ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 1, с. 61–75

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.32+517.983.23

О РАЗРЕШИМОСТИ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕОГРАНИЧЕННЫМИ ОПЕРАТОРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

© 2021 г. А. В. Глушак

В банаховом пространстве рассмотрены начальные задачи для ряда гиперболических уравнений со степенным характером вырождения и операторными коэффициентами. Установлены достаточные условия их однозначной разрешимости, налагаемые на коэффициенты уравнения, порядок вырождения и начальные элементы.

DOI: 10.31857/S0374064121010064

Введение. Дифференциальные уравнения с обращающимся в нуль коэффициентом при старшей производной не вписываются в рамки стандартной теории дифференциальных уравнений и давно привлекали внимание широкого круга исследователей (см. монографии [1–3] и имеющуюся в них библиографию). Отдельные виды таких уравнений подробно изучены, однако для уравнений второго порядка, вырождающихся в уравнения первого порядка, некоторые вопросы в случае операторных коэффициентов (абстрактные уравнения), в частности, получение явных формул для решений, требуют дальнейшего исследования.

В настоящей работе рассматриваются уравнения в банаховом пространстве в гиперболическом случае. Ранее задача Коши с оператором $A = A_0^2,$ где A_0 – генератор C_0-группы, для дифференциального уравнения вида $u''(t) - t^\alpha Au(t) = 0,$ $\alpha > 0,$ изучалась в [4], случай гильбертова пространства рассмотрен в [5]. Задача Коши с генератором операторной косинус-функции для слабо вырождающегося дифференциального уравнения вида $t^\gamma u''(t) - Au(t) = f(t),$ $0 < \gamma < 2,$ рассматривалась в [6] (по поводу терминов см., например, монографию [7]). И в том, и в другом случаях указанных вырождающихся уравнений исследование проводилось с помощью сведения их к уравнению Эйлера–Пуассона–Дарбу.

Мы рассмотрим более общий, чем в [4–6], вид как дифференциального уравнения, так и операторного коэффициента, имеющего, кроме того, и переменную составляющую. Исследования также будут проводиться путём сведения к уравнению Эйлера–Пуассона–Дарбу, при этом потребуется использование операторной функции Бесселя, введённой в рассмотрение автором [8] и изученной в работах [8, 9].

Опишем класс операторов $A,$ с которым в дальнейшем будут рассматриваться различные уравнения. В работах [8, 9] при $k > 0$ в гиперболическом случае исследована корректная разрешимость для уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу (ЭПД) с операторным коэффициентом A следующей задачи Коши:

$$v''(t) + \frac{k}{t}v'(t) = Av(t), \quad t > 0, \tag{1}$$

$$v(0) = u_0, \quad v'(0) = 0. \tag{2}$$

В работе [8] необходимое и достаточное условие разрешимости сформулировано в терминах оценки нормы резольвенты $(\lambda I - A)^{-1}$ и её весовых производных, а в статье [9] получен критерий равномерной корректности этой задачи, который, в отличие от [8], формулируется в терминах дробной степени резольвенты и её невесовых производных.

Класс операторов $A,$ для которых задача Коши (1), (2) равномерно корректна, обозначим через $G_k,$ а соответствующий разрешающий оператор (назовём его *операторной функцией*

Бесселя (ОФБ)) – через $Y_k(t)$, т.е. $v(t) = Y_k(t)u_0$, при этом через G_0 $(G_0 \subset G_k$ при $k > 0)$ обозначим множество генераторов операторной косинус-функции $C(t)$ и $Y_0(t) = C(t)$. Класс G_k будем называть *классом корректной разрешимости*, а число k – его *индексом*. Примеры операторов $A \in G_k$ и порождаемых ими ОФБ $Y_k(t)$ приведены в [9]. В частности, если $A \in G_0 \subset G_k$ и $k > 0$, то

$$Y_k(t) = \frac{2\Gamma(k/2+1/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma(k/2)} \int\limits_0^1 (1-s^2)^{k/2-1} C(ts)\, ds, \tag{3}$$

где $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция Эйлера.

1. Слабо вырождающееся дифференциальное уравнение со степенным характером вырождения. При $t \geqslant 0$ в банаховом пространстве E рассмотрим слабо вырождающееся дифференциальное уравнение с операторными коэффициентами, имеющее вид

$$t^\gamma u''(t) + bt^{\gamma-1}u'(t) = (A + t^\beta B)u(t), \tag{4}$$

где $0 < \gamma < 2$, $b \in \mathbb{R}$, $\beta \geqslant 0$, A – неограниченный замкнутый оператор, $B \in \mathrm{L}(E)$ – ограниченный оператор. Принадлежность параметра γ интервалу $(0,2)$ означает *слабое вырождение*, в отличие от случая *сильного вырождения* – когда $\gamma \geqslant 2$, который также будет рассмотрен в работе.

Под *решением* уравнения (4) будем понимать дважды непрерывно дифференцируемую на $(0,+\infty)$ функцию $u(t)$, принадлежащую области определения $D(A)$ оператора A и удовлетворяющую этому уравнению при всех $t > 0$. Аналогично определяются решения и для остальных рассматриваемых в работе уравнений.

В скалярном случае при $\gamma = 1$, $A = \lambda > 0$, $B = 0$ неоднородное уравнение (4) методами теории полугрупп исследовалось в работе [10] при изучении стохастических процессов, которые являются пределом последовательности случайных блужданий.

Замена независимой переменной $t = (\tau/\nu)^\nu$, $\nu = 2/(2-\gamma)$, и неизвестной функции $u(t) = u((\tau/\nu)^\nu) = w(\tau)$ с учётом очевидных равенств

$$u'(t) = \left(\frac{\tau}{\nu}\right)^{1-\nu} w'(\tau), \quad u''(t) = \left(\frac{\tau}{\nu}\right)^{2(1-\nu)} \left(w''(\tau) + \frac{1-\nu}{\tau} w'(\tau)\right) \tag{5}$$

приводит слабо вырождающееся уравнение (4) к уравнению ЭПД вида

$$w''(\tau) + \frac{b\nu - \nu + 1}{\tau} w'(\tau) = \left(A + \left(\frac{\tau}{\nu}\right)^{\nu\beta} B\right) w(\tau), \quad \tau > 0. \tag{6}$$

Корректная постановка начальных условий для уравнения ЭПД (6) зависит от знака параметра $b\nu - \nu + 1$. Если $b\nu - \nu + 1 \geqslant 0$, то начальные условия так же, как и для уравнения (1), имеют вид

$$w(0) = u_0, \quad w'(0) = 0. \tag{7}$$

Если $b\nu - \nu + 1 < 0$, то (см. [11]) следует задавать весовое начальное условие

$$w(0) = 0, \quad \lim_{\tau \to 0+} \tau^{b\nu-\nu+1} w'(\tau) = u_1. \tag{8}$$

Возможна и более общая постановка начальных условий (см. [12]), но для неё требуется дополнительная гладкость начальных элементов, и здесь мы её рассматривать не будем.

Разрешимость начальной задачи для уравнения (6), естественно, зависит и от оператора $A + (\tau/\nu)^{\nu\beta}B$. Будем предполагать, что оператор A принадлежит более широкому, чем в указанной во введении работе [6], классу функций G_k при некотором $k > 0$ $(G_k \supset G_0)$.

Если $A \in G_k$, $k > 0$, то вопрос о принадлежности возмущённого оператора $A+B$ классу G_k, если B – ограниченный оператор, исследован в работе [13], а вопрос о его принадлежности некоторому классу корректности, если $B \in G_m$, $m \geqslant 0$, – неограниченный оператор, в работе [14]. Указанные результаты о возмущении значительно расширяют класс операторов, порождающих ОФБ. В настоящей работе рассматривается возмущение оператора $A \in G_k$, $k > 0$, переменным оператором вида $B(\tau) = (\tau/\nu)^{\nu\beta}B$.

Теорема 1. *Пусть $k > 0$, $A \in G_k$, $B(t) = (t/\nu)^{\nu\beta}B$, $\nu\beta \geqslant 0$, а $Q(t,s)$ – непрерывный при $t \geqslant s > 0$ оператор, удовлетворяющий операторному дифференциальному уравнению*

$$\frac{\partial^2 Q(t,s)}{\partial t^2} - \frac{k^2-2k}{4t^2}Q(t,s) - B(t)Q(t,s) = \frac{\partial^2 Q(t,s)}{\partial s^2} - \frac{k^2-2k}{4s^2}Q(t,s) \tag{9}$$

и граничным условиям

$$\frac{dQ(t,t)}{dt} = \frac{1}{2}B(t), \quad \lim_{s\to 0+} s^{k/2-1}Q(t,s) = 0. \tag{10}$$

Тогда функция

$$v(t) = Y_k(t)u_0 + t^{-k/2}\int\limits_0^t s^{k/2}Q(t,s)Y_k(s)u_0\,ds \tag{11}$$

является единственным решением уравнения

$$v''(t) + \frac{k}{t}v'(t) = (A+B(t))v(t), \tag{12}$$

удовлетворяющим условиям (2).

Доказательство. Для первого слагаемого в представлении (11) по определению ОФБ $Y_k(t)$ справедливо равенство

$$Y_k''(t)u_0 + \frac{k}{t}Y_k'(t)u_0 = AY_k(t)u_0, \tag{13}$$

здесь и в дальнейшем будем использовать обозначение

$$Y_k'(t)u_0 = (Y_k(t)u_0)'.$$

Обозначим второе слагаемое в представлении (11) через $\varphi(t)$, т.е.

$$\varphi(t) = t^{-k/2}\int\limits_0^t s^{k/2}Q(t,s)Y_k(s)u_0\,ds. \tag{14}$$

Дважды дифференцируя тождество (14), получаем

$$\varphi'(t) = t^{-k/2}\int\limits_0^t s^{k/2}\left(\frac{\partial Q(t,s)}{\partial t} - \frac{k}{2t}Q(t,s)\right)Y_k(s)u_0\,ds + Q(t,t)Y_k(t)u_0,$$

$$\varphi''(t) = t^{-k/2}\int\limits_0^t s^{k/2}\left(\frac{\partial^2 Q(t,s)}{\partial t^2} - \frac{k}{t}\frac{\partial Q(t,s)}{\partial t} + \frac{2k+k^2}{4t^2}Q(t,s)\right)Y_k(s)u_0\,ds +$$
$$+\left(\left.\frac{\partial Q(t,s)}{\partial t}\right|_{s=t} + \frac{dQ(t,t)}{dt} - \frac{k}{2t}Q(t,t)\right)Y_k(t)u_0 + Q(t,t)Y_k'(t)u_0$$

и, следовательно,

$$\varphi''(t)+\frac{k}{t}\varphi'(t)=t^{-k/2}\int\limits_0^t s^{k/2}\Big(\frac{\partial^2 Q(t,s)}{\partial t^2}-\frac{k^2-2k}{4t^2}Q(t,s)\Big)Y_k(s)u_0\,ds+$$

$$+\left(\frac{\partial Q(t,s)}{\partial t}\bigg|_{s=t}+\frac{dQ(t,t)}{dt}+\frac{k}{2t}Q(t,t)\right)Y_k(t)u_0+Q(t,t)Y_k'(t)u_0. \tag{15}$$

Обозначим интеграл в равенстве (15) через $\psi(t)$ и упростим его, используя уравнение (9) и граничное условие (10). После двукратного интегрирования по частям будем иметь

$$\psi(t)=\int\limits_0^t s^{k/2}\Big(\frac{\partial^2 Q(t,s)}{\partial t^2}-\frac{k^2-2k}{4t^2}Q(t,s)\Big)Y_k(s)u_0\,ds=$$

$$=\int\limits_0^t s^{k/2}\frac{\partial^2 Q(t,s)}{\partial s^2}Y_k(s)u_0\,ds+\int\limits_0^t s^{k/2}\Big(B(t)-\frac{k^2-2k}{4s^2}I\Big)Q(t,s)Y_k(s)u_0\,ds=$$

$$=t^{k/2}\frac{\partial Q(t,s)}{\partial s}\bigg|_{s=t}Y_k(t)u_0-\int\limits_0^t\frac{\partial Q(t,s)}{\partial s}\Big(\frac{k}{2}s^{k/2-1}Y_k(s)+s^{k/2}Y_k'(s)\Big)u_0\,ds+$$

$$+\int\limits_0^t s^{k/2}\Big(B(t)-\frac{k^2-2k}{4s^2}I\Big)Q(t,s)Y_k(s)u_0\,ds=$$

$$=t^{k/2}\frac{\partial Q(t,s)}{\partial s}\bigg|_{s=t}Y_k(t)u_0-\frac{kt^{k/2-1}}{2}Q(t,t)Y_k(t)u_0-t^{k/2}Q(t,t)Y_k'(t)u_0+$$

$$+\int\limits_0^t s^{k/2}Q(t,s)\Big(Y_k''(s)+\frac{k}{s}Y_k'(s)\Big)u_0\,ds+\int\limits_0^t s^{k/2}B(t)Q(t,s)Y_k(s)u_0\,ds. \tag{16}$$

Заменив интеграл в (15) его представлением (16), в силу граничного условия (10) приходим к равенству

$$\varphi''(t)+\frac{k}{t}\varphi'(t)=t^{-k/2}(A+B(t))\int\limits_0^t s^{k/2}Q(t,s)Y_k(s)u_0\,ds+$$

$$+\left(\frac{\partial Q(t,s)}{\partial s}\bigg|_{s=t}+\frac{\partial Q(t,s)}{\partial t}\bigg|_{s=t}+\frac{dQ(t,t)}{dt}\right)Y_k(t)u_0=$$

$$=(A+B(t))\varphi(t)+2\frac{dQ(t,t)}{dt}Y_k(t)u_0=(A+B(t))\varphi(t)+B(t)Y_k(t)u_0. \tag{17}$$

Вследствие соотношений (13)–(17) окончательно получаем

$$v''(t)+\frac{k}{t}v'(t)=AY_k(t)u_0+(A+B(t))\varphi(t)+B(t)Y_k(t)u_0=(A+B(t))v(t).$$

Таким образом, определяемая равенством (11) функция $v(t)$, которую в дальнейшем удобно обозначить

$$v(t)=\tilde{Y}_k(t)u_0\equiv Y_k(t)u_0+t^{-k/2}\int\limits_0^t s^{k/2}Q(t,s)Y_k(s)u_0\,ds, \tag{18}$$

является решением уравнения (12).

Записывая функцию $v(t)$ в виде

$$v(t) = Y_k(t)u_0 + t\int\limits_0^1 \xi^{k/2}Q(t,t\xi)Y_k(t\xi)u_0\,d\xi$$

и учитывая свойства ОФБ $Y_k(0) = I$, $Y_k'(0) = 0$, а также вытекающее из уравнения (9) равенство

$$\lim_{t\to 0+} Q(t,t\xi) = 0,$$

несложно убедиться в том, что функция $v(t)$ удовлетворяет условиям (2).

Доказательство единственности решения задачи (9), (10) проведём методом от противного. Пусть $v_1(t)$ и $v_2(t)$ – два решения задачи (9), (10). Рассмотрим функцию двух переменных

$$V(t,s) = f(\tilde{Y}_k(s)(v_1(t) - v_2(t))),$$

где $f \in E^*$ (E^* – сопряжённое с E пространство), $t, s \geqslant 0$. Она, очевидно, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{k}{t}\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} + \frac{k}{s}\frac{\partial V}{\partial s}, \quad t, s > 0,$$

и начальным условиям

$$V(0,s) = \frac{\partial V(0,s)}{\partial t} = 0.$$

Эта задача для уравнения в частных производных заменой

$$t_1 = (t+s)^2/4, \quad s_1 = (t-s)^2/4$$

сводится (см. [15, § 5, п. 3]) к задаче, единственность решения которой в классе дважды непрерывно дифференцируемых при $t, s \geqslant 0$ функций установлена в [15, § 5, п. 2]). Кроме того, утверждение о единственности содержится также в теореме 6.1 работы [16], в которой рассматривается даже более общее уравнение.

Из полученной в работе [15] явной формулы для решения указанной задачи следует тождество $V(t,s) \equiv 0$. В силу произвольности $f \in E^*$, полагая $s = 0$, получаем $v_1(t) \equiv v_2(t)$, и единственность решения установлена. Теорема доказана.

Как доказано в теореме 1, разрешимость начальной задачи для уравнения (12) зависит от разрешимости граничной задачи (9), (10) для операторного дифференциального уравнения, которая фактически установлена в работе [17].

Теорема 2. *Операторное дифференциальное уравнение (9) с граничными условиями (10) имеет решение, которое может быть получено методом последовательных приближений.*

Если $B \in \mathbb{R}$, то разрешимость граничной задачи для скалярного уравнения (9) установлена в [17]. Нетрудно убедиться, что замена коэффициента $B \in \mathbb{R}$ непрерывным операторным коэффициентом $B(t) = (t/\nu)^{\nu\beta}B$ не препятствует повторению рассуждений §§ 2, 3 работы [17]. Отметим также, что случай $k = 0$ рассмотрен в работе [18].

Укажем ещё, что если $\beta = 0$, $k = 2n$, $n \in \mathbb{N}$, то, как следует из теоремы 3 [13], в этом частном случае функцию $Q(t,s)$ можно записать в явном виде:

$$Q(t,s) = \frac{s^n B}{2^{n+1}n!t^{n-1}}\left(\frac{1}{s}\frac{d}{ds}\right)^n\left((s^2-t^2)^n_1F_2\left(1; n+1, 2; \frac{t^2-s^2}{4}B\right)\right),$$

где ${}_1F_2(\cdot)$ – обобщённая гипергеометрическая функция.

Установив результаты о разрешимости начальной задачи для возмущённого уравнения ЭПД (12), сформулируем теперь результаты о разрешимости начальных задач для слабо вырождающегося уравнения (4).

Пусть $b\nu - \nu + 1 \geqslant 0$, $\nu = 2/(2-\gamma)$ или, что то же самое, $2b \geqslant \gamma$. Возвращаясь к исходной переменной t и неизвестной функции $u(t)$, получаем, что уравнение (6) перейдёт в уравнение (4), а начальные условия (7) в силу равенств (5) – в условия

$$u(0) = u_0, \quad \lim_{t\to 0+} t^{1-1/\nu} u'(t) = 0. \tag{19}$$

Из теорем 1, 2 вытекает утверждение о разрешимости начальной задачи (4), (19).

Теорема 3. *Пусть* $0 < \gamma < 2$, $2b \geqslant \gamma$, $\beta \geqslant 0$, $A \in G_{(2b-\gamma)/(2-\gamma)}$, $B \in \mathrm{L}(E)$, $u_0 \in D(A)$. *Тогда функция* $u(t) = \tilde{Y}_{(2b-\gamma)/(2-\gamma)}(\nu t^{1/\nu})u_0$, *где* $\nu = 2/(2-\gamma)$, *а функция* $\tilde{Y}_{(2b-\gamma)/(2-\gamma)}(\cdot)$ *определена равенством (18), является единственным решением уравнения (4), удовлетворяющим начальным условиям (19).*

Пусть теперь $b\nu - \nu + 1 < 0$ или $2b < \gamma$. В этом случае для уравнения (6) следует задавать начальные условия (8), которые для исходной функции $u(t)$ принимают вид

$$u(0) = 0, \quad \nu^{b\nu-\nu+1} \lim_{t\to 0+} t^b u'(t) = u_1. \tag{20}$$

Учитывая результаты работы [11] о разрешимости весовой задачи Коши для уравнения ЭПД, приходим к утверждению.

Теорема 4. *Пусть* $0 < \gamma < 2$, $2b < \gamma$, $\beta \geqslant 0$, $A \in G_{(4-b-\gamma)/(2-\gamma)}$, $B \in \mathrm{L}(E)$, $u_1 \in D(A)$. *Тогда функция*

$$u(t) = \frac{\nu^{\nu-b\nu-1}t^{1-b}}{1-b}\tilde{Y}_{(4-b-\gamma)/(2-\gamma)}(\nu t^{1/\nu})u_1,$$

где $\nu = 2/(2-\gamma)$, *а функция* $\tilde{Y}_{(4-b-\gamma)/(2-\gamma)}(\cdot)$ *определена равенством (18), является единственным решением уравнения (4), удовлетворяющим начальным условиям (20).*

В частности, при $b = 0$, $B = 0$ и операторе $A \in G_{\nu+1}$ из более широкого, чем в [6], множества $G_{\nu+1} \supset G_0$ решение задачи (4), (20) имеет вид

$$u(t) = \nu^{\nu-1} t Y_{\nu+1}(\nu t^{1/\nu})u_1.$$

Утверждения теорем 3 и 4, очевидно, справедливы и при $\gamma = 0$, поскольку в этом случае уравнение (4) уже является уравнением ЭПД. В этих теоремах не только указана постановка начальных условий и доказана однозначная разрешимость соответствующих начальных задач для уравнения (4), но и установлена связь между порядком вырождения γ, коэффициентом b при первой производной $u'(t)$ и множеством операторов A, образующим класс корректной разрешимости.

Элементарный анализ утверждений теоремы 3 приводит к следующим выводам. Если $0 \leqslant \gamma \leqslant 2b$ и $0 \leqslant b < 1$, то индекс класса корректной разрешимости при фиксированном b убывает по переменной γ от значения b до значения 0, при этом сам класс корректной разрешимости сужается с G_b до G_0. Если $0 \leqslant \gamma < 2$ и $b = 1$, то класс корректной разрешимости один и тот же при всех γ и совпадает с G_1. Если $0 \leqslant \gamma < 2$ и $b > 1$, то индекс класса корректной разрешимости возрастает по переменной γ от значения b до $+\infty$. При выполнении условия $2b = \gamma$, $0 \leqslant \gamma < 2$, класс корректной разрешимости один и тот же при всех γ и совпадает с G_0.

При фиксированном значении γ, $0 \leqslant \gamma < 2$, индекс класса корректной разрешимости возрастает по переменной b от значения $\gamma/2$ до $+\infty$.

Если выполнено условие $2b = \gamma$, $0 \leqslant \gamma < 2$, $B = 0$, то класс корректной разрешимости один и тот же при всех γ и совпадает с G_0. Предельный случай $b = \gamma = 0$ соответствует абстрактному волновому уравнению

$$u''(t) = Au(t), \quad t \geqslant 0, \quad A \in G_0,$$

которое не является вырождающимся. Как известно, единственным решением этого уравнения, удовлетворяющим начальным условиям

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1, \quad u_0, u_1 \in D(A),$$

является функция $u(t)=C(t)u_0+S(t)u_1$, где $C(t)$ – операторная косинус-функция и

$$S(t)=\int\limits_0^t C(\tau)\,d\tau$$

– операторная синус-функция.

В другом предельном случае $\gamma=2$, $b=1$, который при используемой в п. 1 замене не сводится к уравнению ЭПД и который не исследован в п. 1, получается вырождающееся абстрактное уравнение Эйлера

$$t^2u''(t)+tu'(t)=Au(t),\quad t>0,$$

которое при $A\in G_0$ имеет единственное решение

$$u(t)=C(\ln t)u_0+S(\ln t)u_1,$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u(1)=u_0,\quad u'(1)=u_1,\quad u_0,u_1\in D(A).$$

В монографии [19] ограниченное в точке вырождения решение неоднородного абстрактного уравнения Эйлера с операторными коэффициентами находится методом малых стабилизирующих возмущений.

Аналогичный анализ можно провести, используя теорему 4.

2. Абстрактное уравнение Шарпа. Рассмотрим далее частный случай уравнения (4) при $b=\gamma=\beta=1$, $B=-I$. Уравнение

$$tu''(t)+u'(t)-tu(t)=A_0u(t) \tag{21}$$

называется *уравнением Шарпа* (см. [20, с. 118]), и для него при $A_0\in G_1$ справедлива теорема 3. Покажем, что для некоторого его решения можно указать явную формулу и в случае, если $A_0\notin G_1$. Естественно, задача (4), (19) с таким оператором не будет корректной, поскольку принадлежность $A_0\in G_1$ является необходимым и достаточным условием корректности.

Пусть оператор A_0 порождает равномерно ограниченную группу $T(t;A_0)$, тогда $A_0^2\in\in G_0$ и $C(t;A_0^2)=1/2(T(t;A_0)+T(-t;A_0))$ – порождаемая им равномерно ограниченная операторная косинус-функция.

При $u_2\in D(A_0^2)$ введём в рассмотрение функцию

$$u(t)=\int\limits_0^{\pi/2}\operatorname{ch}(t\cos\varphi)C\Big(\ln\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2};A_0^2\Big)u_2\,d\varphi+\int\limits_0^{\pi/2}\operatorname{sh}(t\cos\varphi)A_0S\Big(\ln\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2};A_0^2\Big)u_2\,d\varphi, \tag{22}$$

где $S(t;A_0^2)$ – операторная синус-функция.

В силу равномерной ограниченности операторной косинус-функции $C(t;A_0^2)$ сходимость первого интеграла в (22) очевидна, а сходимость второго интеграла вытекает из конечности интеграла 2.6.34.3 из [21]

$$\int\limits_0^{\pi/2}\ln\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi.$$

Покажем, что определяемая равенством (22) функция $u(t)$ является ограниченным в нуле решением уравнения (21), и с этой целью вычислим её производные. После интегрирования по частям с учётом равномерной ограниченности операторной косинус-функции будем иметь

$$u'(t)=\int\limits_0^{\pi/2}\operatorname{sh}(t\cos\varphi)\cos\varphi C\Big(\ln\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2};A_0^2\Big)u_2\,d\varphi+\int\limits_0^{\pi/2}\operatorname{ch}(t\cos\varphi)\cos\varphi A_0S\Big(\ln\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2};A_0^2\Big)u_2\,d\varphi=$$

$$= t\int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{ch}(t\cos\varphi)\sin^2\varphi C\Bigl(\ln\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}; A_0^2\Bigr)u_2\,d\varphi + \int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{sh}(t\cos\varphi)C'\Bigl(\ln\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}; A_0^2\Bigr)u_2\,d\varphi +$$

$$+ t\int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{sh}(t\cos\varphi)\sin^2\varphi A_0 S\Bigl(\ln\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}; A_0^2\Bigr)u_2\,d\varphi + \int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{ch}(t\cos\varphi)A_0 C\Bigl(\ln\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}; A_0^2\Bigr)u_2\,d\varphi,$$

$$u''(t) = \int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{ch}(t\cos\varphi)\cos^2\varphi C\Bigl(\ln\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}; A_0^2\Bigr)u_2\,d\varphi + \int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{sh}(t\cos\varphi)\cos^2\varphi A_0 S\Bigl(\ln\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}; A_0^2\Bigr)u_2\,d\varphi,$$

$$tu''(t) + u'(t) = tu(t) + \int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{sh}(t\cos\varphi)A_0^2 S\Bigl(\ln\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}; A_0^2\Bigr)u_2\,d\varphi +$$

$$+ \int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{ch}(t\cos\varphi)A_0 C\Bigl(\ln\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}; A_0^2\Bigr)u_2\,d\varphi = tu(t) + A_0 u(t).$$

Таким образом, определяемая равенством (22) ограниченная функция $u(t)$ удовлетворяет уравнению (21), а при $t = 0$ условию

$$u(0) = \int\limits_0^{\pi/2} C\Bigl(\ln\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}; A_0^2\Bigr)u_2\,d\varphi.$$

Если поставить задачу о нахождении ограниченного решения уравнения (21), удовлетворяющего начальному условию

$$u(0) = u_0, \tag{23}$$

то относительно элемента $u_2 \in D(A_0^2)$ возникает операторное уравнение первого рода

$$\int\limits_0^{\pi/2} C\Bigl(\ln\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}; A_0^2\Bigr)u_2\,d\varphi = u_0, \tag{24}$$

для решения которого необходимо наложить дополнительные условия гладкости на начальный элемент u_0.

Учитывая представление операторной косинус-функции $C(t; A_0^2)$ через резольвенту

$$C(t; A_0^2)u_2 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\lambda t}\lambda R(\lambda^2; A_0^2)u_2\,d\lambda, \quad \sigma > 0, \quad u_2 \in E,$$

левую часть операторного уравнения (24) запишем в виде

$$\int\limits_0^{\pi/2} C\Bigl(\ln\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}; A_0^2\Bigr)u_2\,d\varphi = 2\int\limits_0^{\infty} \frac{e^t}{1+e^{2t}}C(t; A_0^2)u_2\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\int\limits_0^{\infty} \frac{e^{t(\lambda+1)}\,dt}{1+e^{2t}}\lambda R(\lambda^2; A_0^2)u_2\,d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \beta\Bigl(\frac{1-\lambda}{2}\Bigr)\lambda R(\lambda^2; A_0^2)u_2\,d\lambda \tag{25}$$

(при этом мы использовали интеграл 2.3.12.6 из [21]), где

$$\beta(z) = \frac{1}{2}\biggl(\psi\biggl(\frac{z+1}{2}\biggr) - \psi\biggl(\frac{z}{2}\biggr)\biggr),$$

$\psi(\cdot)$ – пси-функция (см., например, [21, с. 775; 22, с. 536]).

Используя представление (25), операторное уравнение (24) относительно $u_2 \in D(A_0^2)$ запишем в виде

$$Pu_2 \equiv \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \beta\biggl(\frac{1-\lambda}{2}\biggr)\lambda R(\lambda^2; A_0^2)u_2\,d\lambda = u_0. \tag{26}$$

Таким образом, вопрос о разрешимости операторного уравнения (24) сводится к вопросу о существовании у заданного левой частью уравнения (26) и продолженного по непрерывности на E ограниченного оператора $P : D(A_0^2) \to E$ обратного оператора, определённого на некотором подмножестве из $D(A_0^2)$. Важную роль при этом будет играть функция

$$\chi(\lambda) = \frac{1}{2}\beta\biggl(\frac{1-\sqrt{\lambda}}{2}\biggr),$$

с помощью которой уравнение (26) запишем в виде

$$Pu_2 \equiv \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \xi\chi(\xi^2)R(\xi^2; A_0^2)u_2\,d\xi = u_0.$$

Оператор A_0 порождает равномерно ограниченную группу $T(t;A_0)$, следовательно, спектр оператора A_0^2 лежит на отрицательной полуоси, и поэтому, как будет видно из дальнейшего доказательства, нам будет важен факт отсутствия [22, с. 536] действительных нулей у функции $\chi(\lambda)$.

Пусть Υ_1 – контур на комплексной плоскости, состоящий из проходимой снизу вверх прямой $\operatorname{Re} z = \sigma_1 > 0$, тогда Υ_1^2 – парабола, являющаяся образом прямой Υ_1 при отображении $w = z^2$ $(z \in \Upsilon_1,\ w \in \Upsilon_1^2)$. Поскольку спектр оператора A_0^2 лежит на отрицательной полуоси, то введём в рассмотрение контур Ξ, который получается из Υ_1 стягиванием к отрицательной полуоси так, чтобы он не содержал слева от себя нулей функции $\chi(z)$.

Возьмём λ_0 из регулярного множества $\rho(A_0^2)$ такое, чтобы $\operatorname{Re}\lambda_0 > \sigma_1 > 0$, и введём в рассмотрение ограниченный оператор

$$Hv = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Xi} \frac{R(z; A_0^2)v\,dz}{\chi(z)(z-\lambda_0)}, \quad H : E \to E, \tag{27}$$

абсолютная сходимость которого вытекает из известного неравенства

$$\|\lambda R(\lambda^2; A_0^2)\| \leqslant \frac{M}{\operatorname{Re}\lambda - \omega}, \quad \operatorname{Re}\lambda > \omega,$$

для резольвенты генератора операторной косинус-функции $C(t; A_0^2)$.

Покажем теперь, что оператор P имеет обратный оператор $P^{-1} : D(A_0^2) \to E$. Пусть $v \in D(A_0^2)$, $\sigma_1 < \sigma_2 < \operatorname{Re}\lambda$. Тогда, применяя определяемый равенством (27) оператор H к Pv и учитывая тождество Гильберта

$$R(z; A_0^2)R(\xi^2; A_0^2) = \frac{R(z; A_0^2) - R(\xi^2; A_0^2)}{\xi^2 - z},$$

получаем равенство

$$HPv = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Xi}\frac{R(z;A_0^2)}{\chi(z)(z-\lambda_0)}\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\sigma_2-i\infty}^{\sigma_2+i\infty}\xi\chi(\xi^2)R(\xi^2;A_0^2)v\,d\xi =$$

$$= \frac{2}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\Xi}\int\limits_{\sigma_2-i\infty}^{\sigma_2+i\infty}\left(\frac{\xi\chi(\xi^2)R(z;A_0^2)v}{\chi(z)(z-\lambda_0)(\xi^2-z)} - \frac{\xi\chi(\xi^2)R(\xi^2;A_0^2)v}{\chi(z)(z-\lambda_0)(\xi^2-z)}\right)d\xi\,dz. \tag{28}$$

Интеграл в (28) абсолютно сходится. Изменяя порядок интегрирования, будем иметь

$$HPv = \frac{2}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\Xi}\int\limits_{\sigma_2-i\infty}^{\sigma_2+i\infty}\frac{\xi\chi(\xi^2)R(z;A_0^2)v\,d\xi\,dz}{\chi(z)(z-\lambda_0)(\xi^2-z)} -$$

$$-\frac{2}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\sigma_2-i\infty}^{\sigma_2+i\infty}\xi\chi(\xi^2)R(\xi^2;A_0^2)v\int\limits_{\Xi}\frac{dz}{\chi(z)(z-\lambda_0)(\xi^2-z)}\,d\xi. \tag{29}$$

Если контур интегрирования Ξ замкнуть влево, то внутренний интеграл во втором слагаемом в (29) обратится в нуль в силу теоремы Коши. Для вычисления же интегралов в первом слагаемом в (29) используем интегральную формулу Коши. Таким образом, верно равенство

$$HPv = \frac{2}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\Xi}\int\limits_{\Upsilon_2}\frac{\xi\chi(\xi^2)R(z;A_0^2)v\,d\xi\,dz}{\chi(z)(z-\lambda_0)(\xi^2-z)} = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\Xi}\int\limits_{\Upsilon_2^2}\frac{\chi_k(\lambda)R(z;A_0^2)v\,d\lambda\,dz}{\chi(z)(z-\lambda_0)(\lambda-z)} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Xi}\frac{R(z;A_0^2)v\,dz}{z-\lambda_0} = -R(\lambda_0;A_0^2)v,$$

где Υ_2 – контур на комплексной плоскости, состоящий из проходимой снизу вверх прямой $\operatorname{Re} z = \sigma_2$, $0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \operatorname{Re}\lambda$, а контур Υ_2^2 – парабола, являющаяся образом контура Υ_2 при отображении $w = z^2$ $(z \in \Upsilon_2,\ w \in \Upsilon_2^2)$.

Коммутирующие между собой операторы H, P, $R(\lambda_0;A_0^2)$ ограничены, и область определения $D(A_0^2)$ плотна в E, поэтому равенство $HPv = -R(\lambda_0;A_0^2)v$ справедливо и для $v \in E$, и при этом $HP : E \to D(A_0^2)$. Отсюда следует, что оператор $P^{-1}v = -(\lambda_0 I - A_0^2)Hv$ при $v \in D(A_0^2)$ является обратным к оператору P, $P^{-1} : D(A_0^2) \to E$. Действительно,

$$PP^{-1}v = -P(\lambda_0 I - A_0^2)Hv = -PH(\lambda_0 I - A_0^2)v = R(\lambda_0;A_0^2)(\lambda_0 I - A_0^2)v = v, \quad v \in D(A_0^2),$$

$$P^{-1}Pv = -(\lambda_0 I - A_0^2)HPv = (\lambda_0 I - A_0^2)R(\lambda_0;A_0^2)v = v, \quad v \in E.$$

Возвращаясь к операторному уравнению (26) и требуя дополнительно, чтобы имело место включение $u_0 \in D(A_0^4)$, определим принадлежащий $D(A_0^2)$ начальный элемент

$$u_2 = (A_0^2 - \lambda_0 I)Hu_0,$$

где оператор H задан равенством (27), $\lambda_0 \in \rho(A_0^2)$, $\operatorname{Re}\lambda_0 > \sigma_1 > 0$. Тогда определяемая равенством (22) функция $u(t)$ будет ограниченным решением уравнения (21), удовлетворяющим начальному условию (23). Заметим, что вырождающееся уравнение (21) может иметь второе неограниченное в нуле решение. Таким образом установлена

Теорема 5. *Пусть оператор* A_0 *порождает равномерно ограниченную группу* $T(t;A_0)$ *и выполняется включение* $u_0 \in D(A_0^4)$. *Тогда функция* $u(t)$, *определяемая равенством (22), в котором* $u_2 = (A_0^2 - \lambda_0 I)Hu_0$, *где оператор* H *задан равенством (27),* $\lambda_0 \in \rho(A_0^2)$, $\operatorname{Re}\lambda_0 > \sigma_1 > 0$, *является ограниченным решением уравнения (21), удовлетворяющим начальному условию (23).*

Пример 1. Пусть $E = \mathbb{C} = D(A)$, $A = iA_1$, $A_1 \in \mathbb{R}$, $u_0 \in \mathbb{C}$. Тогда $T(t;A_0) = e^{itA_1}$, $C(t;A_0^2) = \cos(tA_1)$ и решение задачи (21), (23) имеет вид

$$u(t) = u_2 \int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{ch}\Big(t\cos\varphi + iA_1 \ln \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\Big)\, d\varphi,$$

где функция u_2 находится из условия

$$u_2 \int\limits_0^{\pi/2} \cos\Big(A_1 \ln \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\Big)\, d\varphi = u_0.$$

Пример 2. Пусть $E = BUC(\mathbb{R})$ – пространство ограниченных равномерно непрерывных функций на $\mathbb{R}$ (или $E = L^p(\mathbb{R})$, $1 \leqslant p < \infty$), оператор $A_0u(x) = u'(x)$ с областью определения $D(A_0) = \{u(x) \in E : u(x)$ – абсолютно непрерывна, $u'(x) \in E\}$. Тогда

$$T(t;A_0)u(x) = u(x+t), \quad C(t;A_0^2)u(x) = 1/2(u(x+t) + u(x-t))$$

и, если $u_2(x) \in D(A_0^2)$, то функция

$$u(t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} (\operatorname{ch}(t\cos\varphi) + \operatorname{sh}(t\cos\varphi))u_2\Big(x + \ln\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\Big)\, d\varphi +$$

$$+ \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} (\operatorname{ch}(t\cos\varphi) - \operatorname{sh}(t\cos\varphi))u_2\Big(x - \ln\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\Big)\, d\varphi$$

является ограниченным решением уравнения (21).

3. Сильно вырождающееся дифференциальное уравнение со степенным характером вырождения. Рассмотрим уравнение (4) в случае сильного вырождения, когда параметр $\gamma > 2$. Замена независимой переменной $t = (-\tau/\nu)^{-\nu}$, $\nu = 2/(2-\gamma)$, и неизвестной функции $u(t) = u((-\tau/\nu)^{-\nu}) = w(\tau)$ приводит сильно вырождающееся уравнение (4) к уравнению ЭПД

$$w''(\tau) + \frac{1+\nu-b\nu}{\tau}w'(\tau) = \bigg(A + \Big(-\frac{\tau}{\nu}\Big)^{-\nu\beta}B\bigg)w(\tau), \quad \tau > 0.$$

Аналогично теоремам 3 и 4 устанавливаются следующие теоремы 6 и 7, в которых в случае сильного вырождения указана постановка начальных условий, доказывается однозначная разрешимость соответствующих начальных задач для уравнения (4), а также устанавливается связь между порядком вырождения γ, коэффициентом b при первой производной $u'(t)$ и множеством операторов A, образующим класс корректной разрешимости.

Теорема 6. *Пусть* $\gamma > 2$, $2b \geqslant 4 - \gamma$, $\beta \geqslant 0$, $A \in G_{(2b+\gamma-4)/(\gamma-2)}$, $B \in \mathrm{L}(E)$, $u_0 \in D(A)$. *Тогда функция* $u(t) = \tilde{Y}_{(2b+\gamma-4)/(\gamma-2)}(-\nu t^{-1/\nu})u_0$, *где* $\nu = 2/(2-\gamma)$, *а функция* $\tilde{Y}_{(2b+\gamma-4)/(\gamma-2)}(\cdot)$ *определена равенством (18), является единственным решением уравнения (4), удовлетворяющим начальным условиям*

$$u(0) = u_0, \quad \lim_{t\to 0+} t^{1+1/\nu}u'(t) = 0.$$

Теорема 7. *Пусть* $\gamma > 2,\ \ 2b < 4-\gamma,\ \ \beta \geqslant 0,\ \ A \in G_{(\gamma-2b)/(\gamma-2)},\ \ B \in \mathrm{L}(E),\ \ u_1 \in D(A)$. *Тогда функция*

$$u(t) = \frac{(-\nu)^{b\nu-\nu-1}t^{1-b}}{1-b}\tilde{Y}_{(\gamma-2b)/(\gamma-2)}(-\nu t^{-1/\nu})u_1,$$

где $\nu = 2/(2-\gamma)$, *а функция* $\tilde{Y}_{(\gamma-2b)/(\gamma-2)}(\cdot)$ *определена равенством (18), является единственным решением уравнения (4), удовлетворяющим начальным условиям*

$$u(0) = 0, \quad (-\nu)^{1+\nu-b\nu}\lim_{t\to 0+} t^b u'(t) = u_1.$$

4. Абстрактный аналог вырождающегося по пространственной переменной дифференциального уравнения со степенным характером вырождения. При $\alpha > 0$ рассмотрим уравнение

$$u''(t) = t^\alpha A u(t), \quad t \geqslant 0. \tag{30}$$

Если A – оператор дифференцирования по пространственной переменной x, например $Au(t,x) = u''_{xx}(t,x)$, то уравнение (30) является вырождающимся гиперболическим и обобщает уравнение Трикоми, но имеет другой характер вырождения по сравнению с уравнениями предыдущих пунктов. Поэтому абстрактное уравнение (30) естественно также называть вырождающимся.

Замена переменной $t = (\tau/\mu)^\mu$, $\mu = 2/(\alpha+2)$, и неизвестной функции $u(t) = (\tau/\mu)^\mu w(\tau)$ приводит вырождающееся уравнение (30) к уравнению ЭПД вида

$$w''(\tau) + \frac{\mu+1}{\tau}w'(\tau) = Aw(\tau), \quad \tau > 0. \tag{31}$$

Поскольку $0 < \mu < 1$, то по теореме 1 из [12] при $A \in G_{1-\mu} \subset G_{\mu+1}$ функция

$$w(\tau) = \mu^\mu \tau^{-\mu} Y_{1-\mu}(\tau)u_0 + Y_{\mu+1}(\tau)u_1 \tag{32}$$

будет единственным решением уравнения (31), удовлетворяющим двум ненулевым начальным условиям

$$\lim_{\tau\to 0+}(w(\tau) - \mu^\mu\tau^{-\mu}Y_{1-\mu}(\tau)u_0) = u_1, \quad \lim_{\tau\to 0+}\tau^{\mu+1}w'(\tau) = -\mu^{\mu+1}u_0. \tag{33}$$

Возвращаясь в (32), (33) к исходной переменной, получаем представление решения уравнения (30)

$$u(t) = Y_{1-\mu}(\mu t^{1/\mu})u_0 + tY_{\mu+1}(\mu t^{1/\mu})u_1 \tag{34}$$

и начальные условия

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1, \tag{35}$$

которым это решение удовлетворяет. Таким образом, справедлива

Теорема 8. *Пусть* $\alpha > 0$, $\mu = 2/(\alpha+2)$, $A \in G_{1-\mu}$, $u_0, u_1 \in D(A)$. *Тогда определяемая равенством (34) функция* $u(t)$ *является единственным решением уравнения (30), удовлетворяющим начальным условиям (35).*

Заметим, что в рассматриваемом в [4] частном случае $A = A_0^2$, где A_0 – генератор C_0-группы, отсутствует утверждение о единственности, а доказательство утверждения о разрешимости состоит в проверке с помощью дифференцирования под знаком интеграла представления вида (3) для ОФБ. Имея решение (34) и используя свойство ОФБ определять решение уравнения ЭПД, эту проверку можно произвести значительно проще.

Следует отметить, что добавление в уравнение (30) “младших” слагаемых требует, вообще говоря, дополнительной гладкости от начальных условий по сравнению с задачей (30), (35), а начальная задача для изменённого уравнения может оказаться некорректной. Приведём соответствующий пример.

Пример 3. *Пусть* $u_0 \in D(A_0^n)$, $n = \max\{2, m\}$, $m \in \mathbb{N}_0$, A_0 – *генератор* C_0*-группы* $T(t; A_0)$. *Тогда функция*

$$u(t) = \sum_{j=0}^{m} \frac{m!\sqrt{\pi}t^{2j}}{j!(m-j)!\Gamma(j+1/2)} T(t^2/2) A_0^j u_0 \tag{36}$$

является решением уравнения

$$u''(t) = t^2 A_0^2 u(t) + (4m+1) A_0 u(t), \quad t \geqslant 0, \tag{37}$$

удовлетворяющим начальным условиям

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = 0. \tag{38}$$

Этот факт нетрудно проверить, сравнивая после подстановки определяемой равенством (36) функции в уравнение (37) коэффициенты при $t^{2j} A_0^{j+1} u_0$, $0 \leqslant j \leqslant m$, в левой и правой частях получившегося соотношения.

Равенство (36) показывает наличие зависимости между коэффициентом при $A_0 u(t)$ в уравнении (37) и гладкостью начального элемента u_0 в начальных условиях (38) (ср. со случаем вырождающегося гиперболического уравнения в частных производных [3, с. 255]).

5. Вырожденное гипергеометрическое операторное уравнение. В заключение покажем, как с помощью дробного интегродифференцирования (см. [23, § 2]) можно исследовать вырожденное гипергеометрическое операторное уравнение

$$tu''(t) + (bI - tA)u'(t) - cAu(t) = 0, \quad t \geqslant 0, \tag{39}$$

параметры b и c которого удовлетворяют неравенствам $b > c > 0$.

Будем искать ограниченное в нуле решение уравнения (39) и вначале предположим, что $b > 1$, $c = \alpha$, $0 < \alpha < 1$. Учитывая равенство (см. [23, формула (15.11)])

$$D_{0+}^{\alpha}(tu(t)) = tD_{0+}^{\alpha}u(t) + \alpha D_{0+}^{\alpha-1}u(t)$$

для дробной производной Римана–Лиувилля D_{0+}^{α}, это уравнение запишем в виде

$$D_{0+}^{\alpha}(t(D_{0+}^{1-\alpha}u(t))' + ((b-\alpha)I - tA)D_{0+}^{1-\alpha}u(t)) = 0.$$

Обозначив $v(t) = D_{0+}^{1-\alpha}u(t)$, относительно функции $v(t)$ получим уравнение

$$tv'(t) + (b-\alpha)v(t) = tAv(t) + t^{\alpha-1}v_0 \tag{40}$$

с некоторым элементом $v_0 \in E$.

Чтобы существовало решение дифференциального уравнения первого порядка, естественно предположить, что оператор A является генератором C_0-полугруппы $U(t; A)$. Тогда в качестве решения уравнения (40) возьмём функцию

$$v(t) = t^{\alpha-1} \int_0^1 (1-s)^{b-2} U(ts; A) v_0 \, ds. \tag{41}$$

Учитывая представление (41), найдём ограниченное решение уравнения (39). После элементарных преобразований получим

$$u(t) = I_{0+}^{1-\alpha} v(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{v(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}} \, d\tau =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^t \frac{\tau^{\alpha-1}}{(t-\tau)^\alpha} \int\limits_0^1 (1-s)^{b-2} U(\tau s; A) v_0 \, ds \, d\tau =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^t \frac{\tau^{\alpha-b}}{(t-\tau)^\alpha} \int\limits_0^\tau (\tau - x)^{b-2} U(x; A) v_0 \, dx \, d\tau =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^t U(x; A) v_0 \int\limits_x^t \frac{\tau^{\alpha-b}(\tau - x)^{b-2}}{(t-\tau)^\alpha} \, d\tau \, dx =$$

$$= \frac{\Gamma(b-1)}{\Gamma(b-\alpha) t^{b-1}} \int\limits_0^t x^{\alpha-1} (t-x)^{b-\alpha-1} U(x; A) v_0 \, dx =$$

$$= \frac{\Gamma(b-1)}{\Gamma(b-c)} \int\limits_0^1 s^{c-1} (1-s)^{b-c-1} U(ts; A) v_0 \, ds, \tag{42}$$

при этом мы использовали интеграл 2.2.6.2 из [21].

Наконец, чтобы найденное решение удовлетворяло начальному условию

$$u(0) = u_0 \in D(A), \tag{43}$$

в представлении (42) положим $v_0 = \dfrac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-1)\Gamma(c)} u_0$. Тогда

$$u(t) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(c)\Gamma(b-c)} \int\limits_0^1 s^{c-1} (1-s)^{b-c-1} U(ts; A) u_0 \, ds. \tag{44}$$

Равенство (44), установленное для $b > 1$ и $0 < c < 1$, в силу принципа аналитического продолжения справедливо и для $b > c > 0$. Таким образом, доказана

Теорема 9. *Пусть оператор A порождает C_0-полугруппу $U(t; A)$, $b > c > 0$ и выполняется включение $u_0 \in D(A)$. Тогда определяемая равенством (44) функция $u(t)$ является ограниченным решением вырожденного гипергеометрического операторного уравнения (39), удовлетворяющим начальному условию (43).*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 19-01-00732).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Смирнов М.М.* Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. М., 1966.
2. *Смирнов М.М.* Уравнения смешанного типа. М., 1970.
3. *Олейник О.А., Радкевич Е.В.* Уравнения с неотрицательной характеристической формой. М., 2010.
4. *Favini A.* Su un'equazione astratta di tipo ellittico-iperbolico // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 1976. V. 55. P. 227–242.
5. *Вайнерман Л.И.* Гиперболические уравнения с вырождением в гильбертовом пространстве // Сиб. мат. журн. 1977. Т. 18. № 4. С. 736–746.
6. *Орлов В.П.* О слабо вырождающихся гиперболических уравнениях // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 10. С. 1409–1419.
7. *Голдстейн Дж.* Полугруппы линейных операторов и их приложения. Киев, 1989.
8. *Глушак А.В.* Операторная функция Бесселя // Докл. АН СССР. 1997. Т. 352. № 5. С. 587–589.

9. *Глушак А.В., Покручин О.А.* Критерий разрешимости задачи Коши для абстрактного уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 1. С. 41–59.
10. *Brezis H., Rosenkrantz W., Singer B.* On a degenerat elliptic-parabolic equation occurring in the theory of probability // Comm. Pur Appl. Math. 1971. V. 24. P. 395–416.
11. *Глушак А.В.* Критерий разрешимости весовой задачи Коши для абстрактного уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 5. С. 627–637.
12. *Глушак А.В., Кононенко В.И., Шмулевич С.Д.* Об одной сингулярной абстрактной задаче Коши // Изв. вузов. Математика. 1986. № 6. С. 55–56.
13. *Глушак А.В.* О возмущении абстрактного уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу // Мат. заметки. 1996. Т. 60. Вып. 3. С. 363–369.
14. *Глушак А.В.* Операторная функция Бесселя и связанные с нею полугруппы и модифицированное преобразование Гильберта // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35. № 1. С. 128–130.
15. *Левитан Б.М.* Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье // Успехи мат. наук. 1951. Т. 1. Вып. 2 (42). С. 102–143.
16. *Bragg L.R.* Fundamental solutions and properties of solutions of the initial value radial Euler–Poisson–Darboux // J. Math. Mech. 1969. V. 18. P. 607–616.
17. *Волк В.Я.* О формулах обращения для дифференциального уравнения с особенностью при x=0 // Успехи мат. наук. 1953. Т. 8. Вып. 4 (56). С. 141–151.
18. *Гельфанд И.М., Левитан Б.М.* Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1951. Т. 15. Вып. 4. С. 309–360.
19. *Фомин В.И.* Векторное уравнение Эйлера второго порядка в банаховом пространстве. М., 2012.
20. *Ватсон Г.Н.* Теория бесселевых функций. М., 1949.
21. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. М., 1981.
22. *Дунаев А.С., Шлычков В.И.* Специальные функции. Ч. 2. Екатеринбург, 2015.
23. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск, 1987.

Белгородский государственный национальный
исследовательский университет

Поступила в редакцию 29.05.2020 г.
После доработки 29.05.2020 г.
Принята к публикации 26.06.2020 г.