также имеет конечное время определения $[t_0, \omega)$. Теорема доказана.

Аналогично доказывается следующая теорема.

Теорема 2.10 (неустойчивость по Лагранжу ДАУ (1.2)). *Пусть* $f \in C^1([t_+, \infty) \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $A, B \in C^1([t_+, \infty), \mathrm{L}(\mathbb{R}^n))$, *пучок* $\lambda A(t) + B(t)$ *удовлетворяет условию (1.4), в котором* $C_2 \in C^1([t_+, \infty), (0, \infty))$, *и выполнены условия 1), 2) теоремы 2.3 или 1), 2) теоремы 2.4. Пусть, кроме того, выполнены условия 3), 4) теоремы 2.9, где* L_{t_+} *заменено на* $\widehat{L}_{t_+}$ *и производная* $V'_{(1.14)}(t, x_{p_1}(t))$ *заменена на* $V'_{(1.19)}(t, x_{p_1}(t))$ *(2.21).*

Тогда для каждой начальной точки $(t_0, x_0) \in \widehat{L}_{t_+}$ *такой, что* $P_1(t_0)x_0 \in \Omega$, *существует единственное решение задачи Коши (1.2), (1.3), и это решение неустойчиво по Лагранжу.*

Исследование выполнено при финансовой поддержке Национальной академии наук Украины (проект “Качественный, асимптотический и численный анализ различных классов дифференциальных уравнений и динамических систем, их классификация и практическое применение”, государственный регистрационный номер 0119U102376).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Власенко Л.А.* Эволюционные модели с неявными и вырожденными дифференциальными уравнениями. Днепропетровск, 2006.
2. *Чистяков В.Ф., Щеглова А.А.* Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем. Новосибирск, 2003.
3. *Lamour R., März R., Tischendorf C.* Differential-Algebraic Equations: A Projector Based Analysis. Heidelberg, 2013.
4. *Riaza R.* Differential-Algebraic Systems: Analytical Aspects and Circuit Applications. Hackensack, New York, 2008.
5. *Gliklikh Yu.E.* On global in time solutions for differential-algebraic equations // Вестн. Южно-Урал. гос. ун-та. Сер. Мат. моделирование и программирование. 2014. Т. 7. № 3. С. 33–39.
6. *Баев А.Д., Зубова С.П., Усков В.И.* Решение задач для дескрипторных уравнений методом декомпозиции // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика. Математика. 2013. № 2. С. 134–140.
7. *Щеглова А.А., Кононов А.Д.* Устойчивость дифференциально-алгебраических уравнений в условиях неопределённости // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 7. С. 881–890.
8. *Филипковская М.С.* Продолжение решений полулинейных дифференциально-алгебраических уравнений и приложения в нелинейной радиотехнике // Вісн. Харківськ. нац. ун-ту ім. В.Н. Каразіна. Сер. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. 2012. Т. 19. № 1015. С. 306–319.
9. *Руткас А.Г., Филипковская М.С.* Продолжение решений одного класса дифференциально-алгебраических уравнений // Журн. обчисл. та прикл. математики. 2013. № 1 (111). С. 135–145.
10. *Filipkovska M.S.* Lagrange stability of semilinear differential-algebraic equations and application to nonlinear electrical circuits // J. of Math. Phys., Anal., Geom. 2018. V. 14. № 2. P. 169–196.

11. *Filipkovskaya M.S.* Lagrange stability and instability of irregular semilinear differential-algebraic equations and applications // Ukr. Math. J. 2018. V. 70. № 6. P. 947–979.
12. *Rutkas A.G., Vlasenko L.A.* Existence of solutions of degenerate nonlinear differential operator equations // Nonlin. Oscillations. 2001. V. 4. № 2. P. 252–263.
13. *Ла-Салль Ж., Лефшец С.* Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. М., 1964.
14. *Yoshizawa T.* Stability theory by Liapunov's second method. Tokyo, 1966.
15. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М., 1959.
16. *Kato T.* Perturbation theory for linear operators. Berlin, 1966.
17. *Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М., 1970.
18. *Шварц Л.* Анализ. Т. 2. М., 1972.
19. *Куликов Г.Ю.* О численном решении автономной задачи Коши с алгебраической связью на фазовые переменные // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1993. Т. 33. № 4. С. 522–540.
20. *Рейссиг Р., Сансоне Г., Конти Р.* Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений. М., 1974.

Физико-технический институт низких температур
им. Б.И. Веркина НАН Украины, г. Харьков

Поступила в редакцию 02.01.2020 г.
После доработки 28.08.2020 г.
Принята к публикации 13.10.2020 г.