ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 1, с. 76–86

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.226+517.956.226

ПАРАБОЛИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА СО СТЕПЕННЫМ ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ

© 2021 г. А. С. Омуралиев, Э. Д. Абылаева, П. Эсенгул кызы

Строится регуляризованная асимптотика решения первой краевой задачи для сингулярно возмущённого двумерного дифференциального уравнения параболического типа, когда предельное уравнение имеет регулярную особенность. В таких задачах наряду с параболическими пограничными слоями возникают степенной и угловые пограничные слои.

DOI: 10.31857/S0374064121010076

Введение. Метод регуляризации Ломова [1] для сингулярно возмущённых задач первоначально был разработан для уравнений, порядок которых при стремлении малого параметра к нулю не понижается, а приобретает ту или иную особенность [2]. Метод позволяет строить регуляризованную асимптотику решения [1]. Впоследствии этот метод был обобщён на многие классы сингулярно возмущённых уравнений в различных постановках (библиографию работ, посвящённых построению регуляризованных асимптотик и опубликованных в последние годы, можно найти в монографии [3]). Задачи со степенным погранслоем с разных точек зрения изучались в работах [2–7]. Так, в работе [4] построена асимптотика решений краевых и начальных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром со степенным пограничным слоем. В ней же приводятся примеры смешанных краевых задач для уравнений с частными производными параболического и гиперболического типов, при решении которых возникает явление степенного пограничного слоя. В изученных в [4] уравнениях перед самосопряжённым эллиптическим оператором малый параметр отсутствовал. С помощью метода Фурье исходная задача сводилась к обыкновенному дифференциальному уравнению, асимптотика решения которого содержала только степенной пограничный слой.

Исследованное в данной работе параболическое уравнение, в отличие от работы [4], содержит малый параметр при части пространственных производных второго порядка. Такое вхождение малого параметра в уравнение приводит к возникновению, дополнительно, параболического пограничного слоя, описываемого специальной функцией, называемой “дополнительным интегралом вероятности”. Кроме того, асимптотика построенного решения содержит угловые погранслойные функции, представляющие собой произведение степенной и параболической погранслойных функций. Фундаментальные результаты по степенным пограничным слоям для обыкновенных дифференциальных уравнений содержит монография [3, с. 379–401], в которой методом регуляризации для сингулярно возмущённых задач построена регуляризованная асимптотика. Эта асимптотика решения содержит полином по степеням $\ln(1+\tau)$, $\tau = t/\varepsilon$. Нам, вводя регуляризующие функции другим образом, удалось упростить структуру построенного решения – оно не содержит полином по степеням $\ln(1+\tau)$. Для обыкновенных дифференциальных уравнений такой результат опубликован в [7]. В работах [5, 6] алгебраическим методом изучены сингулярно возмущённые начальные и краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с особенностями различных типов и построены асимптотики решения, содержащие степенные пограничные слои.

Метод может быть применён к задачам гидро- и аэродинамики. Сингулярно возмущённые задачи из механики жидкости, из теории взрыва и из других прикладных областей приведены в работе [8], а в работе [9] описываются такие задачи из радиотехники.

Настоящая работа посвящена асимптотическому решению первой краевой задачи для сингулярно возмущённого двумерного дифференциального уравнения параболического типа

$$L_\varepsilon u(x,y,t,\varepsilon) \equiv (\varepsilon+t)\partial_t u(x,y,t,\varepsilon) - \varepsilon^2 a(x)\partial_x^2 u(x,y,t,\varepsilon) - L(y,t)u(x,y,t,\varepsilon) = f(x,y,t),$$
$$(x,y)\in\Omega\equiv(0,1)\times(0,1),\quad (x,y,t)\in Q\equiv\Omega\times(0,T],$$
$$u(x,y,t,\varepsilon)|_{t=0} = u(x,y,t,\varepsilon)|_{\partial\Omega} = 0. \tag{1}$$

Асимптотика решения этой задачи наряду с параболической погранслойной функцией содержит и степенную погранслойную функцию

$$\Pi_\varepsilon(t) = \left(\frac{\varepsilon}{t+\varepsilon}\right)^\lambda, \quad \lambda > 0,$$

а также их произведение, которое описывает угловой пограничный слой [7].

Задача решается при следующих предположениях:

1) функция $a(x)$ принадлежит классу $C^\infty[0,1]$ и положительна при всех $x \in [0,1]$; свободный член $f(x,y,t)$ принадлежит классу $C^\infty(\overline{Q})$;

2) самосопряжённый оператор $L(y,t)$ в гильбертовом пространстве $L_2[0,1]$ при каждом $t \in [0,T]$ имеет простой дискретный спектр $\{\lambda_k(t) : k \in \mathbb{N}\}$ (т.е. $L\psi_k(y,t) = \lambda_k(t)\psi_k(y,t)$, $\psi_k(y,t)|_{y=0} = \psi_k(y,t)_{y=1} = 0$), который удовлетворяет условиям:

a) справедливо соотношение $\lambda_i(t) \neq \lambda_j(t)$ для любых $i \neq j$ и всех $t \in [0,T]$,

b) имеет место неравенство $\lambda_k(0) < 0$ для любого $k \in \mathbb{N}$.

1. Регуляризация задачи. Наряду с независимыми переменными x, t будем рассматривать регуляризующие переменные, которые введём с помощью следующих равенств:

$$\mu_j = \lambda_j(0)\ln\left(\frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}\right) \equiv K_j(t,\varepsilon), \quad \tau = \frac{1}{\varepsilon}\ln\left(\frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}\right), \quad \zeta_l = \frac{\varphi_l(x)}{\varepsilon^{3/2}}, \tag{2}$$

$$\varphi_l(x) = (-1)^{l-1}\int\limits_{l-1}^{x} \frac{ds}{\sqrt{a(s)}}, \quad l = 1,2,$$

и объявим их независимыми переменными расширенной функции

$$\tilde{u}(M,\varepsilon)|_{\theta=\chi(x,t,\varepsilon)} \equiv u(x,y,t,\varepsilon), \tag{3}$$

$$M = (x,y,t,\theta), \quad \theta = (\zeta,\tau,\mu), \quad \mu = (\mu_1,\mu_2,\ldots), \quad \zeta = (\zeta_1,\zeta_2),$$

$$\chi(x,t,\varepsilon) = \left(\frac{\varphi(x)}{\varepsilon^{3/2}}, \frac{1}{\varepsilon}\ln\left(\frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}\right), K_1(t,\varepsilon), K_2(t,\varepsilon), \ldots\right), \quad \varphi(x) = (\varphi_1(x),\varphi_2(x)).$$

С учётом определения (2) из (3) найдём производные расширенной функции:

$$\partial_t u(x,y,t,\varepsilon) \equiv \left(\partial_t\tilde{u} + \frac{1}{\varepsilon(t+\varepsilon)}\partial_\tau\tilde{u} + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda_j(0)}{t+\varepsilon}\partial_{\mu_j}\tilde{u}\right)_{\theta=\chi(x,t,\varepsilon)}, \tag{4}$$

$$\partial_x^2 u \equiv \left(\partial_x^2\tilde{u} + \sum_{l=1}^{2}\left[\left(\frac{\varphi_l'(x)}{\varepsilon^{3/2}}\right)^2\partial_{\zeta_l}^2\tilde{u} + \frac{1}{\varepsilon^{3/2}}(2\varphi_l'(x)\partial_{x,\zeta_l}^2 + \varphi_l''(x)\partial_{\zeta_l})\tilde{u}\right]\right)_{\theta=\chi(x,t,\varepsilon)}.$$

Ради упрощения записи не приведены слагаемые, содержащие $\partial_{\zeta_1,\zeta_2}^2\tilde{u}(M)$, так как асимптотика не содержит функций, зависящих от (ζ_1,ζ_2).

На основании (1), (2)–(4) для расширенной функции $\tilde{u}(M,\varepsilon)$ поставим следующую задачу:

$$\tilde{L}_\varepsilon\tilde{u}(M,\varepsilon) \equiv \varepsilon\partial_t\tilde{u} + \frac{1}{\varepsilon}T_0\tilde{u} + T_1\tilde{u} - \sqrt{\varepsilon}L_\zeta\tilde{u} - \varepsilon^2 L_x\tilde{u} = f(x,y,t), \quad M \in B,$$

$$\tilde{u}(M,\varepsilon)|_{t=\tau=\mu=0} = 0, \quad \tilde{u}(M,\varepsilon)|_{\partial B} = 0, \tag{5}$$

где

$$B \equiv Q \times (0,\infty)^3, \quad T_0 \equiv \partial_\tau - \Delta_\zeta, \quad T_1 \equiv t\partial_t + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j(0)\partial_{\mu_j} - L(y,t), \quad \Delta_\zeta \equiv \sum_{l=1}^{2} \partial_{\zeta_l}^2,$$

$$L_\zeta \equiv a(x)\sum_{l=1}^{2} L_{\zeta,l}, \quad L_x \equiv a(x)\partial_x^2, \quad L_{\zeta,l} \equiv \partial_{\zeta_l} D_{x,l}, \quad D_{x,l} \equiv 2\varphi_l'(x)\partial_{x_l} + \varphi_l''(x).$$

При этом имеет место тождество

$$(\tilde{L}_\varepsilon \tilde{u}(M,\varepsilon))_{\theta=\chi(x,t,\varepsilon)} \equiv L_\varepsilon u(x,y,t,\varepsilon). \tag{6}$$

Решение задачи (5) будем искать в виде ряда

$$\tilde{u}(M,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/2} u_k(M).$$

Для коэффициентов этого ряда стандартным образом получаем следующие итерационные задачи:

$$\begin{gathered} T_\nu u_0(M) = 0, \quad T_0 u_2(M) = -T_1 u_0(M) + f(x,y,t), \\ T_0 u_k(M) = -T_1 u_{k-2}(M) + L_\zeta u_{k-3}(M) - \partial_t u_{k-4}(M) + L_x u_{k-6}(M), \\ u_k(M)|_{t=\tau=\mu=0} = 0, \quad u_k(M)|_{\partial B} = 0, \quad k \geqslant 0, \quad \nu = 0,1. \end{gathered} \tag{7}$$

2. Пространство безрезонансных решений. Определим класс функций, в котором каждая из задач (7) однозначно разрешима. Для этого введём функциональные пространства

$$G_0 = \{g_0(x,y,t) : g_0(x,y,t) = \langle \upsilon(x,t), \psi(y,t)\rangle, \quad \upsilon(x,t) \in C^\infty([0,1]\times[0,T])\},$$

$$G_1 = \Bigg\{g_1(N^l) : g_1(N^l) = \sum_{l=1}^{2} \langle Y(N^l), \psi(y,t)\rangle, \quad \|Y(N^l)\| < c\exp\left(-\frac{\zeta_l^2}{8\tau}\right),$$

$$Y(N^l) = y(x,t)Y(\zeta_l,\tau), \quad y(x,t) \in C^\infty([0,1]\times[0,T])\Bigg\},$$

$$G_2 = \{g_2(x,y,t,\mu) : g_2(x,y,t,\mu) = \langle [C(x,t) + \Lambda(P(x))]\exp(\mu), \psi(y,t)\rangle,$$
$$C(x,t) \in C^\infty([0,1]\times[0,T]), \quad P(x) \in C^\infty([0,1])\},$$

$$G_3 = \Bigg\{g_3(N^l) : g_3(N^l) = \sum_{l=1}^{2} \langle Z(N^l)\exp(\mu), \psi(y,t)\rangle, \quad \|Z(N^l)\| < c\exp\left(-\frac{\zeta_l^2}{8\tau}\right),$$

$$Z(N^l) = z(x,t)Z(\zeta_l,\tau), \quad z(x,t) \in C^\infty([0,1]\times[0,T])\Bigg\},$$

$$N^l = (x,t,\zeta_l,\tau), \quad \mu = (\mu_1,\mu_2,\ldots), \quad \upsilon(x,t) = (\upsilon_1(x,t),\upsilon_2(x,t),\ldots), \quad Z(N^l) = (Z_{ij}(N^l)),$$
$$Y(N^l) = (Y_1(N^l), Y_2(N^l),\ldots), \quad C(x,t) = (c_{ij}(x,t)), \quad \Lambda(P(x)) = \operatorname{diag}(P_1(x), P_2(x),\ldots),$$
$$\exp(\mu) = (\exp(\mu_1),\exp(\mu_2),\ldots), \quad \psi(y,t) = (\psi_1(y,t),\psi_2(y,t),\ldots), \quad i,j = 1,2,\ldots,$$

$$\langle \upsilon(x,t), \psi(y,t)\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \upsilon_i(x,t)\psi_i(y,t),$$

$$\langle [C(x,t) + \Lambda(P(x))]\exp(\mu), \psi(y,t)\rangle = \sum_{ij=1}^{\infty} c_{ij}(x,t)\exp(\mu_j)\psi_i(y,t) + \sum_{i=1}^{\infty} P_i(x)\exp(\mu_i)\psi_i(y,t),$$

$$\langle Z(N^l)\exp(\mu), \psi(y,t)\rangle = \sum_{ij=1}^{\infty} Z_{ij}(N^l)\exp(\mu_j)\psi_i(y,t), \quad \langle Y(N^l), \psi(y,t)\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} Y_i(N^l)\psi_i(y,t).$$

Из этих пространств построим новое пространство, определив его как прямую сумму введённых выше пространств

$$U = G_0 \bigoplus G_1 \bigoplus G_2 \bigoplus G_3,$$

которое, следуя [1], назовём *пространством безрезонансных решений.* Произвольный элемент $u_k(M)$ пространства U имеет вид

$$u_k(M) = \langle v_k(x,t), \psi(y,t)\rangle + \sum_{l=1}^{2} \langle Y^k(N^l), \psi(y,t)\rangle +$$

$$+ \langle [C^k(x,t) + \Lambda(P^k(x))]\exp(\mu), \psi(y,t)\rangle + \sum_{l=1}^{2} \langle Z^k(N^l)\exp(\mu), \psi(y,t)\rangle. \tag{8}$$

Вычислим действия операторов T_0, T_1, L_ζ на функцию $u_k(M) \in U$. Имеем

$$T_0 u_k(M) = \sum_{l=1}^{2} \langle [\partial_\tau Y^k(N^l) - \partial^2_{\zeta_l} Y^k(N^l) + (\partial_\tau Z^k(N^l) - \partial^2_{\zeta_l} Z^k(N^l))\exp(\mu)], \psi(y,t)\rangle,$$

$$T_1 u_k(M) = \left\langle \left(D^1 v_k(x,t) + \sum_{l=1}^{2} D^1 Y^k(N^l) \right), \psi(y,t) \right\rangle +$$

$$+ \langle D^3(C^k(x,t) + \Lambda(P^k(x)))\exp(\mu), \psi(y,t)\rangle + \left\langle \sum_{l=1}^{2} D^3 Z^k(N^l)\exp(\mu), \psi(y,t) \right\rangle,$$

$$L_\zeta u_k(M) = a(x) \sum_{l=1}^{2} \langle [\partial_{\zeta_l}(D_{x,l}(Y^k(N^l))) + \partial_{\zeta_l}(D_{x,l}(Z^k(N^l)))\exp(\mu)], \psi(y,t)\rangle,$$

$$D^1 \equiv t\partial_t - \Lambda(\lambda(t)) + tA^{\mathrm{T}}(t), \quad D^3 Z \equiv t\partial_t Z + tA^{\mathrm{T}}(t)Z + Z\Lambda(0) - \Lambda(t)Z,$$

$$\alpha_{ik}(t) = (\partial_t \psi_i(y,t), \psi_k(y,t)), \quad \Lambda(t) = \mathrm{diag}(\lambda_1(t), \lambda_2(t), \ldots), \quad A(t) = (\alpha_{ik}(t)). \tag{9}$$

3. Разрешимость итерационных задач. В общем случае итерационные уравнения (7) можно записать в виде

$$T_0 u_k(M) = h^k(M). \tag{10}$$

Теорема 1. *Пусть выполнены предположения 1), 2) и функция $h^k(M)$ принадлежит пространству $G_1 \bigoplus G_3$. Тогда уравнение (10) имеет решение $u_k(M)$, принадлежащее пространству U.*

Доказательство. Пусть $h^k(M) \in G_1 \bigoplus G_3$, т.е.

$$h^k(M) = \left\langle \sum_{l=1}^{2} [h^{k,1}(N^l) + h^{k,2}(N^l)\exp(\mu)], \psi(y,t) \right\rangle, \quad \|h^{k,r}(N^l)\| < c\exp\left(-\frac{\zeta_l^2}{8\tau}\right), \quad r = 1,2.$$

Подставим представление (8) в уравнение (10), тогда на основании вычислений (9) получим относительно функций $Y^k(N^l)$ и $Z^k(N^l)$ уравнения

$$\partial_\tau Z^k_{ij}(N^l) - \partial^2_{\zeta_l} Z^k_{ij}(N^l) = h^{k,2}_{ij}(N^l), \quad \partial_\tau Y^k_i(N^l) - \partial^2_{\zeta_l} Y^k_i(N^l) = h^{k,1}_i(N^l).$$

Эти уравнения при соответствующих краевых условиях

$$Z^k_{ij}(N^l)|_{\tau=0} = 0, \quad Z^k_{ij}(N^l)|_{\zeta_l=0} = W^{k,l}_{ij}(x,t), \quad Y^k_i(N^l)|_{\tau=0} = 0, \quad Y^k_i(N^l)|_{\zeta_l=0} = d^{k,l}_i(x,t)$$

имеют решения, представимые в виде

$$Z_{ij}^k(N^l) = W_{ij}^{k,l}(x,t)\,\mathrm{erfc}\left(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{\tau}}\right) + h_{ij}^{k,2}(x,t)I_2(\zeta_l,\tau), \quad \mathrm{erfc}\,(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_x^\infty \exp(-t^2)\,dt,$$

$$Y_i^k(N_{1,l}) = d_i^{k,l}(x,t)\,\mathrm{erfc}\left(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{\tau}}\right) + h_i^{k,1}(x,t)I_1(\zeta_l,\tau), \tag{11}$$

$$I_r(\zeta_l,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\tau\int\limits_0^\infty \frac{h_1^{k,r}(\eta,s)}{\sqrt{\tau-s}}\left[\exp\left(-\frac{(\zeta_l-\eta)^2}{4(\tau-s)}\right) - \exp\left(-\frac{(\zeta_l+\eta)^2}{4(\tau-s)}\right)\right]d\eta\,ds, \quad r=1,2,$$

где $h_1^{k,r}(x,t)$, $h_2^{k,r}(\eta,s)$ – известные функции.

Оценим интеграл $I_r(\eta_l,\tau)$, используя теорему о среднем:

$$|I_r(N^l)| \leqslant c\left|\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\tau \frac{d\nu}{\sqrt{\tau-\nu}}\int\limits_0^\infty\left[\exp\left(-\frac{(\zeta_l-\eta)^2}{4(\tau-\nu)}\right) - \exp\left(-\frac{(\zeta_l+\eta)^2}{4(\tau-\nu)}\right)\right]\exp\left(-\frac{\eta^2}{8\nu}\right)d\eta\right| =$$

$$= \frac{c}{2\sqrt{\pi}}\left|\int\limits_0^\tau \frac{d\nu}{\sqrt{\tau-\nu}}\int\limits_0^\infty \exp\left[-\frac{\left(\zeta_l+\eta\right)^2}{4(\tau-\nu)} + \theta\left(-\frac{(\zeta_l-\eta)^2}{4(\tau-\nu)} + \frac{(\zeta_l+\eta)^2}{4(\tau-\nu)}\right)\right]\times\right.$$

$$\left.\times\left(-\frac{(\zeta_l-\eta)^2}{4(\tau-\nu)} + \frac{(\zeta_l+\eta)^2}{4(\tau-\nu)}\right)\exp\left(-\frac{\eta^2}{8\nu}\right)d\eta\right| =$$

$$= \frac{c}{2\sqrt{\pi}}\left|\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\tau \exp\left(-\frac{\eta^2}{8\nu}\right)\exp\left(-(1-\theta)\frac{(\zeta_l+\eta)^2}{4(\tau-\nu)} - \theta\frac{(\zeta_l-\eta)^2}{4(\tau-\nu)}\right)\frac{\zeta_l\eta}{\sqrt{(\tau-\nu)^3}}\,d\eta\,d\nu\right|.$$

Так как

$$-\frac{1}{(\tau-\nu)} \leqslant -\frac{1}{\tau}, \quad -\frac{1}{\nu} \leqslant -\frac{1}{\tau}, \quad \left|\frac{\zeta_l\eta}{2\sqrt{\tau-\nu}}\exp\left(-\frac{\zeta_l\eta}{4(\tau-\nu)}\right)\right| < c,$$

то, выбирая $\theta = 1/4$, будем иметь

$$|I_1(N_l)| \leqslant c\left|\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty \exp\left(-\frac{\eta_l^2}{4\tau}\right)\exp\left(-\frac{\eta^2}{8\tau}\right)\int\limits_0^\tau \exp\left(-\frac{\eta^2}{4(\tau-\nu)}\right)\frac{1}{(\tau-\nu)}\,d\nu\,d\eta\right|.$$

Сделаем замену $\tau-\nu = z$, затем, применяя теорему о среднем, будем иметь

$$|I_1(N_l)| \leqslant c\left|\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty \exp\left(-\frac{\eta_l^2}{4\tau}\right)\exp\left(-\frac{\eta^2}{8\tau}\right)\frac{1}{\tau}\int\limits_\theta^\tau \exp\left(-\frac{\eta^2}{4z}\right)dz\,d\eta\right|.$$

Усиливая неравенство и применяя ещё раз теорему о среднем, приходим к неравенству

$$|I_1(N_l)| \leqslant c\left|\frac{1}{\tau}\exp\left(-\frac{\eta_l^2}{4\tau}\right)\int\limits_0^\infty \exp\left(-\frac{\eta^2}{8\tau}\right)\tau\exp\left(-\frac{\eta^2}{4\theta\tau}\right)d\eta\right|, \quad \theta\in(0,\tau).$$

Отсюда, используя формулу 3.321.3 из [10], получим требуемую оценку. Теорема доказана.

Далее для матрицы C через $\overline{C}$ (через $\overline{\overline{C}}$) будем обозначать матрицу с теми же, что и у C, диагональными (внедиагональными) элементами и нулевыми внедиагональными (диагональными) элементами, в частности, $C = \overline{C} + \overline{\overline{C}}$.

Теорема 2. *Пусть выполнены предположения 1), 2) и* $\overline{h^{k,2}(x,t)}|_{t=0}=0$ *(т.е.* $h^{k,2}_{ii}(x,0)=$ $=0$*). Тогда задача*

$$D^3(C^k(x,t)+\Lambda(P^k(x)))=h^{k,2}(x,t),$$

$$\overline{C^k(x,t)}|_{t=0}=-[\Lambda(\upsilon_k(x,0))+\Lambda(\overline{\overline{C^k(x,t)}}\mathbf{1})+\Lambda(P^k(x))]_{t=0}$$

$$\left(m.e.\ \ c^k_{i,i}(xt)|_{t=0}=-\upsilon_{ki}(x,0)-P^k_i(x)-\sum_{i\neq j}c^k_{ij}(x,0)\right), \tag{12}$$

где $\mathbf{1}=\mathrm{col}\,(1,1,\ldots)$, *однозначно разрешима.*

Доказательство. В уравнении (12) положим

$$\overline{\overline{C^k(x,t)\Lambda(0)-\Lambda(t)C^k(x,t)}}|_{t=0}=[\overline{\overline{h^{k,2}(x,t)}}]|_{t=0} \tag{13}$$

$$\left(\text{т.е.}\ \ c^k_{ij}(x,t)|_{t=0}=\frac{h^{k,2}_{i,j}(x,0)}{\lambda_j(0)-\lambda_i(0)},\quad i\neq j\right).$$

Тогда в силу условия $\overline{h^{k,2}(x,t)}|_{t=0}=0$ система (12) невырождена.

Уравнение (12) при соответствующих начальных условиях из (12) и (13) однозначно определяет функцию $C^k(x,t)$. Теорема доказана.

Замечание. При решении итерационных уравнений условие $\overline{h^{k,2}(x,t)}|_{t=0}=0$ обеспечивается выбором вектор-функции $P^k(x)=(P^k_1(x),P^k_2(x),\ldots)$.

Теорема 3. *Пусть выполнены предположения 1), 2). Тогда уравнение (10) имеет единственное решение, удовлетворяющее условиям:*

a) $u_k(M)|_{t=\tau=\mu=0}=0,\ \ u_k(M)|_{\partial B}=0$;

b) $T_1u_k(M)+h^k(M)\in G_1\bigoplus G_3$;

c) $L_\varsigma u_k(M)=0$.

Доказательство. По теореме 1 решение уравнения (10) существует и представимо в виде (8). Удовлетворим решение (8) условию b): оно обеспечивается, если произвольные функции $\upsilon_k(x,t)$, $C^k(x,t)$ будут выбраны как решения уравнений

$$D^1\upsilon_{k,i}(x,t)=-h^{k,1}_i(x,t),\quad D^3[c^k_{ij}(x,t)+P^k_i(x)]=-h^{k,2}_{ij}(x,t).$$

Тогда на основании (9) выражение $T_1u_k(M)+h^k(M)$ запишется в виде

$$T_1u_k(M)+h^k(M)=\sum_{l=1}^{2}[\langle D^1Y^k(N^l)+h^{k,3}(N^l),\psi(y,t)\rangle+$$

$$+\langle(D^3Z^k(N^l)+h^{k,4}(N^l))\exp(\mu),\psi(y,t)\rangle]\in G_1\bigoplus G_3,$$

$$h^k(M)=\sum_{l=1}^{2}\langle h^{k,3}(N^l)+h^{k,4}(N^l)\exp(\mu),\psi(y,t)\rangle.$$

Удовлетворив функцию (8) краевым условиям a), найдём, что

$$Y^k_i(N^l)|_{t=\tau=0}=0,\quad Y^k_i(N^l)|_{\zeta_l=0}=d^{k,l}_i(x,t),\quad d^{k,l}_i(x,t)|_{x=l-1}=-\upsilon_{k,i}(l-1,t),$$

$$\overline{C^k(x,t)}|_{t=0}=-\Lambda(\upsilon_k(x,0))-\Lambda(P^k(x))-\Lambda(\overline{\overline{C^k(x,0)}}\mathbf{1})$$

$$\left(\text{т.е.}\ \ c^k_{ii}(x,t)|_{t=0}=-\upsilon_{ki}(x,0)-P^k_i(x)-\sum_{i\neq j}c^k_{ij}(x,0)\right),\quad Z^k_{ij}(N^l)|_{t=\tau=0}=0,$$

$$Z^k_{ij}(N^l)|_{\zeta_l=0}=W^{k,l}_{ij}(x,t),\quad W^{k,l}_{ij}(x,t)|_{x=l-1}=-c^k_{ij}(l-1,t)-P^k_i(l-1). \tag{14}$$

По теореме 2 матрица-функция $C^k(x,t)$ определяется однозначно.

Подставим функцию $u_k(M)$ в условие c). Тогда, учитывая представления (11), а также равенство $h^{k,r+3}(N^l) = h^{k,r+3}(x,t)I_r(\zeta_l,\tau)$, и замечая, что функция $\operatorname{erfc}(\zeta_l/2\sqrt{\tau})$ имеет такую же, как и функция $I_r(\zeta_l,\tau)$, $r=1,2$, оценку, получаем, согласно (9), уравнения

$$D_{x,l}[d_i^{k,l}(x,t) + h_i^{k,3}(x,t)] = 0, \quad D_{x,l}[W_{i,j}^{k,l}(x,t) + h_{i,j}^{k,4}(x,t)] = 0.$$

Из этих уравнений при начальных условиях из (14) однозначно определим функции $d_i^{k,l}(x,t)$ и $W_{i,j}^{k,l}(x,t)$, а следовательно, в силу (11) однозначно определяются функции $Y^k(N^l)$ и $Z^k(N^l)$.

Уравнение относительно $\upsilon_k(x,t)$ имеет единственное гладкое решение (см. [2, 3, 11, 12]), удовлетворяющее условию $\|\upsilon_k(x,0)\| < \infty$.

Таким образом, решение уравнения (10) определено однозначно. Теорема доказана.

4. Решение итерационных задач. Итерационное уравнение (7) при $k=0,1$ является однородным, поэтому, согласно теореме 1, эти уравнения разрешимы в пространстве U, если функции $Y^k(N^1)$ и $Z^k(N^l)$ являются решениями уравнений

$$\partial_\tau Y_i^k(N^1) = \partial_{\zeta_l}^2 Y_i^k(N^l), \quad \partial_\tau Z_{ij}^k(N^1) = \partial_{\zeta_l}^2 Z_{ij}^k(N^l).$$

Решения этих уравнений при краевых условиях

$$Y_i^k(N^1)|_{\tau=0} = 0, \quad Y_i^k(N^1)|_{\zeta_l=0} = d_i^{k,l}(x,t), \quad Z_{ij}^k(N^1)|_{\tau=0} = 0, \quad Z_{ij}^k(N^1)|_{\zeta_l=0} = W_{ij}^{k,l}(x,t)$$

представимы в виде

$$Y_i^k(N_1) = d_i^{k,l}(x,t)\operatorname{erfc}\left(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{\tau}}\right), \quad Z_{ij}^k(N_1) = W_{ij}^{k,l}(x,t)\operatorname{erfc}\left(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{\tau}}\right), \tag{15}$$

где произвольные функции $d_i^{k,l}(x,t)$, $W_{ij}^{k,l}(x,t)$ удовлетворяют условиям

$$d_i^{k,l}(x,t)|_{x=l-1} = -\upsilon_{k,i}(l-1,t), \quad W_{ij}^{k,l}(x,t)|_{x=l-1} = -c_{ij}^k(l-1,t) - P_i^k(l-1).$$

Вычислим свободный член уравнения (7) при $k=2$, предварительно разложив свободный член $f(x,y,t)$ в ряд

$$f(x,y,t) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x,t)\psi_i(y,t).$$

В результате получим

$$F_2(M) = -T_1 u_0(M) + f(x,y,t) = -\langle D^1\upsilon_0(x,t) - f(x,t), \psi(y,t)\rangle -$$

$$-\sum_{l=1}^{2}\langle D^1 Y^0(N^1), \psi(y,t)\rangle - \langle D^3[C^0(x,t) + \Lambda(P^0(x))]\exp(\mu), \psi(y,t)\rangle - \sum_{l=1}^{2}\langle D^3 Z^0(N^l)\exp(\mu), \psi(y,t)\rangle,$$

$$f(x,t) = (f_1(x,t), f_2(x,t), \ldots).$$

Положим

$$D^1 v_{0i}(x,t) - f_i(x,t) = 0, \quad D^3[c_{ij}^0(x,t) + \Lambda(P_i^0(x))] = 0, \tag{16}$$

тогда

$$F_2(M) = -\sum_{l=1}^{2}\langle [D^1 Y^0(N^1) + D^3 Z^0(N^l)\exp(\mu)], \psi(y,t)\rangle.$$

Уравнение с такой правой частью разрешимо в пространстве U, если функции $Y_i^2(N^l)$ и $Z_{ij}^2(N^l)$ являются решениями уравнений

$$T_0 Y_i^2(N^l) = -D^1 Y_i^0(N^1), \quad T_0 Z_{ij}^2(N^l) = -D^3 Z_{ij}^0(N^l).$$

Рассмотрим уравнения (16). Первое уравнение имеет решение, удовлетворяющее условию (см. [2, 3, 11, 12]) $\|v_0(x,0)\| < \infty$.

Снимая вырожденность второй системы из (16), положим

$$\overline{\overline{C^0(x,t)\Lambda(0) - \Lambda(t)C^0(x,t)}}|_{t=0} = 0 \quad (\text{т.е. } (\lambda_i(0) - \lambda_j(t))c_{i,j}^0(x,t)|_{t=0} = 0, \quad i \neq j). \tag{17}$$

Кроме того, из начального условия (14) найдём

$$\overline{C^0(x,t)}|_{t=0} = -[\Lambda(v_0(x,t)) + \Lambda(\overline{\overline{C^0(x,t)}}\,1) + \Lambda(P^0(x))]_{t=0}, \tag{18}$$

или в координатной форме это равенство с учётом (17) можно записать в виде

$$c_{ii}^0(x,t)|_{t=0} = -[v_{0,i}(x,0) + P_i^0(x)].$$

Соотношения (17), (18) используются в начальных условиях второй системы (16), и она однозначно разрешима.

Перейдём к следующему итерационному уравнению при $k = 3$, его свободный член на основании вычислений (9) запишется в виде

$$F_3(M) = -T_1 u_1(M) + L_\zeta u_0(M) = -\Big\langle D^1 v_1(x,t) + \sum_{l=1}^{2} D^1 Y^1(N^l), \psi(y,t)\Big\rangle -$$

$$- \langle D^3(C^1(x,t) + \Lambda(P^1(x)))\exp(\mu), \psi(y,t)\rangle - \sum_{l=1}^{2}\langle D^3 Z^1(N^l)\exp(\mu), \psi(y,t)\rangle +$$

$$+ a(x)\sum_{l=1}^{2}\langle \partial_{\zeta_l} D_{x,l}[Y^0(N^l) + Z^0(N^l)\exp(\mu)], \psi(y,t)\rangle.$$

Обеспечивая разрешимость этого уравнения, на основании (15) положим

$$D^1 v_{1,i}(x,t) = 0, \quad D_{x,l} d_i^{0,l}(x,t) = 0, \quad D_{x,l} W_{i,j}^{0,l}(x,t) = 0, \quad D^3(c_{i,j}^1(x,t) + P_i^1(x)) = 0. \tag{19}$$

Из первого уравнения в (19) найдём, что $v_1(x,t) = 0$. Решая второе и третье уравнения при условиях $d_i^{0,l}(x,t)|_{t=0} = -v_{0,i}(x,0)$ и $W_{i,j}^{0,l}(x,t)|_{t=0} = -c_{i,j}^0(x,0)$, определим $d_i^{0,l}(x,t)$ и $W_{i,j}^{0,l}(x,t)$. Четвёртое уравнение разрешимо, если выполняется равенство

$$(\lambda_i(0) - \lambda_j(t))c_{ij}^1(x,0)|_{t=0} = 0 \quad \text{для всех} \quad i \neq j.$$

Из начального условия (14) находим, что

$$\overline{C^1(x,t)|_{t=0}} = -\Lambda(v_1(x,0)) - \Lambda(P^1(x)) \quad (c_{ii}^1(x,t)|_{t=0} = -v_{1,i}(x,0) - P_i^1(x)).$$

Ниже будет показано, что $P_i^k(x) = 0$ при нечётном k. Уравнение относительно $c_{ij}^1(x,t)$ является однородным, поэтому $c_{ij}^1(x,t) = 0$. Свободный член итерационного уравнения при $k = 3$ примет вид

$$F_3(M) = -\sum_{l=1}^{2}\langle [D^1 Y^1(N^l) + D^3 Z^1(N^l)\exp(\mu)], \psi(y,t)\rangle,$$

по теореме 1 оно имеет решение, представимое в виде (8) с номером $k = 3$.

В следующем шаге $(k = 4)$ свободный член итерационного уравнения запишется в виде

$$F_4(M) = -T_1 u_2(M) + L_\varsigma u_1 - \partial_t u_0 = -\langle D^1 v_2(x,t) + \partial_t v_0(x,t) + A^{\mathrm{T}}(t) v_0(x,t), \psi(y,t)\rangle -$$

$$-\sum_{l=1}^{2} \langle D^1 Y^2(N^l) + D^3 Z^2(N^l)\exp(\mu), \psi(y,t)\rangle - \langle D^3[C^2(x,t) + \Lambda(P^2(x))]\exp(\mu), \psi(y,t)\rangle +$$

$$+ a(x)\sum_{l=1}^{2} \langle \partial_{\zeta_l} D_{x,l}[Y^1(N^l) + Z^1(N^l)\exp(\mu)], \psi(y,t)\rangle -$$

$$-\sum_{l=1}^{2} \langle \partial_t Y^0(N^l) + \partial_t Z^0(N^l)\exp(\mu) + A^{\mathrm{T}}(t) Y^0(N^l) + A^{\mathrm{T}}(t) Z^0(N^l)\exp(\mu), \psi(y,t)\rangle -$$

$$-\langle [\partial_t C^0(x,t) + A^{\mathrm{T}}(t) C^0(x,t) + A^{\mathrm{T}}(t)\Lambda(P^0(x))]\exp(\mu), \psi(y,t)\rangle.$$

Обеспечивая разрешимость итерационного уравнения при $k = 4$, положим

$$D^1 v_{2,i}(x,t) = -[\partial_t v_{0,i} + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ji}(t) v_{0,i}(x,t)],$$

$$D^3[c^2_{ij}(x,t) + P^2_i(x)] = -[\partial_t c^0_{ii}(x,t) + \alpha_{ii}(t) c^0_{ii}(x,t) + \alpha_{ii}(t) P^0_i(x)],$$

$$D_{x,l} d^{1,l}_i(x,t) = 0, \quad D_{x,l} W^{1,l}_{ij}(x,t) = 0. \tag{20}$$

Первое уравнение позволяет определить функцию $v_2(x,t)$. Снимая вырожденность второго уравнения, положим

$$(\lambda_i(0) - \lambda_j(t)) c^2_{ij}(x,t)|_{t=0} = 0 \quad \text{для всех} \quad i \neq j, \quad -(\partial_t c^0_{ii} + \alpha_{ii}(t) c^0_{ii}(x,t) + \alpha_{ii}(t) P^0_i(x))|_{t=0} = 0.$$

Последние соотношение обеспечивается выбором компонент вектора $P^0(x) = (P^0_1(x), P^0_2(x), \ldots)$:

$$P^0_i(x) = -\left.\frac{\partial_t c^0_{ii}(x,t) + \alpha_{ii}(t) c^0_{ii}(x,t)}{\alpha_{ii}(t)}\right|_{t=0}.$$

Уравнения относительно функций $d^{1,l}_i(x,t)$ и $W^{1,l}_{ij}(x,t)$ из (20) решаются при нулевых начальных условиях:

$$d^{1,l}_i(x,t)|_{x=l-1} = -v_{1,i}(l-1,t) = 0, \quad W^{1,l}_{ij}(x,t)|_{x=l-1} = -c^1_{ij}(l-1,t) - P^1_i(l-1) = 0,$$

здесь учтено, что $P^1_i(x) = 0$, поэтому $Y^1(N^l) = 0$, $Z^1(N^l) = 0$, а следовательно, $u_1(M) = 0$.

Свободный член $F_4(M)$ на основании (20) примет вид

$$F_4(M) = -\sum_{l=1}^{2} \{\langle D^1 Y^2(N^l) + D^3 Z^2(N^l)\exp(\mu), \psi(y,t)\rangle +$$

$$+ \langle \partial_t Y^0(N^l) + A^T(t) Y^0(N^l) + [\partial_t Z^0(N^l) + A^T(t) Z^0(N^l)]\exp(\mu), \psi(y,t)\rangle\} \in G_1 \bigoplus G_3,$$

по теореме 1 итерационное уравнение при $k = 4$ разрешимо в U.

Рассмотрим ещё одно итерационное уравнение при $k=5$, свободный член которого запишется в виде

$$F_5(M) = -T_1 u_3(M) + L_\zeta u_2(M) - \partial_t u_1 = -\langle D^1 \upsilon_3(x,t) + \partial_t \upsilon_1(x,t) + A^{\mathrm{T}}(t)\upsilon_1(x,t), \psi(y,t)\rangle -$$
$$- \sum_{l=1}^{2} \langle D^1 Y^3(N^l) + D^3 Z^3(N^l)\exp(\mu), \psi(y,t)\rangle - \langle D^3[C^3(x,t) + \Lambda(P^3(x))], \psi(y,t)\rangle +$$
$$+ a(x)\sum_{l=1}^{2} \langle \partial_{\zeta_l} D_{x,l}[Y^2(N^l) + Z^2(N^l)\exp(\mu)], \psi(y,t)\rangle - \sum_{l=1}^{2} \langle \partial_t Y^1(N^l) +$$
$$+ \partial_t Z^1(N^l)\exp(\mu) + A^{\mathrm{T}}(t)[Y^1(N^l) + Z^1(N^l)\exp(\mu)], \psi(y,t)\rangle -$$
$$- \langle \partial_t C^1(x,t) + A^{\mathrm{T}}(t)[C^1(x,t) + \Lambda(P^1(x))], \psi(y,t)\rangle.$$

По теореме 1 итерационное уравнение при $k=5$ разрешимо, если

$$D^1 \upsilon_{3i}(x,t) = -\partial_t \upsilon_{1i}(x,t) - \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{ki} \upsilon_{1k}(x,t),$$
$$D^3[C^3(x,t) + \Lambda(P^3(x))] = \partial_t C^1(x,t) + A^{\mathrm{T}}(t)[C^1(x,t) + \Lambda(P^1(x))],$$
$$\partial_{\zeta_l} D_{x,l} Y^2(N^l) = 0, \quad \partial_{\zeta_l} D_{x,l} Z^2(N^l) = 0. \tag{21}$$

Поскольку $C^1(x,t) = 0$, то, обеспечивая разрешимость второго уравнения в (21), положим $P^1(x) = 0$. Далее, аналогичным образом последовательно определим коэффициенты частичной суммы

$$u_{n,\varepsilon}(M) = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k u_{2k}(M).$$

5. Оценка остаточного члена. Подставим выражение

$$\tilde{u}(M,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{n+1} \varepsilon^k u_{2k}(M) - \varepsilon^{n+1} u_{2(n+1)}(M) + \varepsilon^{n+1} R_\varepsilon(M) \tag{22}$$

в расширенную задачу (5). Тогда с учётом итерационных задач (7) получим относительно остаточного члена задачу

$$\tilde{L}_\varepsilon R_\varepsilon(M) = g_{\varepsilon,n}(M), \quad R_\varepsilon(M)|_{t=\tau=\mu=0}(M) = R_\varepsilon(M)|_{x=l-1,\zeta_l=0}(M) = 0, \tag{23}$$

где

$$g_{\varepsilon,n}(M) = -T_1 u_{2n}(M) - \partial_t u_{2n-2}(M) + L_x u_{2n-4}(M) - \tilde{L}_\varepsilon u_{2(n+1)}(M). \tag{24}$$

В соотношениях (23), (24) проведём сужение посредством регуляризующих функций $\theta = \chi(x,t,\varepsilon)$. Тогда в силу тождества (6) для $R_{\varepsilon,n}(x,t) \equiv R_\varepsilon(M)$ получим задачу

$$L_\varepsilon R_{\varepsilon,n}(x,t) = g_{\varepsilon,n}(x,t), \quad R_{\varepsilon,n}(x,t)|_{t=0} = R_{\varepsilon,n}(x,t)|_{x=l-1} = 0. \tag{25}$$

Из самого построения функций $u_k(M)$ и тождества (6) вытекает ограниченность правой части $g_{\varepsilon,n}(x,t) \equiv g_{\varepsilon,n}(M)|_{\theta=\chi(x,t,\varepsilon)}$ уравнения задачи (25). При достаточно малых $\varepsilon > 0$ оператор L_ε удовлетворяет всем условиям принципа максимума [13, с. 22], поэтому, следуя [14], получаем оценку $\|R_{\varepsilon,n}(x,t)\| < c$. Из (22) имеем оценку

$$\|\tilde{u}(M) - u_{n,\varepsilon}(M)\|_{\theta=\chi(x,t,\varepsilon)} < c\varepsilon^{n+1}, \tag{26}$$

где постоянная c не зависит от $\varepsilon > 0$, $n = 0,1,2,\ldots$

Теорема 4. *Пусть выполнены предположения 1), 2). Тогда частичная сумма (22), полученная описанным выше методом при $\theta = \chi(x,t,\varepsilon)$, является асимптотическим решением задачи (1), т.е. при достаточно малых $\varepsilon > 0$ и всех $n = 0,1,2,\ldots$ справедлива оценка (26).*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ломов С.А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М., 1981.
2. *Ломов С.А.* О модельном уравнении Лайтхилла // Сб. науч. тр. МО СССР. 1964. № 54. С. 74–83.
3. *Ломов С.А., Ломов И.С.* Основы математической теории пограничного слоя. М., 2011.
4. *Ломов С.А.* Степенной пограничный слой в задачах с сингулярным возмущением // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1966. Т. 30. Вып. 3. С. 525–572.
5. *Коняев Ю.А.* Построение точного решения некоторых сингулярно возмущённых задач для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений со степенным пограничным слоем // Мат. заметки. 2006. Т. 79. Вып. 6. С. 950–954.
6. *Коняев Ю.А.* Сингулярно возмущённые задачи с двойной особенностью // Мат. заметки. 1997. Т. 62. Вып. 4. С. 494–501.
7. *Omuraliev A.S., Abylaeva E.D.* Ordinary differential equations with power boundery layers // J. of Math. Sci. 2019. V. 242. № 3. P. 427–431.
8. *Цянь Сюэ-Сень.* Метод Пуанкаре–Лайтхилла–Го // Проблемы механики. 1959. Вып. 2. С. 7–62.
9. *Понтрягин Л.С.* Избранные труды. Т. 2. М., 1988.
10. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1962.
11. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1968.
12. *Глушко В.П.* Линейные вырождающиеся дифференциальные уравнения. Воронеж, 1972.
13. *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н., Солонников В.А.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967.
14. *Омуралиев А.С.* Регуляризация двумерной сингулярно возмущенной параболической задачей // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2006. Т. 46. № 8 С. 1423–1532.

Кыргызско-турецкий университет “Манас”,
г. Бишкек, Киргизия

Поступила в редакцию 22.03.2019 г.
После доработки 12.03.2020 г.
Принята к публикации 13.10.2020 г.