ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 1, с. 43–60

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.922+517.926.4+517.977.1

ОБ ИСКЛЮЧЕНИИ ИМПУЛЬСНЫХ СЛАГАЕМЫХ В РЕШЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

© 2021 г. **А. А. Щеглова**

Рассматривается управляемая линейная система дифференциально-алгебраических уравнений с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами, которая может иметь произвольно высокий индекс неразрешённости. Предполагается, что матрица при производной искомой вектор-функции имеет постоянный ранг. Доказана теорема о существовании решения в классе обобщённых функций типа Соболева–Шварца, представимых в виде суммы регулярной обобщённой функции и линейной комбинации дельта-функции и её производных. Получены условия существования управления в виде обратной связи такого, что общее решение замкнутой системы не содержит сингулярных слагаемых. Показана связь этих условий со свойством импульсной управляемости.

DOI: 10.31857/S0374064121010052

Введение. Рассматривается управляемая система обыкновенных дифференциальных уравнений
$$A(t)\frac{d}{dt}x(t)+B(t)x(t)+U(t)u(t)=0,\quad t\in\mathbb{R}\equiv(-\infty,+\infty),\tag{0.1}$$
где $A(t)$, $B(t)$ – известные $n\times n$-матрицы; $x(t)$ – искомая n-мерная вектор-функция; $U(t)$ – заданная $n\times l$-матрица; $u(t)$ – l-мерная вектор-функция управления. Предполагается, что $\det A(t)\equiv 0$ на $\mathbb{R}$. Такие системы называются *дифференциально-алгебраическими уравнениями* (ДАУ). Сложность внутренней структуры ДАУ характеризует целочисленная величина r $(0\leqslant r\leqslant n)$, называемая *индексом неразрешённости* (кратко *индексом*). Точное определение индекса, используемое в данной работе, будет сформулировано в п. 1.

Известно, что решение ДАУ в классе обобщённых функций может обладать импульсным поведением. В стационарном случае этот факт установлен в работах [1, 2]. В них же показано, что решение в пространстве распределений представимо в виде суммы регулярной обобщённой функции и линейной комбинации дельта-функции и её производных.

В англоязычной литературе ДАУ, решения которых не содержат дельта-функции и её производных, называются системами, свободными от импульсного поведения (impuls-free), что соответствует частному случаю индекса неразрешённости 1. Такие системы удовлетворяют известному критерию “ранг-степень” [3, с. 137].

Целью данной работы является получение для ДАУ (0.1) с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами условий существования такого управления в виде обратной связи, что общее решение замкнутой системы не содержит сингулярных функций, а также установление связи этих условий со свойством импульсной управляемости системы.

Эта проблема хорошо изучена для стационарных систем с регулярным матричным пучком. Например, в работах [4, 5] анализ базируется на использовании канонической формы Кронекера–Вейерштрасса [6, с. 313].

В работах [7, 8] на основе сильной стандартной канонической формы [9] (которая является аналогом канонической формы Кронекера–Вейерштрасса) изучалась импульсная управляемость ДАУ с вещественно-аналитическими коэффициентами. Там же установлена связь между свойством импульсной управляемости и задачей исключения импульсных слагаемых в решении с помощью соответствующего позиционного управления.

Обе упомянутые выше канонические формы содержат детальную информацию о внутренней структуре ДАУ, достаточную для установления связи между возможностью преобразования системы ДАУ в систему impuls-free и свойством её импульсной управляемости. Для систем с гладкими (в том числе бесконечно дифференцируемыми) коэффициентами структурные формы, обладающие подобным свойством, не известны. Например, форма, используемая в [10], позволяет получить удобное для проверки условие импульсной управляемости для системы вида (0.1), но не может быть применена для исследования возможности исключения сингулярных слагаемых из решения системы. По этой причине получение условий для преобразования ДАУ (0.1) с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами в систему, не обладающую импульсным поведением, по-прежнему актуально. В данной работе эта задача решена для систем произвольно высокого индекса неразрешённости с матрицей $A(t)$ постоянного ранга.

1. Индекс неразрешённости. В этом пункте приводятся вспомогательные сведения из структурной теории нестационарных ДАУ, используемые в дальнейшем при доказательстве теоремы о существовании в пространстве распределений решения системы (0.1) с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами.

Допустим, что коэффициенты системы (0.1) – достаточно гладкие на $\mathbb{R}$ функции. Пусть s – неотрицательное целое число. Введём в рассмотрение $n(s+1)\times ns$-матрицу

$$\Lambda_s(t)=\begin{pmatrix} O_n^n & O_n^n & \dots & O_n^n \\ C_1^1A(t) & O_n^n & \dots & O_n^n \\ C_2^1A'(t)+C_2^2B(t) & C_2^2A(t) & \dots & O_n^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_s^1A^{(s-1)}(t)+C_s^2B^{(s-2)}(t) & C_s^2A^{(s-2)}(t)+C_s^3B^{(s-3)}(t) & \dots & C_s^sA(t) \end{pmatrix},$$

а также матрицы

$$\Gamma_s(t)=\left(\begin{array}{c||c} C_0^0A(t) & \\ C_1^0A'(t)+C_1^1B(t) & \\ \vdots & \Lambda_s(t) \\ C_s^0A^{(s)}(t)+C_s^1B^{(s-1)}(t) & \end{array}\right),\quad D_s(t)=\left(\,\mathcal{B}(t)\mid\Gamma_s(t)\,\right),$$

имеющие соответственно размеры $n(s+1)\times n(s+1)$ и $n(s+1)\times n(s+2)$. Здесь и далее $C_i^j=i!/(j!(i-j)!)$ – биномиальные коэффициенты, $\mathcal{B}(t)=\operatorname{col}(B(t),B'(t),\dots,B^{(r)}(t))$. Через O_i^j обозначена нулевая матрица, при этом нижний индекс равен числу строк, а верхний – числу её столбцов. Далее в тех случаях, когда размеры нулевой матрицы не имеют значения или очевидны, индексы (один или оба) будем опускать.

Предположим, что для некоторого $s=r$ $(0\leqslant r\leqslant n)$ выполняется условие $\operatorname{rank}\Lambda_r(t)=\lambda=\mathrm{const}$ для всех $t\in\mathbb{R}$ и в матрице $D_r(t)$ имеется неособенный на $\mathbb{R}$ минор $n(r+1)$-го порядка, включающий в себя λ столбцов матрицы $\Lambda_r(t)$ и n первых столбцов матрицы $\Gamma_r(t)$.

В работе используются выражения "обратимость на $\mathbb{R}$", "линейная (не)зависимость на $\mathbb{R}$" и т.п., которые следует понимать как обратимость и линейную (не)зависимость при всех $t\in\mathbb{R}$.

Определение 1. Неособенный при всех $t\in\mathbb{R}$ минор порядка $n(r+1)$ матрицы $D_r(t)$, включающий в себя λ столбцов матрицы $\Lambda_r(t)$ и n первых столбцов матрицы $\Gamma_r(t)$, будем называть *разрешающим минором.*

Определение 2. Наименьшее значение $r\leqslant n$, при котором в матрице $D_r(t)$ имеется разрешающий минор, называется *индексом неразрешённости* ДАУ (0.1).

Всюду ниже число r обозначает индекс неразрешённости системы (0.1).

Лемма 1 [11]. *Пусть выполнены условия:*

1) имеют место включения $A(t),B(t)\in C^r(\mathbb{R})$;

2) для всех $t\in\mathbb{R}$ *справедливо равенство* $\operatorname{rank}\Lambda_r(t)=\lambda=\mathrm{const}$;

3) в матрице $D_r(t)$ *имеется разрешающий минор.*

Тогда существует оператор

$$\mathcal{R}\equiv R_0(t)+R_1(t)\frac{d}{dt}+\ldots+R_r(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^r \tag{1.1}$$

с непрерывными на $\mathbb{R}$ *коэффициентами* $R_j(t)$, *обладающий свойством: для любой* n*-мерной функции* $\varphi(t)\in C^{r+1}(\mathbb{R})$ *верно равенство*

$$\mathcal{R}\left[A(t)\frac{d}{dt}\varphi(t)+B(t)\varphi(t)\right]=(R_0(t)\ R_1(t)\ \ldots\ R_r(t))D_r(t)\ \mathrm{col}\left(\varphi(t),\frac{d}{dt}\varphi(t),\ldots,\left(\frac{d}{dt}\right)^{(r+1)}\varphi(t)\right)=$$

$$=\begin{pmatrix} O & O\\ E_{n-d} & O\end{pmatrix}Q^{-1}\frac{d}{dt}\varphi(t)+\begin{pmatrix} J_2(t) & E_d\\ J_1(t) & O\end{pmatrix}Q^{-1}\varphi(t),$$

где E_{n-d} *– единичная матрица порядка* $n-d$, Q *–* $n\times n$*-матрица перестановок*[*)].

2. Решение ДАУ в пространстве распределений. Обозначим $\mathbb{D}$ – пространство финитных функций класса $C^\infty(\mathbb{R})$ и $\mathbb{D}'$ – пространство обобщённых функций на $\mathbb{D}$. Через $\{f(t)\}$ будем обозначать регулярную функцию из $\mathbb{D}'$, порождаемую локально интегрируемой на $\mathbb{R}$ функцией $f(t)$.

Рассмотрим систему (0.1), в которой $A(t),B(t),U(t)\in C^\infty(\mathbb{R})$; $x(t),u(t)\in\mathbb{D}'$; d/dt обозначает обобщённую производную. Управление зададим в виде

$$u(t)=\{v(t)\},\tag{2.1}$$

где $v(t)\in C^r_\tau(\mathbb{R})$ – функция, непрерывная всюду на $\mathbb{R}$ за исключением точки τ, в которой она, если и имеет разрыв, то только первого рода, причём этим же свойством обладают и все производные этой функции до порядка r включительно. Обозначим скачок j-й производной функции $v(t)$ в точке τ через

$$\Delta_{v^{(j)}}(\tau)=v^{(j)}(\tau+0)-v^{(j)}(\tau-0),\quad j=\overline{0,r}.\tag{2.2}$$

Здесь и далее запись $v^{(j)}$ обозначает обычную производную j-го порядка.

Определение 3. *Решением* системы (0.1), (2.1) будем называть функцию $x(t)\in\mathbb{D}'$, которая обращает ДАУ (0.1) в тождество при подстановке, и может быть представлена в виде суммы

$$x(t)=\{\chi(t)\}+\eta(t),\tag{2.3}$$

где $\chi(t)\in C^1_\tau(\mathbb{R})$,

$$\eta(t)=\sum_{j=1}^{r-1}\eta_{j-1}\left(\frac{d}{dt}\right)^{j-1}\delta(t-\tau),\tag{2.4}$$

$\delta(t)$ – дельта-функция Дирака: $\langle\delta(t-\tau),\phi(t)\rangle=\phi(\tau)$ для любой $\phi(t)\in\mathbb{D}$; $\eta_j\in\mathbb{R}^n$. При этом функцию $\{\chi(t)\}$ будем называть *регулярной*, а функцию $\eta(t)$ – *сингулярной* составляющей решения.

В работе [10] доказана теорема о существовании решения ДАУ (0.1) в пространстве $\mathbb{D}'$.

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) имеют место включения $A(t),B(t),U(t)\in C^\infty(\mathbb{R})$;

2) для всех $t\in\mathbb{R}$ *справедливо равенство* $\mathrm{rank}\,\Lambda_r(t)=\lambda=\mathrm{const}$;

3) в матрице $D_r(t)$ *имеется разрешающий минор;*

4) для всех $t\in\mathbb{R}$ *верно равенство* $\mathrm{rank}\,\Gamma_r(t)=\mathrm{rank}\,\Gamma_{r-1}(t)+n$.

Тогда существует решение системы (0.1), (2.1).

Замечание 1. Если для ДАУ (0.1) задать согласованные начальные условия вида $\chi(\tau-0)=\xi_1$ или $\chi(\tau+0)=\xi_2$ $(\xi_1,\xi_2\in\mathbb{R}^n)$, то решение будет единственным [10].

Рассмотрим ДАУ специального вида

$$\begin{pmatrix} O^n_{n-\hat\rho}\\ A_0(t)\end{pmatrix}\frac{d}{dt}x(t)+\begin{pmatrix} B_1(t)\\ B_2(t)\end{pmatrix}x(t)+\begin{pmatrix} f_1(t)\\ f_2(t)\end{pmatrix}=0,\tag{2.5}$$

[*)] О матрицах перестановок строк и столбцов см. монографию [6, с. 127, 128]. О построении матрицы Q см. [10].

где $A_0(t)$ – $\hat\rho\times n$-матрица, вектор-функции $f_1(t), f_2(t)\in\mathbb{D}'$ состоят из $n-\hat\rho$ и $\hat\rho$ строк соответственно, а матрицы $B_1(t)$ и $B_2(t)$ имеют соответственно размеры $(n-\hat\rho)\times n$ и $\hat\rho\times n$. Кроме того, выполняется условие

$$\det\begin{pmatrix} B_1(t)\\ A_0(t)\end{pmatrix}\neq 0 \quad \text{для любого} \quad t\in\mathbb{R}. \tag{2.6}$$

Покажем, что решение такой системы не содержит дельта-функции и её производных в случае, когда $f_1(t)$ и $f_2(t)$ являются регулярными обобщёнными функциями.

Теорема 2. *Пусть для ДАУ (2.5) выполнены следующие условия:*

1) имеют место включения $A_0(t), B_1(t), B_2(t)\in C^\infty(\mathbb{R})$;

2) матрица

$$D_1(t)=\left(\begin{array}{c|c||c} B_1(t) & O & O\\ B_2(t) & A_0(t) & O\\ \hline B_1'(t) & B_1(t) & O\\ B_1'(t) & A_0'(t)+B_2(t) & A_0(t)\end{array}\right) \tag{2.7}$$

содержит разрешающий минор;

3) справедливо условие (2.6);

4) верно равенство $f_i(t)=\{v_i(t)\}$, *где* $v_i(t)\in C^1_\tau(\mathbb{R})$, $i=1,2$.

Тогда решение системы (2.5) существует и представимо в виде

$$x(t)=\{\chi(t)\},\quad \chi(t)\in C^1_\tau(\mathbb{R}). \tag{2.8}$$

Доказательство. Покажем, что при сделанных предположениях при $r=1$ для ДАУ (2.5) выполняются все условия теоремы 1.

Условие (2.6) гарантирует, что матрицы $B_1(t)$ и $A_0(t)$ обладают на $\mathbb{R}$ полным строчным рангом, поэтому $\operatorname{rank} A_0(t)=\hat\rho=\text{const}$ для любого $t\in\mathbb{R}$.

Поскольку матрица $\Lambda_1(t)$ расположена в (2.7) правее двойной вертикальной черты, то при всех значениях $t\in\mathbb{R}$ справедливо равенство

$$\operatorname{rank}\Lambda_1(t)=\operatorname{rank}A_0(t)=\hat\rho=\text{const}.$$

Следовательно, условие 2) теоремы 1 выполнено.

В свою очередь $\Gamma_0(t)=\operatorname{col}(O, A_0(t))$, а матрица $\Gamma_1(t)$ располагается в (2.7) справа от одиночной вертикальной черты и включает в себя матрицу $\Lambda_1(t)$. Если принять во внимание предположение (2.6), то справедливость условия 4) теоремы 1 становится очевидной. Таким образом, по теореме 1 решение ДАУ (2.5) вида (2.3), (2.4) существует. Покажем, что $\eta(t)=0$.

Подставляя представление (2.3) в уравнение (2.5), придём к системе

$$\begin{pmatrix} O_{n-\hat\rho}\\ A_0(t)\end{pmatrix}\Big[\{\chi'(t)\}+h_\chi(\tau)\delta(t-\tau)+\frac{d}{dt}\eta(t)\Big]+\begin{pmatrix} B_1(t)\\ B_2(t)\end{pmatrix}[\{\chi(t)\}+\eta(t)]+\begin{pmatrix}\{v_1(t)\}\\ \{v_2(t)\}\end{pmatrix}=0, \tag{2.9}$$

где $h_\chi(\tau)=\chi(\tau+0)-\chi(\tau-0)$ – скачок функции $\chi(t)$ в точке τ.

Будем искать сингулярную составляющую решения в виде $\eta(t)=\eta_0\delta(t-\tau)$. Приравняем регулярные и сингулярные слагаемые в левой и правой частях равенства (2.9). В результате получим уравнение для нахождения функции $\chi(t)$, которое в данном случае нас не интересует, и уравнение для сингулярных слагаемых

$$\begin{pmatrix} O_{n-\hat\rho}\\ A_0(\tau)\end{pmatrix}h_\chi(\tau)\delta(t-\tau)+\begin{pmatrix} O_{n-\hat\rho}\\ A_0(\tau)\end{pmatrix}\eta_0\frac{d}{dt}\delta(t-\tau)+\begin{pmatrix} B_1(\tau)\\ B_2(\tau)-A_0'(\tau)\end{pmatrix}\eta_0\delta(t-\tau)=0, \tag{2.10}$$

которое записано с использованием формулы

$$g(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^i \delta(t-\tau) = \sum_{j=0}^{i}(-1)^j C_i^j g^{(j)}(\tau)\left(\frac{d}{dt}\right)^{i-j}\delta(t-\tau) \quad \text{для любой} \quad g(t)\in C^\infty(\mathbb{R}), \tag{2.11}$$

где $i = 1, 2, \ldots$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых производных дельта-функции, стоящих слева и справа от знака равенства в уравнении (2.10), получаем следующую систему уравнений относительно $h_\chi(\tau)$ и η_0:

$$\begin{pmatrix} O_{n-\hat\rho} \\ A_0(\tau) \end{pmatrix} h_\chi(\tau) + \begin{pmatrix} B_1(\tau) \\ B_2(\tau) - A_0'(\tau) \end{pmatrix}\eta_0 = 0, \quad \begin{pmatrix} O_{n-\hat\rho} \\ A_0(\tau) \end{pmatrix}\eta_0 = 0. \tag{2.12}$$

Перегруппировка уравнений системы (2.12) даёт для нахождения коэффициента η_0 уравнение

$$\begin{pmatrix} B_1(\tau) \\ A_0(\tau) \end{pmatrix}\eta_0 = 0 \tag{2.13}$$

и для нахождения скачка регулярной составляющей решения уравнение

$$A_0(\tau)h_\chi(\tau) + (B_2(\tau) - A_0'(\tau))\eta_0 = 0.$$

С учётом условия (2.6) из (2.13) находим $\eta_0 = 0$. Таким образом, $\eta(t) = 0$. Теорема доказана.

Замечание 2. Из условия 2) теоремы 2 вытекает существование в матрице $B_1(t)$ обратимой на $\mathbb{R}$ подматрицы порядка $n-\hat\rho$. Учитывая этот факт, можно найти явное представление для регулярной составляющей решения $\{\chi(t)\}$ и скачка $h_\chi(\tau)$.

Замечание 3. Сингулярную составляющую решения системы (2.5), (2.6) можно искать в виде

$$\eta(t) = \eta_0\delta(t-\tau) + \eta_1\frac{d}{dt}\delta(t-\tau) + \ldots + \eta_s\left(\frac{d}{dt}\right)^s\delta(t-\tau),$$

где $s \geqslant 1$. При этом все коэффициенты определятся единственным образом и будут равны нулю.

3. Вспомогательные утверждения о рангах переменных матриц.

Лемма 2 [12, с. 39]. *Пусть выполнены условия:*

1) $l\times s$-матрица $M(t)$ принадлежит классу $C^k(\mathbb{R})$ для некоторого $k\in\mathbb{N}$;

2) для всех $t\in\mathbb{R}$ справедливо равенство $\operatorname{rank} M(t) = \mu = \mathrm{const}$.

Тогда существуют $l\times l$-матрица $L(t)$ и $s\times s$-матрица $S(t)$ такие, что $L(t), S(t) \in C^k(\mathbb{R})$, $\det L(t)\neq 0$, $\det S(t) \neq 0$ для любого $t\in\mathbb{R}$ и верны тождества

$$L(t)M(t) \equiv \begin{pmatrix} O \\ M_1(t) \end{pmatrix}, \quad M(t)S(t) \equiv \begin{pmatrix} M_2(t) & O \end{pmatrix}, \quad t\in\mathbb{R},$$

где матрицы $M_1(t)$ и $M_2(t)$ имеют полный ранг μ по строкам и столбцам соответственно.

Утверждение 1. *Пусть выполнены условия:*

1) матрицы $P_i(t)\in C^k(\mathbb{R})$ $(i=\overline{1,r},\ k\in\mathbb{N})$ имеют соответствующие размеры;

2) каждая из матриц $P_i(t)$ обладает полным строчным рангом ρ_i.

Тогда матрица $P_r(t)P_{r-1}(t)\cdots P_1(t)$ имеет полный строчный ранг ρ_r.

Доказательство. По лемме 2 найдётся обратимая на $\mathbb{R}$ матрица $S_1(t)\in C^k(\mathbb{R})$ такая, что

$$P_1(t)S_1(t) = (\hat P_1(t)\ O),$$

где $\rho_1\times\rho_1$-матрица $\hat P_1(t)$ неособенна для всех $t\in\mathbb{R}$. Тогда $\operatorname{rank} P_2(t)P_1(t) = \operatorname{rank} P_2(t)\hat P_1(t) = \rho_2$ для любого $t\in\mathbb{R}$. Продолжая этот процесс, приходим к заключению о справедливости утверждения.

Утверждение 2. *Пусть выполнены условия:*
1) матрицы $A_1(t), B_1(t), P_1(t) \in C^k(\mathbb{R})$ $(k \in \mathbb{N})$ *имеют соответствующие размеры;*
2) матрица $A_1(t)$ *обладает полным рангом по строкам всюду на* $\mathbb{R}$;
3) справедливо тождество $P_1(t)B_1(t) + A_1(t) \equiv O,$ $t \in \mathbb{R}$.
Тогда матрица $P_1(t)$ *имеет полный ранг по строкам для всех* $t \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Предположим, что существует значение $t_1 \in \mathbb{R},$ при котором матрица $P_1(t_1)$ не обладает полным строчным рангом. В соответствии с леммой 2 найдётся обратимая матрица L такая, что $LP_1(t_1) = \operatorname{col}(\hat{P}_1, O).$ В этом случае

$$LP_1(t_1)B_1(t_1) = \operatorname{col}(\hat{B}_1, O) = LA_1(t_1),$$

что невозможно в силу условия 2). Полученное противоречие доказывает утверждение.

4. Преобразование системы. Опишем процедуру преобразования системы (0.1) индекса r к виду (2.5), (2.6). В дальнейшем этот процесс будет необходим для того, чтобы установить связь между возможностью исключения сингулярных слагаемых из решения ДАУ с помощью обратной связи и свойством импульсной управляемости.

Пусть для системы (0.1) выполняются следующие предположения:

A1) имеют место включения $A(t), B(t), U(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$;

A2) для всех $t \in \mathbb{R}$ справедливо равенство $\operatorname{rank} A(t) = \rho = \mathrm{const}$;

A3) при некотором $r \leqslant n$ матрица $D_r(t)$ всюду на $\mathbb{R}$ имеет полный строчный ранг, равный $(r+1)n$.

Согласно лемме 2 предположения A1) и A2) гарантируют существование $n \times n$-матрицы $P_0(t) \in C^\infty(\mathbb{R}),$ обратимой на $\mathbb{R},$ такой, что

$$P_0(t)A(t) = \operatorname{col}(O_{n-\rho}, A^{[0]}(t)), \tag{4.1}$$

где $\rho \times n$-матрица $A^{[0]}(t)$ имеет полный ранг по строкам при всех $t \in \mathbb{R}$.

В результате умножения слева системы (0.1) на матрицу $P_0(t)$ получим

$$\begin{pmatrix} O_{n-\rho} \\ A^{[0]}(t) \end{pmatrix} \frac{d}{dt}x(t) + \begin{pmatrix} B_1^{[0]}(t) \\ B_2^{[0]}(t) \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} U_1^{[0]}(t) \\ U_2^{[0]}(t) \end{pmatrix} u(t) = 0, \tag{4.2}$$

где

$$\begin{pmatrix} B_1^{[0]}(t) \\ B_2^{[0]}(t) \end{pmatrix} = P_0(t)B(t), \quad \begin{pmatrix} U_1^{[0]}(t) \\ U_2^{[0]}(t) \end{pmatrix} = P_0(t)U(t). \tag{4.3}$$

Из предположения A3) следует, что матрица $D_0(t) = (B(t)\ A(t))$ имеет полный строчный ранг n при всех значениях $t \in \mathbb{R}.$ Тогда матрица

$$P_0(t)(B(t)\ A(t)) = \begin{pmatrix} B_1^{[0]}(t) & O_{n-\rho} \\ B_2^{[0]}(t) & A^{[0]}(t) \end{pmatrix}$$

также имеет полный ранг по строкам. Поскольку $\operatorname{rank} A^{[0]}(t) \equiv \rho,$ то $\operatorname{rank} B_1^{[0]}(t) = n - \rho$ для всех $t \in \mathbb{R}$.

Если матрица $\begin{pmatrix} B_1^{[0]}(t) \\ A^{[0]}(t) \end{pmatrix}$ обратима на $\mathbb{R},$ то (4.2) является искомой системой вида (2.5), (2.6). Противное означает, что в этой матрице имеются линейно зависимые на $\mathbb{R}$ строки.

Не ограничивая общности, можно считать матрицу $P_0(t)$ такой, что

$$A^{[0]}(t) = \operatorname{col}(A_1^{[0]}(t), A_2^{[0]}(t)), \tag{4.4}$$

где блоки $A_1^{[0]}(t)$ и $A_2^{[0]}(t)$ состоят из ρ_1 и $\rho - \rho_1$ строк соответственно. При этом все строки матрицы $A_1^{[0]}(t)$ линейно зависимы со строками матрицы $B_1^{[0]}(t),$ а строки матрицы

$\mathrm{col}\,(B_1^{[0]}(t), A_2^{[0]}(t))$ линейно независимы на $\mathbb{R}$. В этом случае найдётся $\rho_1 \times (n-\rho)$-матрица $P_1(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$ такая, что
$$P_1(t)B_1^{[0]}(t) + A_1^{[0]}(t) \equiv O. \tag{4.5}$$
В соответствии с утверждением 2 матрица $P_1(t)$ будет иметь на $\mathbb{R}$ полный ранг по строкам, равный ρ_1.

Подействуем на обе части системы (4.2) оператором
$$\mathcal{P}_1 \equiv \begin{pmatrix} E_{n-\rho} & O & O \\ O & E_{\rho_1} & O \\ O & O & E_{\rho-\rho_1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O_{n-\rho}^{n-\rho} & O & O \\ P_1(t) & O_{\rho_1}^{\rho_1} & O \\ O & O & O_{\rho-\rho_1}^{\rho-\rho_1} \end{pmatrix} \frac{d}{dt}, \tag{4.6}$$
в результате чего получим ДАУ
$$\begin{pmatrix} O_{n-\rho} \\ O_{\rho_1} \\ A^{[1]}(t) \end{pmatrix} \frac{d}{dt}x(t) + \begin{pmatrix} B_1^{[0]}(t) \\ B_1^{[1]}(t) \\ B_2^{[1]}(t) \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} U_1^{[0]}(t) \\ U_1^{[1]}(t) \\ U_2^{[1]}(t) \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} O_{n-\rho} \\ P_1(t)U_1^{[0]}(t) \\ O_{\rho-\rho_1} \end{pmatrix} \frac{d}{dt}u(t) = 0, \tag{4.7}$$
где
$$A^{[1]}(t) = A_2^{[0]}(t), \quad \begin{pmatrix} B_1^{[1]}(t) \\ B_2^{[1]}(t) \end{pmatrix} = B_2^{[0]}(t) + \begin{pmatrix} P_1(t)(B_1^{[0]}(t))' \\ O \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} U_1^{[1]}(t) \\ U_2^{[1]}(t) \end{pmatrix} = U_2^{[0]}(t) + \begin{pmatrix} P_1(t)(U_1^{[0]}(t))' \\ O \end{pmatrix}.$$

По построению матрица $A^{[1]}(t)$ будет иметь на $\mathbb{R}$ полный строчный ранг $\rho-\rho_1$. Так же, как это было сделано выше в отношении матрицы $B_1^{[0]}(t)$, можно показать, что условие A3) гарантирует полноту на $\mathbb{R}$ строчного ранга матрицы $\mathrm{col}\,(B_1^{[0]}(t), B_1^{[1]}(t))$.

Если матрица $\mathrm{col}\,(B_1^{[0]}(t), B_1^{[1]}(t), A^{[1]}(t))$ обратима на $\mathbb{R}$, то (4.7) и есть искомая система (2.5), (2.6). В противном случае матрица $A^{[1]}(t)$ содержит подматрицу $A_1^{[1]}(t)$ размера $\rho_2 \times n$, все строки которой линейно зависимы со строками матрицы $B_1^{[1]}(t)$. Не ограничивая общности, можно считать, что $A^{[1]}(t) = \mathrm{col}\,(A_1^{[1]}(t), A_2^{[1]}(t))$, где $\mathrm{rank}\,\mathrm{col}\,(B_1^{[1]}(t), A_2^{[1]}(t)) \equiv \rho$ совпадает с числом строк этой матрицы. Кроме того, найдётся $\rho_2 \times \rho_1$-матрица $P_2(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$ такая, что $P_2(t)B_1^{[1]}(t) + A_1^{[1]}(t) \equiv O$ на $\mathbb{R}$. По утверждению 2 $\mathrm{rank}\, P_2(t) \equiv \rho_2$.

Подействуем на обе части равенства (4.7) оператором
$$\mathcal{P}_2 \equiv \begin{pmatrix} E_{n-\rho} & O & O & O \\ O & E_{\rho_1} & O & O \\ O & O & E_{\rho_2} & O \\ O & O & O & E_{\rho-\rho_1-\rho_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O_{n-\rho}^{n-\rho} & O & O & O \\ O & O_{\rho_1}^{\rho_1} & O & O \\ O & P_2(t) & O_{\rho_2}^{\rho_2} & O \\ O & O & O & O_{\rho-\rho_1-\rho_2}^{\rho-\rho_1-\rho_2} \end{pmatrix} \frac{d}{dt}. \tag{4.8}$$

Аналогичным образом продолжая процесс преобразований далее, за конечное число шагов k получим систему
$$\begin{pmatrix} O_{n-\rho} \\ O_{\rho_1} \\ \vdots \\ O_{\rho_k} \\ A^{[k]}(t) \end{pmatrix} \frac{d}{dt}x(t) + \begin{pmatrix} B_1^{[0]}(t) \\ B_1^{[1]}(t) \\ \vdots \\ B_1^{[k]}(t) \\ B_2^{[k]}(t) \end{pmatrix} x(t) +$$

$$
+\begin{pmatrix} V_1^{[0]}(t) & O & O & \dots & O \\ V_2^{[0]}(t) & V_1^{[1]}(t) & O & \dots & O \\ V_3^{[0]}(t) & V_2^{[1]}(t) & V_1^{[2]}(t) & \dots & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ V_{k+1}^{[0]}(t) & V_k^{[1]}(t) & V_{k-1}^{[2]}(t) & \dots & V_1^{[k]}(t) \\ V_{k+2}^{[0]}(t) & O & O & \dots & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ \dfrac{d}{dt}u(t) \\ \left(\dfrac{d}{dt}\right)^2 u(t) \\ \vdots \\ \left(\dfrac{d}{dt}\right)^k u(t) \end{pmatrix} = 0, \qquad (4.9)
$$

где $\operatorname{rank} A^{[k]}(t) \equiv \hat{\rho} = \rho - \sum_{j=1}^{k} \rho_j$,

$$
\det \operatorname{col}(B_1^{[0]}(t),\ B_1^{[1]}(t), \dots,\ B_1^{[k]}(t),\ A^{[k]}(t)) \neq 0 \quad \text{для всех} \quad t \in \mathbb{R}. \qquad (4.10)
$$

Если матрица $P_0(t)$ в соответствии с изложенным выше алгоритмом разбивает матрицы $B(t)$ и $U(t)$ на блоки соответствующего размера:

$$
\operatorname{col}(B_1^{[0]}(t),\ B_{2,1}^{[0]}(t),\ B_{2,2}^{[0]}(t),\ \dots, B_{2,k+1}^{[0]}(t)) = P_0(t)B(t),
$$

$$
\operatorname{col}(U_1^{[0]}(t),\ U_{2,1}^{[0]}(t),\ U_{2,2}^{[0]}(t),\ \dots,\ U_{2,k+1}^{[0]}(t)) = P_0(t)U(t), \qquad (4.11)
$$

то

$$
B_1^{[1]}(t) = B_{2,1}^{[0]}(t) + P_1(t)(B_1^{[0]}(t))', \quad B_1^{[2]}(t) = B_{2,2}^{[0]}(t) + P_2(t)(B_1^{[1]}(t))', \quad \dots,
$$

$$
B_1^{[k]}(t) = B_{2,k}^{[0]}(t) + P_k(t)(B_1^{[k-1]}(t))', \quad B_2^{[k]}(t) = B_{2,k+1}^{[0]}(t);
$$

$$
V_1^{[0]}(t) = U_1^{[0]}(t), \quad V_2^{[0]}(t) = U_{2,1}^{[0]}(t) + P_1(t)(V_1^{[0]}(t))', \quad \dots,
$$

$$
V_{k+1}^{[0]}(t) = U_{2,k}^{[0]}(t) + P_k(t)(V_k^{[0]}(t))', \quad V_{k+2}^{[0]}(t) = U_{2,k+1}^{[0]}(t);
$$

$$
V_1^{[i]}(t) = P_i(t)V_1^{[i-1]}(t), \quad i = \overline{1,k};
$$

$$
V_j^{[i]}(t) = P_{j+i-1}(t)V_j^{[i-1]}(t) + P_{j+i-1}(t)(V_{j-1}^{[i]}(t))', \quad i = \overline{1,k-1}, \quad j = \overline{2,k-i+1}.
$$

Система (4.9) получена из системы (0.1) применением линейного дифференциального оператора $\mathcal{P}$ k-го порядка такого, что для любой n-мерной вектор-функции $\varphi(t) \in C^k(\mathbb{R})$ верно равенство

$$
\mathcal{P}[\varphi(t)] = \mathcal{P}_k[\mathcal{P}_{k-1}[\dots[\mathcal{P}_1[P_0(t)\varphi(t)]\dots]], \qquad (4.12)
$$

где $\mathcal{P}_k,\ \mathcal{P}_{k-1}, \dots,\ \mathcal{P}_3$ – операторы, аналогичные (4.6), (4.8).

Лемма 3. *В предположениях A1)–A3) оператор $\mathcal{P}$ обратим.*

Доказательство. По построению $n \times n$-матрица $P_0(t)$ обратима при всех $t \in \mathbb{R}$, а операторы $\mathcal{P}_i$ $(i = \overline{1,k})$ имеют вид

$$
\mathcal{P}_i = E_n + \mathcal{N}_i(t)\frac{d}{dt}, \qquad (4.13)
$$

где $\mathcal{N}_i(t)$ – нижнетреугольная матрица с квадратными нулевыми блоками на диагонали, так что $\mathcal{N}_i^2(t) = O$, $\mathcal{N}_i(t)\mathcal{N}_i'(t) = O$ для $i = \overline{1,k}$ и всех $t \in \mathbb{R}$.

Нетрудно убедиться, что имеет место равенство

$$
\mathcal{P}_i^{-1} = E_n - \mathcal{N}_i(t)\frac{d}{dt}.
$$

Таким образом, $\mathcal{P}^{-1}[\varphi(t)] = P_0^{-1}(t)\mathcal{P}_1^{-1}[\mathcal{P}_2^{-1}[\dots[\mathcal{P}_k^{-1}[\varphi(t)]\dots]]$. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть для системы (0.1) выполнены условия А1)–А3). Тогда для неё справедливы равенства*

$$\operatorname{rank}\Lambda_i(t) = \hat{\rho} + (i-1)n = \mathrm{const}, \tag{4.14}$$

$$\operatorname{rank}\Gamma_i(t) = \operatorname{rank}\Gamma_{i-1}(t) + n \quad \textit{для всех} \quad t \in \mathbb{R}, \quad i = \overline{1,r}, \quad r \leqslant n, \tag{4.15}$$

где в соответствии с изложенным выше алгоритмом $\hat{\rho} = \rho - \sum_{j=0}^{k} \rho_i = \operatorname{rank} A^{[k]}(t)$ *(см. (4.9)).*

Доказательство. Для упрощения выкладок запишем ДАУ (4.9) в виде (2.5), где

$$B_1(t) = \operatorname{col}(B_1^{[0]}(t), B_1^{[1]}(t), \ldots, B_1^{[k]}(t)), \quad B_2(t) = B_2^{[k]}(t), \quad A_0(t) = A^{[k]}(t), \tag{4.16}$$

а обобщённая функция $\operatorname{col}(f_1(t), f_2(t))$ включает в себя все слагаемые из (4.9), содержащие управление и его производные. В принятых обозначениях условия (2.6) и (4.10) идентичны.

Аналоги матриц $D_i(t)$, $\Gamma_i(t)$ и $\Lambda_i(t)$ для системы (4.9) обозначим через $\bar{D}_i(t)$, $\bar{\Gamma}_i(t)$ и $\bar{\Lambda}_i(t)$ соответственно. При некотором значении $i : 1 \leqslant i \leqslant n$

$$\bar{D}_i(t) = \left(\begin{array}{c|c||cccc}
C_0^0 B_1(t) & O & O & \ldots & O & O \\
* & C_1^0 A_0(t) & O & \ldots & O & O \\
\hline
* & C_1^1 B_1(t) & O & \ldots & O & O \\
* & * & C_2^1 A_0(t) & \ldots & O & O \\
\hline
* & * & C_2^2 B_1(t) & \ldots & O & O \\
* & * & * & \ldots & O & O \\
\hline
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & O & O \\
\hline
* & * & * & \ldots & O & O \\
* & * & * & \ldots & C_i^{i-1} A_0(t) & O \\
\hline
* & * & * & \ldots & C_i^i B_1(t) & O \\
* & * & * & \ldots & * & C_{i+1}^i A_0(t)
\end{array}\right). \tag{4.17}$$

Здесь и ниже звездочками обозначены блоки, явное представление которых для дальнейшего анализа несущественно.

Матрица $\bar{\Lambda}_i(t)$ располагается в (4.17) справа от двойной вертикальной черты, а матрица $\bar{\Gamma}_i(t)$ – правее одиночной вертикальной линии (и включает в себя матрицу $\bar{\Lambda}_i(t)$). При этом $\operatorname{rank} A_0(t) \equiv \hat{\rho}$ на $\mathbb{R}$. Несложно видеть, что в силу условия (2.6) справедливы равенства

$$\operatorname{rank}\bar{\Lambda}_i(t) = \hat{\rho} + (i-1)n, \quad \operatorname{rank}\bar{\Gamma}_i(t) = \hat{\rho} + in. \tag{4.18}$$

Нетрудно показать, что матрицы $\bar{D}_i(t)$ и $D_i(t)$ связаны друг с другом посредством некоторой обратимой на $\mathbb{R}$ матрицы $\bar{P}(t)$ такой, что

$$\bar{D}_i(t) = \bar{P}(t) D_i(t), \quad \det \bar{P}(t) \neq 0, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{4.19}$$

Вследствие последнего обстоятельства ранги матриц $\bar{\Lambda}_i(t)$, $\Lambda_i(t)$ и $\bar{\Gamma}_i(t)$, $\Gamma_i(t)$ попарно совпадают. Равенства (4.14), (4.15) являются прямым следствием соотношений (4.18). Лемма доказана.

Если усилить предположение А3), заменив его на условие 3) теоремы 1, то можно показать, что в (4.9) $k = r - 1$, где r – индекс неразрешённости системы (0.1).

Лемма 5. *Пусть выполнены условия:*

1) имеют место предположения А1), А2);

2) матрица $D_r(t)$ содержит разрешающий минор.

Тогда $k = r - 1$.

Доказательство. Запишем систему (4.9) в форме (2.5), воспользовавшись обозначениями (4.16).

Вследствие связи (4.19) наличие в матрице $D_r(t)$ разрешающего минора означает, что такой же минор имеется и в матрице $\bar{D}_r(t)$ (см. (4.17)). Последнее обеспечивает существование в матрице $B_1(t)$ обратимой на $\mathbb{R}$ подматрицы порядка $d = n - \hat{\rho}$, которую обозначим через $B_{1,2}(t)$. Пусть Q – матрица перестановок столбцов такая, что

$$B_1(t)Q = (B_{1,1}(t) \;\; B_{1,2}(t)).$$

В системе (2.5) сделаем замену переменных $x(t) = Q\,\mathrm{col}\,(x_1(t), x_2(t))$, где $x_1(t), x_2(t) \in \in \mathbb{D}'$ – вектор-функции размерностей $\hat{\rho} = n - d$ и d соответственно. В результате система (2.5) приобретёт вид

$$\begin{pmatrix} O_d & O \\ A_{0,1}(t) & A_{0,2}(t) \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{1,1}(t) & B_{1,2}(t) \\ B_{2,1}(t) & B_{2,2}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} = 0, \qquad (4.20)$$

где

$$(A_{0,1}(t) \;\; A_{0,2}(t)) = A_0(t)Q, \quad (B_{2,1}(t) \;\; B_{2,2}(t)) = B_2(t)Q.$$

При сделанных предположениях справедлива лемма 1, согласно которой для ДАУ (0.1) определён линейный дифференциальный оператор (1.1) порядка r, действие которого на систему (0.1) преобразует её к виду

$$\begin{pmatrix} O_d & O \\ E_{n-d} & O \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J_2(t) & E_d \\ J_1(t) & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \mathcal{R}[U(t)u(t)] = 0, \qquad (4.21)$$

$J_1(t)$ и $J_2(t)$ – некоторые матрицы соответствующих размеров.

В силу того, что $\det B_{1,2}(t) \neq 0$ на $\mathbb{R}$, условие (2.6) гарантирует обратимость матрицы [6, с. 57]

$$G_0(t) = A_{0,1}(t) - A_{0,2}(t)B_{1,2}^{-1}(t)B_{1,1}(t).$$

Нетрудно убедиться, что систему (4.20) можно преобразовать к виду (4.21) при помощи действия линейного дифференциального оператора первого порядка

$$\mathcal{G} \equiv \begin{pmatrix} B_{1,2}^{-1} & O \\ O & G_0^{-1} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} E_d & O \\ -A_{0,2}\left(B_{1,2}^{-1}\right)' - B_{2,2}B_{1,2}^{-1} & E_{n-d} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O & O \\ -A_{0,2}B_{1,2}^{-1} & O \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \right].$$

Таким образом, действие оператора (1.1) r-го порядка, преобразующего ДАУ (0.1) к виду (4.21), определяется тождеством

$$\mathcal{R}[\varphi(t)] \equiv G[\mathcal{P}[\varphi(t)]] \quad \text{для любой} \quad \varphi(t) \in C^r(\mathbb{R}),$$

где $\mathcal{P}$ – оператор порядка k, преобразующий систему (0.1) в систему (4.9) (или, что то же самое, в систему (2.5)). Поэтому $k = r - 1$. Лемма доказана.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия:*

1) имеют место включения $A(t), B(t), U(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$;

2) для всех $t \in \mathbb{R}$ *справедливо равенство* $\mathrm{rank}\, A(t) = \rho = \mathrm{const}$;

3) в матрице $D_r(t)$ *имеется разрешающий минор.*

Тогда решение системы (0.1) существует в классе $\mathbb{D}'$. *При этом любое решение ДАУ (0.1) будет решением системы (4.9) и наоборот.*

Доказательство. При сделанных предположениях справедлива лемма 4. Поэтому для системы (0.1) выполняются все предположения теоремы 1, в соответствии с которой решение системы в смысле определения 3 существует. Эквивалентность в смысле совпадения решений систем (0.1) и (4.9) является прямым следствием леммы 3. Теорема доказана.

5. Исключение импульсной составляющей решения с помощью обратной связи. Пусть имеют место предположения A1)–A3). В системе (0.1) зададим управление в виде обратной связи

$$u(t) = K(t)x(t) + \{w(t)\}, \quad K(t) \in C^\infty(\mathbb{R}), \quad w(t) \in C^1_\tau(\mathbb{R}). \tag{5.1}$$

В этом пункте работы найдены условия, при которых для ДАУ (0.1) найдётся $l \times n$-матрица $K(t)$ такая, что общее решение замкнутой системы

$$A(t)\frac{d}{dt}x(t) + (B(t) + U(t)K(t))x(t) + U(t)\{w(t)\} = 0 \tag{5.2}$$

не содержит слагаемых с дельта-функцией и её производными, т.е. в представлении (2.3) $\eta(t) = 0$.

Сначала получим критерий существования такой матрицы $K(t)$, что умножением слева на некоторую обратимую матрицу с элементами класса $C^\infty(\mathbb{R})$ система (5.2) может быть преобразована к виду (2.5), (2.6).

Если $\operatorname{rank} A(t) \equiv n$, то ДАУ (0.1) уже имеет форму (2.5), (2.6) и $K(t) \equiv O$.

Пусть $\operatorname{rank} A(t) = \rho < n$. Умножим систему (5.2) слева на обратимую матрицу $P_0(t)$, зануляющую линейно зависимые на $\mathbb{R}$ строки в матрице $A(t)$ (см. (4.1)). Полученная система с использованием обозначений (4.1), (4.3) будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} O_{n-\rho} \\ A^{[0]}(t) \end{pmatrix} \frac{d}{dt}x(t) + \begin{pmatrix} B_1^{[0]}(t) + U_1^{[0]}(t)K(t) \\ B_2^{[0]}(t) + U_2^{[0]}(t)K(t) \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} U_1^{[0]} \\ U_2^{[0]} \end{pmatrix} \{w(t)\} = 0, \tag{5.3}$$

где матрица $A^{[0]}(t)$ имеет полный ранг ρ по строкам всюду на $\mathbb{R}$. Так же, как это было сделано в предыдущем пункте, можно показать, что при сделанных предположениях матрица $B_1^{[0]}(t)$ обладает полным строчным рангом всюду на $\mathbb{R}$.

Для ДАУ (5.3) за счёт выбора матрицы $K(t)$ должно быть справедливо условие (аналогичное условию (2.6) для системы (2.5))

$$\det \begin{pmatrix} B_1^{[0]}(t) + U_1^{[0]}(t)K(t) \\ A^{[0]}(t) \end{pmatrix} \neq 0 \quad \text{для всех} \quad t \in \mathbb{R}. \tag{5.4}$$

Если при этом матрица $\operatorname{col}(B_1^{[0]}(t), A^{[0]}(t))$ обратима на $\mathbb{R}$, то условие (5.4) выполняется при $K(t) \equiv O$. Если же эта матрица содержит ρ_1 линейно зависимых для всех $t \in \mathbb{R}$ строк, то существует $\rho_1 \times (n-\rho)$-матрица $P_1(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$ такая, что имеет место тождество (4.5), в котором $A_1^{[0]}(t)$ – $(\rho_1 \times n)$-подматрица матрицы $A^{[0]}(t)$ (см. (4.4)).

Умножив слева матрицу из левой части соотношения (5.4) на

$$\begin{pmatrix} E_{n-\rho} & O & O \\ P_1(t) & E_{\rho_1} & O \\ O & O & E_\rho \end{pmatrix},$$

получим с учётом (4.5) матрицу

$$\begin{pmatrix} B_1^{[0]}(t) + U_1^{[0]}(t)K(t) \\ P_1(t)U_1^{[0]}(t)K(t) \\ A_2^{[0]}(t) \end{pmatrix}, \tag{5.5}$$

где матрица $\operatorname{col}(B_1^{[0]}(t), A_2^{[0]}(t))$ имеет полный ранг по строкам:

$$\operatorname{rank}\operatorname{col}(B_1^{[0]}(t), A_2^{[0]}(t)) = n - \rho_1 \quad \text{для всех} \quad t \in \mathbb{R}. \tag{5.6}$$

Лемма 6. *Если выполнены предположения A1)–A3), то* $l\times n$*-матрица* $K(t)\in C^\infty(\mathbb{R})$ *такая, что справедливо условие (5.4), существует тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{rank} P_1(t)U_1^{[0]}(t)=\rho_1 \quad \text{для всех} \quad t\in\mathbb{R}. \tag{5.7}$$

Доказательство. Достаточность. Пусть выполнено условие (5.7). В силу тождества (5.6) по лемме 2 найдётся обратимая на $\mathbb{R}$ квадратная матрица $S(t)\in C^\infty(\mathbb{R})$ порядка n такая, что

$$\begin{pmatrix} B_1^{[0]}(t) \\ A_2^{[0]}(t) \end{pmatrix} S(t)=\begin{pmatrix} E_{n-\rho} & O & O \\ O & E_{\rho-\rho_1} & O \end{pmatrix}.$$

Умножив (5.5) справа на $S(t)$, получим матрицу

$$\begin{pmatrix} E_{n-\rho}+U_1^{[0]}(t)K_1(t) & U_1^{[0]}(t)K_2(t) & U_1^{[0]}(t)K_3(t) \\ P_1(t)U_1^{[0]}(t)K_1(t) & P_1(t)U_1^{[0]}(t)K_2(t) & P_1(t)U_1^{[0]}(t)K_3(t) \\ O & E_{\rho-\rho_1} & O \end{pmatrix}, \tag{5.8}$$

где $(K_1(t)\ K_2(t)\ K_3(t))=K(t)S(t)$. Полагая в (5.8)

$$K_1(t)\equiv O,\quad K_2(t)\equiv O,\quad K_3(t)=(P_1(t)U_1^{[0]}(t))^{\text{т}}(P_1(t)U_1^{[0]}(t)(P_1(t)U_1^{[0]}(t))^{\text{т}})^{-1}$$

($^{\text{т}}$ – знак транспонирования), получим

$$\begin{pmatrix} E_{n-\rho} & O & U_1^{[0]}(t)K_3(t) \\ O & O & E_{\rho_1} \\ O & E_{\rho-\rho_1} & O \end{pmatrix}. \tag{5.9}$$

По построению ранги матриц (5.9) и (5.5) совпадают. В свою очередь матрицы

$$\operatorname{col}(B_1^{[0]}(t)+U_1^{[0]}(t)K(t),A^{[0]}(t))$$

и (5.5) связаны обратимым на $\mathbb{R}$ преобразованием, поэтому их ранги также совпадают при всех значениях $t\in\mathbb{R}$. Следовательно, для построенной выше матрицы

$$K(t)=(K_1(t)K_2(t)K_3(t))S^{-1}(t)$$

условие (5.4) будет выполнено.

Необходимость. Допустим, что нашлась матрица $K(t)$ такая, что справедливо условие (5.4), и, следовательно, матрица (5.5) обратима на $\mathbb{R}$. В этом случае тождество (5.7) также будет иметь место. В самом деле, если существует точка $\hat t\in\mathbb{R}$, в которой $\operatorname{rank} P_1(\hat t)U_1^{[0]}(\hat t)<$ $<\rho_1$, то по лемме 2 найдётся обратимая матрица L, зануляющая линейно-зависимые строки в матрице $P_1(\hat t)U_1^{[0]}(\hat t)$. После умножения матрицы (5.5) в точке $\hat t$ слева на неособенную матрицу $\operatorname{diag}\{E_{n-\rho},L,E_{\rho-\rho_1}\}$ получим матрицу с нулевыми строками, что противоречит обратимости матрицы (5.5) при всех $t\in\mathbb{R}$. Поэтому условие (5.7) выполняется. Лемма доказана.

Теорема 4. *Пусть выполнены все предположения теоремы 3 и условие (5.7). Тогда найдётся управление вида (5.1) такое, что решение системы (5.2) существует и представимо в виде (2.8).*

Доказательство. По построению системы (5.2) и (5.3) имеют одно и то же множество решений. Решение системы (5.2) существует и имеет требуемый вид, если для ДАУ (5.3) выполняются все предположения теоремы 2.

Условия теоремы 2 применительно к системе (5.3) будут справедливы, если для ДАУ (5.3) можно построить матрицу $K(t)$ такую, что будет иметь место соотношение (5.4) и в матрице

$$\left(\begin{array}{c|c||c} B_1^{[0]}(t)+U_1^{[0]}(t)K(t) & O & O \\ B_2^{[0]}(t)+U_2^{[0]}(t)K(t) & A^{[0]}(t) & O \\ \hline (B_1^{[0]}(t)+U_1^{[0]}(t)K(t))' & B_1^{[0]}(t)+U_1^{[0]}(t)K(t) & O \\ (B_2^{[0]}(t)+U_2^{[0]}(t)K(t))' & (A^{[0]}(t))'+B_2^{[0]}(t)+U_2^{[0]}(t)K(t) & A^{[0]}(t) \end{array}\right) \tag{5.10}$$

найдётся разрешающий минор.

Рассмотрим матрицу $D_r(t)$. Умножим её слева на обратимую при всех $t \in \mathbb{R}$ матрицу

$$\begin{pmatrix} C_0^0 P_0(t) & O & O & \ldots & O \\ C_1^0 P_0'(t) & C_1^1 P_0(t) & O & \ldots & O \\ C_2^0 P_0''(t) & C_2^1 P_0'(t) & C_2^2 P_0(t) & \ldots & O \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ C_r^0 P_0^{(r)}(t) & C_r^1 P_0^{(r-1)}(t) & C_r^2 P_0^{(r-2)}(t) & \ldots & C_r^r P_0(t) \end{pmatrix},$$

а затем на матрицу

$$\operatorname{diag}\left\{E_{n-\rho}, \begin{pmatrix} E_\rho & P_1(t) \\ O & E_{n-\rho} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} E_\rho & P_1(t) \\ O & E_{n-\rho} \end{pmatrix}, E_\rho\right\},$$

где $P_0(t)$ зануляет линейно зависимые строки в матрице $A(t)$ (см. (4.1)), а $P_1(t)$ такова, что с учётом (4.4) справедливо тождество (4.5). В результате получим матрицу (из-за громоздкости явный вид её записывать не будем), в которой в силу условия 3) теоремы 3 имеется разрешающий минор. Из структуры этой матрицы вытекает, что матрицы $B_1^{[0]}(t)$, $A^{[0]}(t)$ и $\operatorname{col}(A_2^{[0]}(t), B_1^{[0]}(t))$ должны содержать обратимые на $\mathbb{R}$ подматрицы, имеющие порядки $n-\rho$, ρ и $n-\rho_1$ соответственно. В этом случае найдутся матрицы перестановок столбцов S_0 и S_1 такие, что

$$B_1^{[0]}(t)S_0 = \left(\boxed{\tilde{B}_1(t)}\ \tilde{B}_2(t)\right), \quad A^{[0]}(t)S_1 = \left(\boxed{\tilde{A}_1(t)}\ \tilde{A}_2(t)\right).$$

Здесь и ниже обведённые в рамку матрицы обратимы при всех $t \in \mathbb{R}$.

Умножив слева матрицу (5.10) на

$$\operatorname{diag}\left\{E_{n-\rho}, \begin{pmatrix} E_\rho & P_1(t) \\ O & E_{n-\rho} \end{pmatrix}, E_\rho\right\},$$

получим с учётом (4.5) матрицу

$$\left(\begin{array}{c|c||c} B_1^{[0]}(t) + U_1^{[0]}(t)K(t) & O & O \\ * & P_1(t)U_1^{[0]}(t) & O \\ * & A_2^{[0]}(t) & O \\ \hline * & B_1^{[0]}(t) + U_1^{[0]}(t)K(t) & O \\ * & * & A^{[0]}(t) \end{array}\right). \tag{5.11}$$

Обозначим

$$K(t)S_0 = (K_1(t)\ K_2(t)), \quad A_2^{[0]}(t)S_0 = (A_{2,1}(t)\ A_{2,2}(t)).$$

В матрице (5.11) переставим между собой столбцы с помощью матрицы $\operatorname{diag}\{S_0, S_0, S_1\}$. Положив при этом $K_1(t) \equiv O$, придём к матрице

$$\left(\begin{array}{cc|cc||cc} \boxed{\tilde{B}_1} & \tilde{B}_2 + U_1^{[0]}K_2 & O & O & O & O \\ * & * & O & P_1U_1^{[0]}K_2 & O & O \\ * & * & A_{2,1} & A_{2,2} & O & O \\ \hline * & * & \boxed{\tilde{B}_1} & \tilde{B}_2 + U_1^{[0]}K_2 & O & O \\ * & * & * & * & \boxed{\tilde{A}_1} & \tilde{A}_2 \end{array}\right). \tag{5.12}$$

Умножив слева матрицу (5.12) на соответствующую неособенную матрицу, занулим блок $A_{2,1}(t)$. В результате получим матрицу $\tilde{D}_1(t)$, по структуре отличающуюся от (5.12) только тем, что в третьей блочной строке на месте $A_{2,1}(t)$ будет стоять нулевая матрица, а вместо $A_{2,2}(t)$ – матрица $H(t) - A_{2,1}\tilde{B}_1^{-1}U_1^{[0]}K_2$, где

$$H(t) = A_{2,2}(t) - A_{2,1}(t)\tilde{B}_1^{-1}(t)\tilde{B}_2(t).$$

Поскольку при сделанных предположениях в матрице $\operatorname{col}(A_2^{[0]}(t), B_1^{[0]}(t))$ имеется обратимая на $\mathbb{R}$ подматрица, то по построению подматрица с тем же свойством должна присутствовать и в $H(t)$. В силу этого найдётся матрица перестановок столбцов S_2 такая, что

$$H(t)S_2 = \begin{pmatrix} \boxed{H_1(t)} & H_2(t) \end{pmatrix}.$$

Обозначим $K_2(t)S_2 = (K_{2,1}(t) \;\; K_{2,2}(t))$.

Умножив справа матрицу $\tilde{D}_1(t)$ на матрицу перестановок $\operatorname{diag}(E_{2n-\rho}, S_2, E_n)$ и положив $K_{2,1}(t) \equiv O$, $K_{2,2}(t) = (P_1(t)U_1^{[0](t)})^{\mathrm{т}}$, получим матрицу вида

$$\left(\begin{array}{cc|c||cc} \boxed{\tilde{B}_1(t)} & * & O & O & O \\ * & * & F(t) & O & O \\ * & * & * & \boxed{\tilde{A}_1(t)} & \tilde{A}_2(t) \end{array}\right), \tag{5.13}$$

где

$$F(t) = \begin{pmatrix} O & O & \boxed{P_1(t)U_1^{[0]}(t)(P_1(t)U_1^{[0]}(t))^{\mathrm{т}}} \\ O & \boxed{H_1(t)} & * \\ \boxed{\tilde{B}_1(t)} & * & * \end{pmatrix}.$$

Несложно видеть, что матрица (5.13) содержит разрешающий минор, состоящий из столбцов, в которых присутствуют обведённые рамкой блоки. Это означает, что в матрице (5.10) также имеется разрешающий минор.

Для построенной выше матрицы $K(t)$ выполняется тождество

$$\begin{pmatrix} B_1^{[0]}(t) + U_1^{[0]}(t)K(t) \\ P_1(t)U_1^{[0]}(t)K(t) \\ A_2^{[0]}(t) \end{pmatrix} = \tilde{P}(t)F(t)\tilde{S},$$

в котором $\tilde{P}(t)$ – некоторая обратимая на $\mathbb{R}$ матрица, а $\tilde{S}$ – матрица перестановок столбцов. Очевидно, что при этом матрица (5.5) будет обратима на $\mathbb{R}$, а следовательно, будет выполнено и условие (5.4). Теорема доказана.

6. Связь с импульсной управляемостью. В предыдущем пункте получено условие, при котором для ДАУ (0.1) существует управление в виде обратной связи (5.1) такое, что для замкнутой системы (5.2) (или, что то же самое, (5.3)) справедливо соотношение (5.4). Условие (5.7) носит необходимый и достаточный характер, однако оно неконструктивно, поскольку не существует алгоритмов для нахождения матрицы $P_1(t)$. С другой стороны, давно известна связь между возможностью исключения из решения импульсных слагаемых и свойством импульсной управляемости ДАУ. В [10] получено удобное для проверки необходимое и достаточное условие импульсной управляемости для класса нестационарных ДАУ произвольно высокого индекса неразрешённости. Ниже будет показано, что при соответствующих предположениях это условие можно использовать как альтернативу условию (5.7).

Пусть выполнены все предположения теоремы 3. В соответствии с этой теоремой решение системы (0.1) в смысле определения 3 существует и, кроме того, ДАУ (0.1) и (4.9) эквивалентны в смысле совпадения решений.

Для того чтобы ввести определение импульсной управляемости и получить подходящее для его анализа условие, нужно предварительно найти представление для сингулярной составляющей решения системы (0.1), (2.1). Согласно лемме 5 в системе (4.9) $k = r-1$, поэтому импульсные слагаемые решения будем искать в виде (см. (2.3), (2.4))

$$\eta(t) = \sum_{j=1}^{k} \eta_{j-1}\left(\frac{d}{dt}\right)^{j-1}\delta(t-\tau). \tag{6.1}$$

Для удобства запишем систему (4.9) с использованием обозначений (4.16) в виде

$$\begin{pmatrix} O_{n-\hat\rho} \\ A_0(t) \end{pmatrix}\frac{d}{dt}x(t) + \begin{pmatrix} B_1(t) \\ B_2(t) \end{pmatrix}x(t) + \mathcal{P}[U(t)u(t)] = 0, \tag{6.2}$$

где $\hat\rho = \rho - \sum_{j=0}^{k}\rho_i$, а $\mathcal{P}$ – оператор, преобразующий ДАУ (0.1) к виду (4.9) (см. (4.12), (4.13)). В операторе (4.13) по построению будем иметь

$$\mathcal{N}_i = \begin{pmatrix} O^{n-\rho}_{n-\rho+\rho_1+\ldots+\rho_{i-1}} & O^{\rho_1} & \ldots & O^{\rho_{i-2}} & O^{\rho_{i-1}} & O^{\rho_i} & \ldots & O^{\rho_k} & O^{\hat\rho} \\ O_{\rho_i} & O & \ldots & O & P_i(t) & O & \ldots & O & O \\ O_{\rho_{i+1}+\ldots+\rho_k+\hat\rho} & O & \ldots & O & O & O & \ldots & O & O \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1,k}. \tag{6.3}$$

Из представлений (2.1) и (2.2) вытекают равенства

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^{i}u(t) = \{v^{(i)}(t)\} + \sum_{j=0}^{i-1}\Delta_{v^{(j)}}(\tau)\left(\frac{d}{dt}\right)^{i-1-j}\delta(t-\tau), \quad i = 1,2,\ldots \tag{6.4}$$

Воспользовавшись формулами (2.11) и (6.4), получим

$$\begin{gathered} \mathcal{P}[U(t)u(t)] = (E_n\ \Phi_{k,1}\ \Phi_{k,2}\ \ldots\ \Phi_{k,k})\mathcal{U}_k\operatorname{col}(\{v(t)\},\{v'(t)\},\ldots,\{v^{(k)}(t)\}) + \\ + \sum_{j=0}^{k-1}(\Phi_{k,j+1}(t)\ \Phi_{k,j+2}(t)\ \ldots\ \Phi_{k,k}(t))\mathcal{U}_{k-1-j}(\tau)\times \\ \times\operatorname{col}(\Delta_v(\tau),\Delta_{v'}(\tau),\ldots,\Delta_{v^{(k-1-j)}}(\tau))\left(\frac{d}{dt}\right)^{j}\delta(t-\tau), \end{gathered} \tag{6.5}$$

где

$$\mathcal{U}_i(t) = \begin{pmatrix} C_0^0P_0U & O & \ldots & O \\ C_1^0(P_0U)' & C_1^1P_0U & \ldots & O \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_i^0(P_0U)^{(i)} & C_i^1(P_0U)^{(i-1)} & \ldots & C_i^iP_0U \end{pmatrix}, \quad i = 0,1,2,\ldots; \tag{6.6}$$

$$\begin{gathered} \Phi_{1,1}(t) = \mathcal{N}_1(t), \quad \Phi_{i,i}(t) = \mathcal{N}_i(t)\Phi_{i-1,i-1}(t), \\ \Phi_{i,1}(t) = \Phi_{i-1,1}(t) + \mathcal{N}_i(t)(E + \Phi'_{i-1,1}(t)), \quad i = \overline{2,k}; \\ \Phi_{k,j}(t) = \Phi_{k-1,j}(t) + \mathcal{N}_k(t)(\Phi_{k-1,j-1}(t) + \Phi'_{k-1,j}(t)), \quad j = \overline{2,k-1}. \end{gathered} \tag{6.7}$$

Подставив представление (2.3), (6.1) в систему (6.2), (6.5), получим два матричных уравнения: для регулярных и для сингулярных функций. Последнее преобразуем с помощью формулы (2.11), а затем приравняем слагаемые при одинаковых производных от δ-функции, стоящие слева и справа от знака равенства. В результате получим систему алгебраических уравнений относительно скачка регулярной части решения $h_\chi(\tau)$ и коэффициентов сингулярной составляющей решения. Из этой системы единственным образом находятся коэффициенты η_0, η_1, $\ldots$, η_{k-1}:

$$\operatorname{col}(\eta_0,\eta_1,\ldots,\eta_{k-1}) = -\Theta_k^{-1}(\tau)\Phi_k(\tau)\mathcal{U}_k(\tau)\operatorname{col}(\Delta_v(\tau),\Delta_{v'}(\tau),\ldots,\Delta_{v^{(k)}}(\tau)),$$

где

$$\Theta_k(\tau)=\left(\begin{array}{c|c|c|c}\begin{matrix}B_1(\tau)\\ A_0(\tau)\end{matrix} & * & \ldots & * \\ \hline O & \begin{matrix}B_1(\tau)\\ A_0(\tau)\end{matrix} & \ldots & * \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline O & O & \ldots & \begin{matrix}B_1(\tau)\\ A_0(\tau)\end{matrix}\end{array}\right).$$

Очевидно, что матрица $\Theta_k(t)$ в силу условия (4.10) (или, что то же самое, (2.6)) обратима при всех $t\in\mathbb{R}$. В свою очередь

$$\Phi_k(\tau)=\begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}C_{j-1}^{j-1}\bar{\Phi}_{k,j}^{(j-1)} & \sum\limits_{j=2}^{k}(-1)^{j-2}C_{j-2}^{j-2}\bar{\Phi}_{k,j}^{(j-2)} & \ldots & C_0^0\bar{\Phi}_{k,k} \\ \sum\limits_{j=2}^{k}(-1)^{j-2}C_{j-1}^{j-2}\bar{\Phi}_{k,j}^{(j-2)} & \sum\limits_{j=3}^{k}(-1)^{j-3}C_{j-2}^{j-3}\bar{\Phi}_{k,j}^{(j-3)} & \ldots & O \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ \sum\limits_{j=k-1}^{k}(-1)^{j-k+1}C_{j-1}^{j-k+1}\bar{\Phi}_{k,j}^{(j-k+1)} & C_{k-2}^{0}\bar{\Phi}_{k,k} & \ldots & O \\ C_{k-1}^{0}\bar{\Phi}_{k,k} & O & \ldots & O \end{pmatrix}, \qquad (6.8)$$

где матрицы $\bar{\Phi}_{k,j}(t)$ получены из соответствующих матриц $\Phi_{k,j}(t)$ (см. (6.7), (6.3)) вычёркиванием последних $\hat{\rho}$ нулевых строк.

Следуя подходу, изложенному, в частности, в [4, 5, 10], введём определение импульсной управляемости.

Определение 4. Будем говорить, что система (0.1) *импульсно управляема*, если для каждых $\beta\in\mathbb{R}^{kn}$ и $\tau\in\mathbb{R}$ найдётся управление вида (2.1) такое, что для сингулярной составляющей решения справедливо представление (6.1), для коэффициентов которого выполняется равенство

$$\operatorname{col}(\eta_0,\eta_1,\ldots,\eta_{k-1})=-\Theta_k^{-1}(\tau)\Phi_k(\tau)\beta.$$

Лемма 7. *Пусть выполнены условия теоремы 3. Система (0.1) импульсно управляема тогда и только тогда, когда справедливо тождество*

$$\operatorname{rank}\Phi_k(\tau)=\operatorname{rank}\Phi_k(\tau)\mathcal{U}_k(\tau)\quad \text{для всех}\quad \tau\in\mathbb{R}. \qquad (6.9)$$

Доказательство. В работе [10] получено условие импульсной управляемости для ДАУ вида (0.1), которое в данном случае приобретает вид

$$\operatorname{rank}\Theta_k^{-1}(\tau)\Phi_k(\tau)\equiv \operatorname{rank}\Theta_k^{-1}(\tau)\Phi_k(\tau)\mathcal{U}_k(\tau)$$

на $\mathbb{R}$. Отсюда очевидным образом вытекает утверждение леммы.

Теорема 5. *В предположениях теоремы 3 для ДАУ (0.1) обратная связь вида (5.1) такая, что для замкнутой системы (5.2) (или, что то же самое, (5.3)) справедливо условие (5.4), существует тогда и только тогда, когда система (0.1) импульсно управляема.*

Доказательство. Покажем равносильность условий (5.7) и (6.9).

Принимая во внимание формулы (6.8), (6.7) и (6.3), нетрудно показать, что в тождестве (6.9) матрица $\Phi_k(\tau)$ имеет следующую структуру:

$$\Phi_k(\tau)=\begin{pmatrix} E & O & O & \ldots & O & O \\ * & E & O & \ldots & O & O \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ * & * & * & \ldots & E & O \\ * & * & * & \ldots & * & E \end{pmatrix}\Psi(\tau),$$

где

$$\Psi(\tau) =$$

$$= \left(\begin{array}{cccc|ccc|c|cc|c} \boxed{P_1} & O & \ldots & O & O & \ldots & O & \ldots & O & O & O \\ * & P_2 & \ldots & O & \boxed{P_2P_1} & \ldots & O & \ldots & O & O & O \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots \\ * & * & \ldots & O & * & \ldots & O & \ldots & \boxed{\prod_{i=1}^{k-1} P_i} & O & O \\ * & * & \ldots & P_k & * & \ldots & P_kP_{k-1} & \ldots & * & \prod_{j=2}^{k} P_i & \boxed{\prod_{j=1}^{k} P_i} \end{array}\right), \tag{6.10}$$

$\prod_{i=1}^{m} P_i(\tau) = P_m(\tau)P_{m-1}(\tau)\cdots P_1(\tau)$. Очевидно, что $\operatorname{rank}\Phi_k(\tau) = \operatorname{rank}\Psi(\tau)$.

По построению (см. п. 5) матрицы $P_i(t)$ $(i=\overline{1,k})$ обладают полным рангом ρ_i по строкам для всех $t\in\mathbb{R}$. Согласно утверждению 1 в матрице (6.10) блоки, обведённые рамками, также будут иметь полный ранг по строкам, т.е. $\operatorname{rank}P_i(t)P_{i-1}(t)\cdots P_1(t)\equiv\rho_i$ на $\mathbb{R}$. Поэтому всюду на $\mathbb{R}$ ранг матрицы $\Psi(t)$ равен сумме рангов матриц, обведённых рамками. Следовательно,

$$\operatorname{rank}\Phi_k(\tau) = \sum_{i=1}^{k}\rho_i \quad \text{для всех} \quad \tau\in\mathbb{R}. \tag{6.11}$$

В свою очередь с учётом формул (6.6) и (4.11) получаем

$$\operatorname{rank}\Phi_k(\tau)\mathcal{U}_k(\tau) = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} P_1U_1^{[0]} & O & O & \ldots & O & O \\ * & P_2P_1U_1^{[0]} & O & \ldots & O & O \\ * & * & \left(\prod\limits_{i=1}^{3}P_i\right)U_1^{[0]} & \ldots & O & O \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ * & * & * & \ldots & * & \left(\prod\limits_{i=1}^{k}P_i\right)U_1^{[0]} \end{pmatrix}. \tag{6.12}$$

Допустим, что условие (5.7) выполнено. По построению матрица $P_1(t)$ состоит из ρ_1 строк, следовательно, матрица $P_1(\tau)U_1^{[0]}(\tau)$ обладает полным строчным рангом. В соответствии с утверждением 1 имеем

$$\operatorname{rank}P_i(\tau)P_{i-1}(\tau)\cdots P_1(\tau)U_1^{[0]}(\tau) = \rho_i \quad \text{для любого} \quad \tau\in\mathbb{R} \quad (i=\overline{1,k}).$$

Из представления (6.12) вытекает тождество

$$\operatorname{rank}\Phi_k(\tau)\mathcal{U}_k(\tau) = \sum_{i=1}^{k}\rho_i \quad \text{для любого} \quad \tau\in\mathbb{R}. \tag{6.13}$$

Таким образом, справедливо условие (6.9).

Обратно, пусть имеет место свойство (6.9), тогда из (6.11) вытекает тождество (6.13). Последнее в свою очередь гарантирует, что матрица $\Phi_k(\tau)\mathcal{U}_k(\tau)$ будет иметь всюду на $\mathbb{R}$ полный ранг по строкам. А значит, тем же свойством обладает и её блок $P_1(\tau)U_1^{[0]}(\tau)$ (см. (6.12)), т.е. условие (5.7) выполняется. Теорема доказана.

Прямым следствием теорем 4 и 5 является следующий результат.

Следствие. *Пусть*

1) выполнены все условия теоремы 3;

2) система (0.1) импульсно управляема.

Тогда для ДАУ (0.1) найдётся обратная связь (5.1) такая, что решение замкнутой системы (5.2) существует и представимо в виде (2.8).

Заключение. В статье для нестационарных ДАУ (0.1) произвольно высокого индекса неразрешённости изучалась возможность построения управления в виде обратной связи (5.1) такого, что общее решение замкнутой системы (5.2) (или, что то же самое, (5.3)) не содержало бы сингулярных обобщённых функций. В частности, получено необходимое и достаточное условие (5.7), гарантирующее существование управления вида (5.1), обеспечивающего выполнение для ДАУ (5.3) соотношения (5.4). Доказано (теорема 4), что предположение (5.7) в совокупности с условиями теоремы о существовании решения ДАУ (0.1) (теорема 3) обеспечивают отсутствие в решении системы (5.2) слагаемых, содержащих дельта-функцию и её производные.

К сожалению, в общем случае условие (5.7) сложно проверить, поскольку не существует алгоритмов построения матрицы $P_1(t)$. Такая ситуация характерна для всех работ в этой области.

С другой стороны, для системы (0.1) имеются конструктивные условия импульсной управляемости [10]. В настоящей работе показано, что предположение (5.7) равносильно условию импульсной управляемости ДАУ (0.1) (теорема 5).

Следует отметить, что важную роль в представленном анализе сыграло предположение о постоянстве ранга матрицы $A(t)$. Это предположение обеспечивало возможность построения алгоритма преобразования системы (0.1) к виду (2.5), (2.6), изложенного в п. 4.

Дальнейшие перспективы исследования данной проблемы связаны с изучением систем вида (0.1) с матрицей при производной переменного ранга. Предложенный в данной работе подход не может быть использован для анализа таких систем. В общем случае невозможно с помощью управления вида (5.1) исключить импульсные слагаемые из решения ДАУ в случае, когда матрица $A(t)$ имеет переменный ранг.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Cobb D.* On the solution of linear differential equations with singular coefficients // J. Differ. Equat. 1982. V. 46. P. 310–323.
2. *Verghese G.C., Levy B., Kailath T.* A generalized state-space for singular systems // IEEE Trans. Autom. Contr. 1981. V. AC-26. № 4. P. 811–831.
3. *Бояринцев Ю.Е., Чистяков В.Ф.* Алгебро-дифференциальные системы: методы решения и исследования. Новосибирск, 1998.
4. *Cobb D.* Controllability, observability, and duality in singular systems // IEEE Trans. on Autom. Contr. 1984. V. AC-29. № 12. P. 1076–1082.
5. *Dai L.* Singular control system. Lecture notes in control and information sciences. V. 118. Berlin; Heidelberg; New York, 1989.
6. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М., 1988.
7. *Cobb D.* State feedback impulse elimination for singular systems over a Hermite domain // SIAM J. Contr. Optim. 2006. V. 44. № 6. P. 2189–2209.
8. *Wang C.-J.* State feedback impulse elimination of linear time-varying singular systems // Automatica. 1996. V. 32. № 1. P. 133–136.
9. *Campbell S.L., Petzold L.R.* Canonical forms and solvable singular systems of differential equations // SIAM J. Alg. Disc. Meth. 1983. № 4. P. 517–512.
10. *Щеглова А.А.* Управляемость дифференциально-алгебраических уравнений в классе импульсных воздействий // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59. № 1. С. 210–224.
11. *Щеглова А.А.* Существование решения начальной задачи для вырожденной линейной гибридной системы с переменными коэффициентами // Изв. вузов. Математика. 2010. № 9. С. 57–70.
12. *Чистяков В.Ф., Щеглова А.А.* Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем. Новосибирск, 2003.

Институт динамики систем и теории управления
СО РАН им. В.М. Матросова, г. Иркутск

Поступила в редакцию 20.03.2020 г.
После доработки 26.10.2020 г.
Принята к публикации 13.10.2020 г.