

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ОБОБЩЁННОЙ СИСТЕМЫ КОШИ–РИМАНА В МНОГОМЕРНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

© 2021 г. Э. Н. Сатторов, Ф. Э. Эрмаматова

Рассматривается задача восстановления решений обобщённой системы Коши–Римана в многомерной пространственной ограниченной области по их значениям на куске границы этой области, т.е. строится приближённое решение этой задачи, основанное на методе матрицы Карлемана–Ярмухамедова.

DOI: 10.31857/S0374064121010088

1. Введение и постановка задачи. В настоящей работе продолжается исследование, начатое в работе [1]. Рассматривается задача восстановления решения системы уравнений [2, 3]

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_i} + H_i \right) = 0,$$

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_k} - \frac{\partial F_k}{\partial x_j} - H_k F_j + H_j F_k = 0 \quad (k, j = \overline{1, n}), \quad (1.1)$$

представляющей собой n -мерный аналог обобщённой системы Коши–Римана, по его известным значениям на части границы области, т.е. задача Коши. Когда все H_i тождественно нулевые, система (1.1) является системой Рисса [4, с. 106]. Система Коши–Римана в физических приложениях привела к далеко идущим обобщениям [5–7], являющимися одними из основных элементов интенсивного взаимодействия почти всех разделов математики и теоретической физики как с кватернионным параметром, так и в суперанализе в квантовой теории поля.

Пусть $\mathbb{R}^n$ – вещественное n -мерное евклидово пространство,

$$x = (x_1, \dots, x_n), \quad y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \quad x' = (x_2, \dots, x_n), \quad y' = (y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n-1},$$

$$s = \alpha^2 = |y' - x'|^2 = (y_2 - x_2)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2, \quad r^2 = (y_1 - x_1)^2 + s = |y - x|^2, \quad \tau = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2\rho},$$

$$\rho > 1, \quad G_\rho = \{y : |y'| < \tau y_1, \quad y_1 > 0\}, \quad \partial G_\rho = \{y : |y'| = \tau y_1, \quad y_1 > 0\}, \quad \overline{G}_\rho = G_\rho \cup \partial G_\rho,$$

ε , ε_1 и ε_2 – достаточно малые постоянные положительные числа,

$$G_\rho^\varepsilon = \{y : |y'| < \tau(y_1 - \varepsilon)\}, \quad \partial G_\rho^\varepsilon = \{y : |y'| = \tau(y_1 - \varepsilon)\}, \quad \overline{G}_\rho^\varepsilon = G_\rho^\varepsilon \cup \partial G_\rho^\varepsilon,$$

$$\mathbb{C} = \{\varsigma : \varsigma = \xi + i\eta, \quad -\infty < \xi < \infty, \quad -\infty < \eta < \infty\}.$$

Через Ω_ρ будем обозначать ограниченную односвязную область в $\mathbb{R}^n$, граница $\partial\Omega_\rho$ которой состоит из части поверхности конуса $\overline{G}_\rho$ и лежащего в этом конусе гладкого куска S поверхности. Случай $\rho = 1$ предельный. В этом случае ∂G_1 – плоскость $\mathbb{R}^{n-1}$ и G_1 – полупространство $y_1 > 0$, Ω_1 – односвязная ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с границей, состоящей из части плоскости $\mathbb{R}^{n-1}$ и гладкого куска поверхности S , лежащего в полупространстве $y_1 \geq 0$, $\overline{\Omega}_\rho = \Omega_\rho \cup \partial\Omega_\rho$, S_0 – внутренние точки поверхности S . Пусть $A(\Omega_\rho)$ – совокупность вектор-функций класса $C^1(\Omega_\rho)$, удовлетворяющих эллиптической системе (1.1) и непрерывных на $\overline{\Omega}_\rho = \Omega_\rho \cup \partial\Omega_\rho$, $H = (H_1, H_2, \dots, H_n)$ – заданный постоянный вектор.

Несложно показывается, что каждая компонента F_i вектор-функции

$$F(x) = (F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x)),$$

являющейся решением системы (1.1), удовлетворяет уравнению

$$\Delta F_i - |H|^2 F_i = 0. \quad (1.2)$$

Введём следующие обозначения:

$$\begin{aligned} L_{kj}(X_1, X_2, \dots, X_n; H)F &= L_{jk}(X_1, X_2, \dots, X_n; H)F = \\ &= (X_j - H_j)F_k - (X_k - H_k)F_j + \delta_{kj}(X_i + H_i)F_i \quad (k \leq j), \\ L_k(X, H)F &= (L_{k1}F, L_{k2}F, \dots, L_{kn}F) \quad (k = \overline{1, n}), \end{aligned}$$

где δ_{ij} – символ Кронекера, а $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$. В этих обозначениях систему (1.1) можно записать в виде

$$L_k\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}; H\right)F = 0 \quad (k = \overline{1, n}). \quad (1.3)$$

Для каждого векторного оператора L_k определяем сопряжённый к нему векторный оператор L_k^* равенством

$$U \cdot L_k\left(\frac{\partial}{\partial x}; H\right)F + F \cdot L_k^*\left(\frac{\partial}{\partial x}; H\right)U = \operatorname{div} F_k,$$

где $\partial/\partial x = (\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n)$. Тогда нетрудно получить, что имеет место равенство

$$\begin{aligned} L_k^*\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}; H\right)U &= \\ &= L_k\left(-\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, -\frac{\partial}{\partial x_{k-1}}, \frac{\partial}{\partial x_k}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}; -H_1, \dots, -H_k, H_{k+1}, \dots, H_n\right)U. \end{aligned}$$

Пусть $U^k = (u_1^k, \dots, u_n^k)$ – фундаментальное решение системы [2, 3]

$$L_k^*\left(\frac{\partial}{\partial x}; H\right)U^k = 0,$$

где функции u_k^i определяются равенствами

$$u_i^i(y, x) = \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial x_i} + H_i \Phi_0\right) \quad \text{и} \quad u_k^i(y, x) = \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial x_k} - H_k \Phi_0\right) \operatorname{sign}(k - i), \quad i \neq k, \quad (1.4)$$

Φ_0 – классическое фундаментальное решение уравнения (1.2).

Постановка задачи (задача Коши). Известны данные Коши решения системы (1.3) на поверхности S :

$$F(y) = f(y), \quad y \in S, \quad (1.5)$$

где $f(y) = (f_1(y), \dots, f_n(y))$ – заданная на S непрерывная вектор-функция. Требуется восстановить функцию $F(x)$ в области Ω_ρ , исходя из заданной на части S границы этой области функции f , т.е. решить задачу аналитического продолжения решения обобщённой системы Коши–Римана в многомерную евклидову пространственную ограниченную область по значениям решения на гладком куске S границы области.

Задача Коши для обобщённой системы Коши–Римана, как и многие задачи Коши для нахождения регулярных решений эллиптических уравнений и систем, в общем случае оказывается неустойчивой относительно равномерно малых изменений начальных данных. Таким образом, эти задачи некорректно поставлены [8, с. 39].

При исследовании задачи Коши для системы (1.1) будем априори предполагать существование её решения. Более того, предполагается, что решение принадлежит некоторому заданному подмножеству функционального пространства, обычно компактному [9, с. 4]. Единственность решения следует из общей теоремы Холмгрена [10, с. 58]. Метод получения указанных результатов работы основан на построении в явном виде для обобщённой системы Коши–Римана матрицы фундаментального решения, зависящей от положительного параметра и исчезающей к нулю при стремлении параметра к бесконечности на $\partial\Omega_\rho \setminus S$, когда полюс фундаментального решения лежит в полупространстве $y_1 > 0$. Следуя М.М. Лаврентьеву и Ш. Ярмухамедову в их исследованиях по задаче Коши для уравнений Лапласа и Гельмгольца, матрицу фундаментальных решений с указанным свойством назовём матрицей Карлемана–Ярмухамедова для полупространства [9, с. 34; 11; 12]. После построения матрицы Карлемана–Ярмухамедова в явном виде формула продолжения, а также регуляризация решения задачи Коши записываются в виде обобщённой пространственной интегральной формулы Коши.

Если вместо функции $f(y)$ заданы её приближения $f_\delta(y)$ с точностью $\delta \in (0, 1)$ в метрике пространства $C(S)$, а также число B – размер компакта, которому принадлежат решения, то речь идёт о построении семейства вектор-функций $F(x, f_\delta) = F_{\sigma\delta}$ (регуляризация), сходящихся к точному решению задачи (1.3), (1.5) в области Ω_ρ при подходящем выборе параметра регуляризации $\sigma = \sigma(\delta)$ и $\delta \rightarrow 0$ [9].

Следуя [13], функцию $F_{\sigma\delta}$ назовём регуляризованным решением задачи Коши для обобщённой системы Коши–Римана. Регуляризованное решение определяет устойчивость метода приближённого решения задачи.

На протяжении последних десятилетий сохранился интерес к классическим некорректным задачам математической физики. Это направление в исследовании свойств решений задачи Коши для уравнения Лапласа начато работами [11, 14–16] и развивалось впоследствии в работах [17–27].

2. Построение матрицы Карлемана–Ярмухамедова. В данной работе на основе результатов работ [9, с. 34; 11; 12] по задаче Коши для уравнений Лапласа и Гельмгольца построена матрица Карлемана–Ярмухамедова в явном виде и на её основе – регуляризованное решение задачи Коши для системы (1.3). В [28] приведены теоремы существования матрицы Карлемана и критерий разрешимости для более широкого класса краевых задач для эллиптических систем. Ранее в [17, 28] доказано, что матрица Карлемана существует во всякой задаче Коши для решений эллиптических систем, если только данные Коши задаются на граничном множестве положительной меры. Поскольку в данной работе речь идёт о явных формулах, то построение матрицы Карлемана–Ярмухамедова в элементарных и специальных функциях представляет значительный интерес.

Функция Карлемана задачи Коши для уравнения Лапласа и для уравнений, близких к нему, в случае, если дополнение границы области до S – часть поверхности конуса, построена в [11]. Матрицу Карлемана для уравнения Коши–Римана в случае, когда S – произвольное множество положительной меры, построил Л.А. Айзенберг [17]. Развивая идею С.Е. Мергеляна [16], указавшего способ построения функции Карлемана в задаче Коши для уравнения Лапласа в случае, когда S – кусок с гладким краем границы односвязной области, на основе теорем об аппроксимации в [13] построена матрица Карлемана для эллиптических систем. В монографиях Л.А. Айзенберга [29] и Н.Тарханова [30] рассматривается построение формулы Карлемана в задаче Коши в комплексном анализе и для системы с инъективным символом, в этих же монографиях приведена обширная библиография.

В том случае, когда $n = 2$, $H = 0$, рассматриваемая система (1.3) является обобщённой системой Коши–Римана, теория которой разработана И.Н. Векуа [31], а формула продолжения решения по её значениям на куске границы получена Т. Ишанкуловым [32]. Если $n = 3$, то $F(y)$ будет обобщённым потенциальным вектором, и в этом случае система (1.3) (ряд аналитических фактов) изучена [33], а формула продолжения решения в ограниченной области по её

значениям на куске границы и аналог теоремы Фока–Куни найдена в работе [22]. В настоящей работе утверждается, что все результаты, полученные в трёхмерном случае в [22], остаются справедливыми для системы (1.3) и в бесконечной области типа слоя. Именно в этом случае явно строится фундаментальная матрица, которая является ядром обобщённых интегралов Коши и типа Коши.

Дадим следующее

Определение 2.1. Матрица $M_0(y, x; H)$ называется *матрицей фундаментальных решений* системы (1.3), если

$$M_0(y, x; H) = \|L_k^*(\alpha; 0)U^k\|,$$

где вектор-функция U^k определяется согласно (1.4).

Следуя [11], приведём

Определение 2.2. Матрицей Карлемана–Ярмухамедова задачи (1.3), (1.5) называется $n \times n$ -матрица $M_\sigma(y, x; H)$, удовлетворяющая следующим двум условиям:

1) имеет место равенство $M_\sigma(y, x; H) = M_0(y, x; H) + G_\sigma(y, x; H)$, где σ – положительный числовой параметр, матрица $G_\sigma(y, x; H)$ по переменной y удовлетворяет системе (1.3) всюду в области Ω , а $M_0(y, x; H)$ – матрица фундаментальных решений уравнений (1.3);

2) при каждом фиксированном $x \in \Omega_\rho$ справедливо неравенство $\int_{\partial\Omega_\rho} |M_\sigma(y, x; H)| dS_y \leq \varepsilon(\sigma)$, где $\varepsilon(\sigma) \rightarrow 0$ при $\sigma \rightarrow \infty$; здесь и далее $|M_\sigma|$ означает евклидову норму матрицы $M_\sigma = \|M_{ij}\|$, т.е. $|M_\sigma| = (\sum_{ij=1}^n M_{ij}^2)^{1/2}$, в частности, $|F| = (\sum_i^n F_i^2)^{1/2}$ для вектора $F = (F_1, F_2, \dots, F_n)$.

Для $F(y) \in A(\Omega_\rho)$ справедлива обобщённая пространственная интегральная формула Коши [2]

$$\int_{\partial\Omega_\rho} M_0(y, x; H) F(y) dS_y = \begin{cases} 0, & x \notin \overline{\Omega}_\rho, \\ F(x), & x \in \Omega_\rho, \end{cases}$$

а также имеют место аналог интеграла типа Коши и формулы скачков для предельных значений этого интеграла [3].

Поскольку матрица Карлемана–Ярмухамедова отличается от матрицы фундаментальных решений на решение транспонированной системы, то обобщённая интегральная формула Коши остаётся справедливой, если в ней заменить фундаментальное решение на матрицу Карлемана.

С целью построения приближённого решения задачи (1.3), (1.5) рассмотрим матрицу

$$M_\sigma(y, x; H) = \|L_k^*(\alpha; 0)V^k\|, \quad (2.1)$$

где $V^k = (v_1^1, \dots, v_n^k)$ определяется равенствами

$$v_i^i(y, x) = \left(\frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial x_i} + H_i \Phi_\sigma \right) \text{ и } v_k^i(y, x) = \left(\frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial x_k} - H_k \Phi_\sigma \right) \text{ sign}(k - i) \text{ при } i \neq k, \quad (2.2)$$

а функция $\Phi_\sigma(y, x; \lambda)$ при $s \geq 0$, $v \geq 1$ – следующим равенством:

$$C_n K(x_1) \Phi_\sigma(y, x; \lambda) = \frac{\partial^{m-1}}{\partial s^{m-1}} \int_0^\infty \text{Im} \left[\frac{K(w)}{w} \right] \frac{\psi(\lambda u)}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}} du, \quad w = i\sqrt{u^2 + \alpha^2} + y_1, \quad (2.3)$$

где

$$\psi(\lambda u) = \begin{cases} u J_0(\lambda u), & n = 2m, \quad m \geq 1, \\ \cos(\lambda u), & n = 2m + 1, \quad m \geq 1, \end{cases}$$

$J_0(\lambda u)$ – функция Бесселя нулевого порядка, здесь берётся регулярная ветвь аналитической функции $J_0(\lambda)$ в $C^{(n)}(\Omega)$, $n = 2m$, вещественная при $\lambda > 0$, $\lambda = |H|^2$,

$$C_n = \begin{cases} (-1)^m 2^{-1} (m-2)! (n-2) \omega_n, & n = 2m, \quad m \geq 2, \\ (-1)^m 2^{-2n+1} (m-1)! (n-2) \pi \omega_n, & n = 2m + 1, \quad m \geq 1, \end{cases}$$

ω_n – площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$.

Пусть $K(w)$ – целая функция комплексного переменного, вещественная при вещественном w ($w = u + iv$, где $u, v \in \mathbb{R}$) и $K(u) \neq \infty$, $|u| < \infty$, удовлетворяющая условиям

$$\sup_{v \geq 1} |K^{(p)}(u + iv) \exp(v)| \operatorname{Im} \lambda| = M(u) < \infty, \quad p = 0, 1, \dots \quad (2.4)$$

При вещественном w из вещественности $K(w)$ вытекает равенство $\overline{K(\overline{w})} = K(w)$. Так как

$$\operatorname{Im} \left(\frac{K(w)}{w} \right) = \frac{1}{2i} \left\{ \frac{K(w)}{w} - \frac{K(\overline{w})}{\overline{w}} \right\} = \frac{\overline{w}K(w) - wK(\overline{w})}{2i(r^2 + u^2)} = \frac{(y_1 - x_1) \operatorname{Im} K(w) - \sqrt{s + u^2} \operatorname{Re} K(w)}{r^2 + u^2},$$

то формула (2.3) принимает вид

$$C_n K(x_1) \Phi(y, x; \lambda) = \frac{\partial^{m-1}}{\partial s^{m-1}} \int_0^\infty \left\{ \frac{(y_1 - x_1) \operatorname{Im} K(w)}{\sqrt{s + u^2}} - \operatorname{Re} K(w) \right\} \frac{\psi(\lambda u)}{r^2 + u^2} du. \quad (2.5)$$

Из равенств (2.4) и (2.5) следует, что при $y \neq x$ интеграл в (2.3) абсолютно сходится.

Если $K(w) \equiv 1$, то функция $\Phi_\sigma(y, x; \lambda)$ представляет собой классическое фундаментальное решение уравнения Гельмгольца, т.е.

$$\Phi_\sigma(y, x; \lambda) \equiv \Phi_0(y, x; \lambda) = C_n \frac{1}{r^{n-2}} e^{-\lambda r}.$$

Согласно [22] можно показать, что

$$\frac{1}{r^{n-2}} e^{-\lambda r} = \frac{\partial^{m-1}}{\partial s^{m-1}} \int_0^\infty \frac{\psi(\lambda u)}{r^2 + u^2} du.$$

В [12] доказана

Лемма 2.1. Функция $\Phi_\sigma(y, x; \lambda)$, определённая формулой (2.3), представима в виде

$$\Phi_\sigma(y, x; \lambda) = \Phi_0(r; \lambda) + g_\sigma(y, x; \lambda),$$

где $\Phi_0(r; \lambda)$ – классическое фундаментальное решение уравнения (1.2):

$$\Phi_0(r; \lambda) = A_m \left(\frac{\lambda}{2} \right)^{n/2-1} K_{-1+n/2}(\lambda r), \quad A_{2m} = (-1)^m 2^{m-1}, \quad A_{2m+1} = (-1)^m 2^{-m-1/2},$$

$K_0(\lambda)$ – функция Макдональда [34, 35], $g_\sigma(y, x; \lambda)$ – регулярные решения уравнения (1.2) по y в $\mathbb{R}^n$ для $\lambda \in C^n(\Omega)$.

Для системы (1.3) справедлива аналогичная

Лемма 2.2. Матрица $M_\sigma(y, x; H)$, определённая формулой (2.2), является матрицей Карлемана–Ярмухамедова задачи (1.3), (1.5), т.е. представима в виде

$$M_\sigma(y, x; H) = M_0(r; \lambda) + G_\sigma(y, x; H), \quad (2.6)$$

где $G_\sigma = \|G_{ij\sigma}(y, x, \sigma)\|_{n \times n}$ – матрица, определённая для всех значений y, x и удовлетворяющая по переменной y системе (1.3) во всём пространстве $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Представление (2.6) следует из леммы 2.1 и определения 2.1. Так как

$$\Delta \frac{\partial}{\partial y} g_\sigma - \lambda^2 g_\sigma = 0,$$

то отсюда вытекает, что матрица $G_\sigma(y, x; H)$ удовлетворяет уравнению (1.3), т.е. она является регулярным решением по переменной y , включая и точку $y = x$.

Из формулы (2.3) видим, что на ∂G_ρ ($y_1 = 0$) функция $\Phi_\sigma(y, x; \lambda)$ и её градиент $\nabla \Phi_\sigma(y, x; \lambda)$ при $\sigma \rightarrow \infty$ экспоненциально стремятся к нулю при всех $y_2, \dots, y_n$ и $x \in \mathbb{R}^n$, $x > 0$. Тогда при $\sigma \rightarrow \infty$ матрица $M_\sigma(y, x; H)$ также стремится к нулю при всех $y_2, \dots, y_n$ и $x \in \mathbb{R}^n$, $x > 0$. Согласно определению 2.1 матрица $M_\sigma(y, x; H)$, определённая формулой (2.1), является матрицей Карлемана–Ярмухамедова для области Ω и части ∂G_ρ . Лемма доказана.

3. Целая функция Миттаг-Лёффлера и некоторые её свойства. При решении задачи (1.3), (1.5) формула продолжения выражается через целую функцию Миттаг-Лёффлера, поэтому приведём без доказательства основные свойства этой функции. Они изложены в [36, гл. 3, § 2] с подробными доказательствами.

Целая функция Миттаг-Лёффлера определяется рядом

$$E_\rho(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{\Gamma(1 + n/\rho)}, \quad \rho > 0, \quad w \in \mathbb{C}, \quad E_1(w) = \exp(w),$$

где Γ – гамма-функция Эйлера. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что $\rho > 1$. Обозначим через $\gamma = \gamma(1, \beta)$, $0 < \beta < \pi/\rho$, $\rho > 1$, контур в комплексной плоскости w , пробегаемый в направлении неубывания $\arg w$ и состоящий из луча $\arg w = -\beta$, $|w| \geq 1$, дуги $-\beta \leq \arg w \leq \beta$, окружности $|w| = 1$ и луча $\arg w = \beta$, $|w| \geq 1$. Контур γ разбивает плоскость $\mathbb{C}$ на две односвязные бесконечные области Ω^- и Ω^+ , лежащие слева и справа от γ соответственно. Будем предполагать, что выполнены неравенства $\pi/(2\rho) < \beta < \pi/\rho$, $\rho > 1$.

При этих условиях справедливы следующие интегральные представления:

$$\begin{aligned} E_\rho(w) &= \rho \exp(w^\rho) + \psi_\rho(w), \quad w \in \Omega^+, \\ E_\rho(w) &= \psi_\rho(w), \quad E'_\rho(w) = \psi'_\rho(w), \quad w \in \Omega^-, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где

$$\psi_\rho(w) = \frac{\rho}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\exp(\varsigma^\rho)}{\varsigma - w} d\varsigma, \quad \psi'_\rho(w) = \frac{\rho}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\exp(\varsigma^\rho)}{(\varsigma - w)^2} d\varsigma. \quad (3.2)$$

Так как значение $E_\rho(w)$ вещественно при вещественном w , то

$$\operatorname{Re} \psi_\rho(w) = \frac{\psi_\rho(w) + \psi_\rho(\overline{w})}{2} = \frac{\rho}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\exp(\varsigma^\rho)(\varsigma - \operatorname{Re} w)}{(\varsigma - w)(\varsigma - \overline{w})} d\varsigma, \quad (3.3)$$

$$\operatorname{Im} \psi_\rho(w) = \frac{\psi_\rho(w) - \psi_\rho(\overline{w})}{2i} = \frac{\rho \operatorname{Im} w}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\exp(\varsigma^\rho)}{(\varsigma - w)(\varsigma - \overline{w})} d\varsigma, \quad (3.4)$$

$$\operatorname{Im} \frac{\psi'_\rho(w)}{\operatorname{Im} w} = \frac{\rho}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{2 \exp(\varsigma^\rho)(\varsigma - \operatorname{Re} w)}{(\varsigma - w)^2(\varsigma - \overline{w})^2} d\varsigma.$$

Всюду в дальнейшем в определении контура $\gamma(1, \beta)$ будем выбирать $\beta = \pi/(2\rho) + \varepsilon_2/2$, $\rho > 1$. Очевидно, что если

$$\frac{\pi}{2\rho} + \varepsilon_2 \leq |\arg w| \leq \pi, \quad (3.5)$$

то $w \in \Omega^-$ и $E_\rho(w) = \psi_\rho(w)$.

Обозначим

$$T_{k,p}(w) = \frac{\rho}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varsigma^p e^{\varsigma^p}}{(\varsigma - w)^k (\varsigma - \overline{w})^k} d\varsigma, \quad k = 1, 2, \dots, \quad p = 0, 1, \dots$$

При $\pi/(2\rho) + \varepsilon_2 \leq |\arg w| \leq \pi$ справедливы неравенства

$$|E_\rho(w)| \leq \frac{C_1}{1+|w|}, \quad |E'_\rho(w)| \leq \frac{C_2}{1+|w|^2}, \quad (3.6)$$

$$|T_{k,p}(w)| \leq \frac{C_3}{1+|w|^{2k}}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3.7)$$

где C_1, C_2, C_3 – постоянные, не зависящие от w . Выберем в равенстве (3.3) $\beta = \pi/(2\rho) + \varepsilon_2/2 < \pi/\rho$, $\rho > 1$. Тогда $E_\rho(w) = \psi_\rho(w)$, где $\psi_\rho(w)$ определяется в (3.2). При этом заметим, что $\cos \rho\beta < 0$ и интеграл сходится:

$$\int_\gamma |\zeta|^p \exp[\cos \rho\beta |\zeta|^\rho] d\zeta < \infty, \quad p = 0, 1, \dots \quad (3.8)$$

Далее, при достаточно большом $|w|$ ($w \in \Omega^+$ и $\bar{w} \in \Omega^-$) имеем

$$\min_{\zeta \in \gamma} |\zeta - w| \geq |w| \sin \frac{\varepsilon_2}{2}, \quad \min_{\zeta \in \gamma} |\zeta - \bar{w}| \geq |w| \sin \frac{\varepsilon_2}{2}. \quad (3.9)$$

Теперь из представлений (3.1) и разложений

$$\frac{1}{\zeta - w} = -\frac{1}{w} + \frac{\zeta}{w(\zeta - w)}, \quad \frac{1}{\zeta - \bar{w}} = -\frac{1}{w} + \frac{\zeta}{\bar{w}(\zeta - \bar{w})} \quad (3.10)$$

для больших $|w|$ следует, что

$$\left| E_\rho(w) - \Gamma^{-1} \left(1 - \frac{1}{\rho} \right) \frac{1}{w} \right| \leq \frac{\rho}{2\pi \sin(\varepsilon_2/2)} \frac{1}{|w|^2} \int_\gamma |\zeta| \exp[\cos \rho\beta |\zeta|^\rho] d\zeta \leq \frac{\text{const}}{|w|^2},$$

$$\Gamma^{-1} \left(1 - \frac{1}{\rho} \right) = \frac{\rho}{2\pi i} \int_\gamma \exp(\zeta^\rho) d\zeta.$$

Отсюда вытекает первое из неравенств (3.6). Из (3.8), (3.2) и разложения

$$\frac{1}{(\zeta - w)^2} = \frac{1}{w^2} - 2 \frac{\zeta}{w^2(\zeta - w)} + \frac{\zeta^2}{w^2(\zeta - w)^2}$$

при больших $|w|$ аналогично выводим неравенство

$$\left| E'_\rho(w) - \Gamma^{-1} \left(1 - \frac{1}{\rho} \right) \frac{1}{w^2} \right| \leq \frac{\text{const}}{|w|^3}.$$

Второе неравенство в (3.6) доказано.

При $k = 1, 2, \dots$ из разложения (3.10) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\zeta - w)^k} \frac{1}{(\bar{\zeta} - w)^k} &= \left[\frac{(-1)^k}{w^k} + \dots + \frac{\zeta^k}{w^k(\zeta - w)^k} \right] \left[\frac{(-1)^k}{\bar{w}^k} + \dots + \frac{\zeta^k}{w^k(\zeta - \bar{w})^k} \right] = \\ &= \frac{1}{|w|^{2k}} + \frac{-k}{|w|^{2k+1}(\zeta - w)} + \dots \end{aligned}$$

При больших $|w|$ первый член этого разложения является главным, поэтому из неравенств (3.8) и (3.9) вытекает оценка

$$\left| T_{k,p} - \Gamma^{-1} \left(1 - \frac{1}{\rho} \right) \frac{1}{|w|^{2k}} \right| \leq \frac{\text{const}}{|w|^{2k+1}}.$$

Отсюда получаем неравенство (3.7).

4. Формула продолжения и регуляризация по Лаврентьеву. В формуле (2.5) в качестве функции $K(w)$ выберем целую функцию Миттаг-Лёффлера

$$K(w) = \exp(aw^2)E_\rho(\sigma w),$$

где $\rho > 1$, $w = i\sqrt{u^2 + s} + y_1 - x_1$, $a > 0$ и $\sigma \geq 0$. Согласно (2.5), выделяя мнимые части, будем иметь

$$\begin{aligned} C_n \Phi_\sigma(y, x; \lambda) &= \frac{\partial^{m-1}}{\partial s^{m-1}} \int_0^\infty \operatorname{Im} \left[\frac{e^{aw^2} E_\rho(\sigma w)}{w} \right] \frac{\psi(\lambda u)}{\sqrt{s + u^2}} du = \\ &= e^{a(y_1 - x_1)^2} \frac{\partial^{m-1}}{\partial s^{m-1}} \int_0^\infty \varphi_\sigma(y, x, \lambda, u) \frac{e^{-as - au^2} \psi(\lambda u)}{u^2 + r^2} du, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_\sigma(y, x, \lambda, u) &= \left[\frac{(y_1 - x_1)}{\sqrt{u^2 + s}} \operatorname{Im} E_\rho(\sigma w) - \operatorname{Re} E_\rho(\sigma w) \right] \cos(\nu \sqrt{u^2 + s}) + \\ &+ \left[\operatorname{Im} E_\rho(\sigma w) + \frac{(y_1 - x_1)}{\sqrt{u^2 + s}} \operatorname{Re} E_\rho(\sigma w) \right] \sin(\nu \sqrt{u^2 + s}), \quad \nu = 2a(y_1 - x_1). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Если $\sigma = 0$ и $K(0) = E_\rho(0) = 1$, то функция $\Phi_0(y - x; \lambda)$ из (4.1) определяет классическое фундаментальное решение уравнения Гельмгольца. (Сходимость несобственного интеграла в правых частях равенств (4.1) обеспечивается присутствием в нём множителя $e^{-\sigma u^2}$.)

В точке $(0, 0, \dots, 0) \in \partial\Omega_\rho$ нормальная производная не определена. Так как функции $F(y)$, $\Phi_\sigma(y - x; \lambda)$, $M_\sigma(y - x; H)$ ($x \in \Omega_\rho$) имеют непрерывные частные производные вплоть до границы $\partial\Omega_\rho$, то

$$\frac{\partial F}{\partial n}(0) = \frac{\partial F}{\partial y_n}(0), \quad \frac{\partial M_\sigma}{\partial n}(0, x) = \frac{\partial M_\sigma}{\partial y_n}(0, x), \quad x \in \Omega_\rho.$$

При фиксированном $x \in \Omega_\rho$ обозначим через S^* ту часть S , на которой выполняется неравенство $|y'| = \tau y_1 - |x'| \geq \alpha$. Если $x = x_0 \in \Omega_\rho$, то $S = S^*$ (в этом случае $|y'| = \tau y_1 - |x'| = \tau y_1$, $\alpha = |y'|$ и неравенство означает, что точка y лежит внутри или на конусе $|y'| = \tau y_1 - |x'|$).

Предположим, что $F(y) \in A(\Omega_\rho)$ ограничена на $\partial\Omega_\rho$:

$$|F(y)| \leq B, \quad y \in T \equiv \partial\Omega_\rho \setminus S, \quad (4.3)$$

где B – заданное положительное число. В этом предположении верна обобщённая интегральная формула Коши

$$F(x) = \int_{\partial\Omega_\rho} M_\sigma(y, x; H) F(y) dS_y, \quad x \in \Omega_\rho. \quad (4.4)$$

Обозначим

$$F_\sigma(x) = \int_S M_\sigma(y, x; H) F(y) dS_y, \quad x \in \Omega_\rho, \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial F_\sigma}{\partial x_j}(x) = \int_S \frac{\partial M_\sigma}{\partial x_j}(y - x; H) F(y) dS_y, \quad x \in \Omega_\rho. \quad (4.6)$$

Замечание. Из-за присутствия величины $\alpha_0 = \sqrt{x_2^2 + \dots + x_n^2}$ в выражении $\beta = \tau y_1 - \alpha_0$ функция $\Phi_\sigma(y, x; \lambda)$, $y \in \partial\Omega_\rho$, не имеет производных по x_j ($j = \overline{2, n}$) в точках $x = x_0 = (x_1, 0, \dots, 0) \in \Omega_\rho$. Поэтому $\partial F_\sigma(x)/\partial x_j$ определены всюду в Ω_ρ , кроме точек $x = x_0$. Доопределим в точках $x = x_0$ производные следующим образом. В (4.5), (4.6) величину $\beta = \tau y_1$

полагаем равной $\beta = \tau y_1$ ($\gamma = \tau x_1$). Тогда функция $\Phi_\sigma(y - x; \lambda)$, $y \in \partial\Omega_\rho$, дифференцируема по переменной x всюду в Ω_ρ . Таким образом, при $x \neq x_0 \in \Omega_\rho$ производные $\partial F_\sigma(x)/\partial x_j$ определяются по формуле (4.6), в которой $\beta = \tau y_1 - \alpha_0$. Затем в правой части в (4.6) положим $\alpha_0 = 0$ ($\beta = \tau y_1$) и вычислим производные по формуле $\partial F_\sigma(x)/\partial x_j$.

Теорема 4.1. Пусть функция $F(y) \in A(\Omega_\rho)$ на части T границы $\partial\Omega_\rho$ удовлетворяет условию (4.3). Тогда для любых $x \in \Omega_\rho$ и $\sigma \geq \sigma_0 > 0$ справедливо неравенство

$$|F(x) - F_\sigma(x)| \leq C_1(\sigma, H) B e^{-\sigma x_n^2}, \quad \left| \frac{\partial F(x)}{\partial x_j} - \frac{\partial F_\sigma(x)}{\partial x_j} \right| \leq C_2(\sigma, H) B e^{-\sigma x_n^2}.$$

Доказательство. Из формулы (4.4) для любого $x \in \Omega_\rho$ следует, что

$$|F(x) - F_\sigma(x)| = J_\sigma^1(x), \quad \left| \frac{\partial F(x)}{\partial x_j} - \frac{\partial F_\sigma(x)}{\partial x_j} \right| = J_\sigma^2(x),$$

$$J_\sigma^1(x) = \int_T M_\sigma(y, x; H) F(y) dS_y, \quad J_\sigma^2(x) = \int_T \frac{\partial M_\sigma}{\partial x_j}(y, x; H) F(y) dS_y, \quad (4.7)$$

$$|J_\sigma^1(x)| \leq B T_\sigma^1(x), \quad T_\sigma^1(x) = \int_T |M_\sigma(y, x; H)| dS_y,$$

$$|J_\sigma^2(x)| \leq B T_\sigma^2(x), \quad T_\sigma^2(x) = \int_T \left| \frac{\partial M_\sigma}{\partial x_j} \right| dS_y. \quad (4.8)$$

Согласно (2.1), (2.2), воспользовавшись явным видом (4.1), (4.2) матрицы $M_\sigma(y, x; H)$, получаем неравенство

$$|M_\sigma(y, x; H)| = \left(\sum_{i,j=1}^n |M_{\sigma ij}| \right)^{1/2} \leq n \left[|H| |\Phi_\sigma| + \left| \frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial y_1} \right| + \dots + \left| \frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial y_n} \right| \right]. \quad (4.9)$$

Приведём, согласно [37], оценки для функций

$$\Phi_\sigma(y, x; \lambda), \quad \frac{\partial \Phi_\sigma(y, x; \lambda)}{\partial y_k}, \quad \frac{\partial^i}{\partial x_j^i} \frac{\partial \Phi_\sigma(y, x; \lambda)}{\partial y_k}.$$

Лемма 4.1. Пусть K – компакт в G_ρ , δ – расстояние от K до ∂G_ρ . Тогда для $\sigma \geq 0$ при $x \in K$, $y \in \mathbb{R}^n \setminus G_\rho$ ($|y'| \geq \tau y_1$) справедливы неравенства

$$|\Phi_\sigma(y, x; \lambda)| + \left| \frac{\partial}{\partial y_i} \Phi_\sigma(y, x; \lambda) \right| + \left| \frac{\partial^i}{\partial x_j^i} \frac{\partial}{\partial y_i} \Phi_\sigma(y, x; \lambda) \right| \leq \frac{C_3(\rho, \delta) r}{1 + \sigma \delta}, \quad r \geq \delta > 0, \quad i, j = \overline{1, n}. \quad (4.10)$$

Из леммы 4.1 следует утверждение теоремы 4.1. Действительно, если K – компакт в Ω_ρ , то $K \subset G_\rho$. Поэтому неравенства для функции $\Phi_\sigma(y, x; \lambda)$ и её производных, участвующих в формулировке леммы, сохраняются и в том случае, когда $x \in K \subset \Omega_\rho$ и $y \in \partial\Omega_\rho \setminus S \subset \partial G_\rho$ (в этом случае δ – расстояние от компакта $K \subset \Omega_\rho$ до $\partial\Omega_\rho$). Тогда получим необходимые оценки для (4.8).

Доказательство леммы 4.1. Нужно оценить интеграл справа в равенстве (4.1) и его производные. Для этого выберем $\varepsilon > 0$ таким, чтобы $K \subset \overline{G}_\rho^\varepsilon(|x'| \leq \tau(x_1 - \varepsilon))$, $\overline{G}_\rho^\varepsilon \subset G_\rho$. Так как расстояние от $\partial G_\rho^\varepsilon$ до ∂G_ρ равно $\varepsilon \tau_1$, то $\delta \geq \varepsilon \tau_1$. В условиях леммы 4.1 имеем

$$\tau w = i\tau \sqrt{u^2 + s} + \tau y_1 - \tau x_1 = \sqrt{u^2 + s} \left(i \operatorname{tg} \frac{\pi}{2\rho} + \frac{\tau y_1 - \tau x_1}{\sqrt{u^2 + s}} \right), \quad u \geq 0, \quad \rho > 1,$$

$$\frac{\tau y_1 - \tau x_1}{\sqrt{u^2 + s}} \leq \frac{|y'| - |x'| - \varepsilon \tau}{|y' - x'|} \leq 1 - \varepsilon_1, \quad y' \neq x', \quad \left| \arg \left(a \pm \operatorname{tg} \frac{\pi}{2\rho} \right) \right| \geq \frac{\pi}{2\rho}; \quad a \leq 1.$$

Таким образом, при $y' \neq x'$ выполняются неравенства (3.5); если $y' = x'$, то $\operatorname{Re} w < 0$, и, значит, эти неравенства также выполняются. Поэтому $E_\rho(w) = \psi_\rho(w)$, $w \in \Omega_\rho^-$, где $\beta = \pi/(2\rho) + \varepsilon_2/2$.

Далее имеем

$$(\zeta - \sigma w)(\zeta - \sigma \bar{w}) = \zeta^2 - 2\sigma\zeta(y_1 - x_1) + \sigma^2(u^2 + s + (y_1 - x_1)^2),$$

$$\frac{\partial^{m-1}}{\partial s^{m-1}} \frac{1}{(\zeta - \sigma w)(\zeta - \sigma \bar{w})} = \frac{(-1)^{m-1}(m-1)!\sigma^{2(m-1)}}{(\zeta - \sigma w)^m(\zeta - \sigma \bar{w})^m}.$$

Теперь из (3.2) и (3.3) получаем

$$\frac{\partial^{m-1}}{\partial s^{m-1}} \operatorname{Re} E_\rho(\sigma w) = \frac{(-1)^{m-1}(m-1)!\sigma^{2(m-1)}\rho}{2\pi i} \int_\gamma \frac{(\zeta - \sigma(y_1 - x_1)) \exp(\zeta^\rho)}{(\zeta - \sigma w)^m(\zeta - \sigma \bar{w})^m} d\zeta,$$

$$\frac{\partial^{m-1}}{\partial s^{m-1}} \frac{\operatorname{Im} E_\rho(\sigma w)}{\sqrt{u^2 + s}} = \frac{(-1)^{m-1}(m-1)!\sigma^{2m-1}\rho}{\pi i} \int_\gamma \frac{\exp(\zeta^\rho)}{(\zeta - \sigma w)^m(\zeta - \sigma \bar{w})^m} d\zeta.$$

Интегралы оцениваем согласно неравенствам (3.6):

$$\left| \frac{\partial^{m-1}}{\partial s^{m-1}} \operatorname{Re} E_\rho(\sigma w) \right| \leq \frac{C_4(\rho\delta, m)\sigma^{2m-1}r}{1 + \sigma^{2m}|w|^{2m}}, \quad |w|^2 = u^2 + r^2 \geq r^2 \geq \delta^2, \quad \delta \geq \tau_1\varepsilon, \quad (4.11)$$

$$\left| \frac{\partial^{m-1}}{\partial s^{m-1}} \frac{\operatorname{Im} E_\rho(\sigma w)}{\sqrt{u^2 + s}} \right| \leq \frac{C_4(\rho\delta, m)\sigma^{2m-1}r}{1 + \sigma^{2m}|w|^{2m}}. \quad (4.12)$$

При доказательстве мы воспользовались легко проверяемыми неравенствами

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial s^k} \frac{\sin(\nu\alpha)}{\alpha} \right| \leq C_k \frac{2^k |y_n|^k \sigma^k}{\alpha^{k+1}} \quad \text{и} \quad \left| \frac{\partial^k}{\partial s^k} \cos(\nu\alpha) \right| \leq C_k \frac{2^k |y_n|^k \sigma^k}{\alpha^k}, \quad \alpha \geq 1, \quad k = 0, 1, \dots,$$

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial s^k} \frac{\sin(\nu\alpha)}{\alpha} \right| \leq C_k \frac{2^k |y_n|^k \sigma^k}{\alpha^{2k}}, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial s^k} \cos(\nu\alpha) \right| \leq C_k \frac{2^k |y_n|^k \sigma^k}{\alpha^{2(k+1)}}, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad k = 2, 3, \dots, \quad \left| \frac{\partial}{\partial s} \cos(\nu\alpha) \right| \leq C_k \frac{2|y_n|\sigma}{\alpha}.$$

Учитывая, что $s = \alpha^2$ в формуле (4.1), имеем

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^{m-1}}{\partial s^{m-1}} \left\{ \frac{e^{-\sigma s}}{u^2 + s + (y_1 - x_1)^2} \varphi_\sigma(y, x, \lambda, u) \right\} = \\ & = \sum_{p=0}^{m-1} C_{m-1}^p \frac{\partial^{m-1-p}}{\partial s^{m-1-p}} \left(\frac{e^{-\sigma s}}{u^2 + s + (y_1 - x_1)^2} \right) \frac{\partial^p}{\partial s^p} \varphi_\sigma(y, x, \lambda, u). \end{aligned} \quad (4.13)$$

В формуле (4.13) вычисляем производные

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^{m-1-p}}{\partial s^{m-1-p}} \left(\frac{e^{-\sigma s}}{u^2 + (y_1 - x_1)^2 + s} \right) = \sum_{i=0}^{m-p-1} C_{m-p-1}^i (e^{-\sigma s})^{(m-p-1)} [(u^2 + s + (y_1 - x_1)^2)^{-1}]^{(i)} = \\ & = \sum_{i=0}^{m-p-1} C_{m-p-1}^i (-1)^{m-p-1} \sigma^{m-p-1-i} e^{-\sigma s} (m-p-i)! ((u^2 + s + (y_1 - x_1)^2)^{-1})^{-m+p+i}. \end{aligned}$$

Вычислим производные функций, определённых равенствами (3.3), (3.4), по переменным y_i , $i = \overline{1, n}$. Заметим, что оценки (4.11) и (4.12) для них сохраняются, но с другими постоянными. Тогда получим неравенства (4.10). Теперь вычисляем интегралы (4.7), (4.8) аналогично (4.9), (4.10). Теорема 4.1 доказана.

Следствие 4.1. Для любого $x \in \Omega_\rho$ справедливы равенства

$$F(x) = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} F_\sigma(x), \quad \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{\partial F_\sigma}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial F}{\partial x_j}(x),$$

выполняющиеся равномерно на компактах из Ω_ρ .

Приведём оценку устойчивости.

Положим

$$R^\rho = \max_{y \in S} \operatorname{Re} w_0, \quad x \in \Omega_\rho, \quad \sigma = R^{-\rho} \ln \frac{1}{\delta}. \quad (4.14)$$

Теорема 4.2. Пусть вектор-функция $F(y) \in A(\Omega_\rho)$ удовлетворяет на поверхности $T = \partial\Omega_\rho \setminus S$ граничному условию (4.3), а на поверхности S – условию

$$|F(y)| \leq \delta, \quad y \in S, \quad 0 < \delta < 1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} |F(x)| &\leq C_1(x) B^{1-(\gamma/R)^\rho} \delta^{(\gamma/R)^\rho} \ln^n \frac{1}{\delta}, \\ \left| \frac{\partial F}{\partial x_j}(x) \right| &\leq \tilde{C}_2(x) B^{1-(\gamma/R)^\rho} \delta^{(\gamma/R)^\rho} \ln^{n+2} \frac{1}{\delta}, \quad x \in \Omega_\rho. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Доказательство. Согласно формуле (4.4) и теореме 4.1 имеем

$$|F(x)| \leq \left| \int_S |M_\sigma(y, x; H)| dS_y \right| + \left| \int_T |M_\sigma(y, x; H)| dS_y \right|.$$

Для функций $F_\sigma(x)$, $\partial F_\sigma(x)/\partial x_j$ вследствие (4.5), (4.6), (4.8), (4.10) получаем оценки

$$|F_\sigma(x)| \leq C_1(x) \sigma^n e^{\sigma R^\rho - \sigma \gamma^\rho}, \quad \left| \frac{\partial F_\sigma}{\partial x_j}(x) \right| \leq C_2 \sigma^{n+2} e^{\sigma R^\rho - \sigma \gamma^\rho}, \quad x \in \Omega_\rho, \quad j = \overline{1, n}.$$

Согласно условию теоремы 4.2 и неравенствам (4.8), (4.10) заключаем, что

$$|F_\sigma(x)| \leq C_1(x) \sigma^n (1 + \delta e^{\sigma R^\rho}), \quad \left| \frac{\partial F_\sigma}{\partial x_j}(x) \right| \leq C_2 (1 + \delta e^{\sigma R^\rho}), \quad x \in \Omega_\rho, \quad j = \overline{1, n}, \quad \sigma \geq \sigma_0 > 0.$$

Выбирая σ как (4.14), доказываем оценку (4.15). Теорема доказана.

Приведём результат, который позволяет вычислить значение $F(x)$ приближённо, когда на поверхности S вместо функции $f(y)$ заданы её непрерывные приближения $f_\delta(y)$ класса $C(S)$ с заданным уклонением $0 < \delta B e^{-\sigma b_1^2}$:

$$\max_S |f(y) - f_\delta(y)| \leq \delta.$$

Предположим, что поверхность S задана уравнением

$$y_1 = h(y_2, \dots, y_n), \quad (y_2, \dots, y_n) \in T,$$

где h – однозначная функция, удовлетворяющая условиям Ляпунова, при этом

$$\max_T h = b_1, \quad b_2 = \max_T \left[1 + \left(\frac{dh}{dy_2} \right)^2 + \dots + \left(\frac{dh}{dy_n} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Положим $F_{\sigma\delta}(x) = \int_S M_\sigma(y, x; H) f_\delta(y) dS$, тогда

$$\frac{\partial F_{\sigma\delta}}{\partial x_j}(x) = \int_S \frac{\partial M_\sigma}{\partial x_j}(y, x; H) f_\delta(y) dS, \quad x \in \Omega,$$

где $\sigma = (1/b_1^2) \ln(B/\delta)$, $\delta < B$.

Теорема 4.3. Пусть вектор-функция $F(y) \in A(\Omega_\rho)$ удовлетворяет условиям (4.3). Тогда при $\sigma \geq 1$ справедливы неравенства

$$|F(x) - F_{\sigma\delta}(x)| \leq C_1(x) B^{1-(\gamma/R)^\rho} \delta^{(\gamma/R)^\rho} \ln^n \frac{1}{\delta}, \quad x \in \Omega_\rho,$$

$$\left| \frac{\partial F}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial F_{\sigma\delta}}{\partial x_j}(x) \right| \leq \tilde{C}_2(x) B^{1-(\gamma/R)^\rho} \delta^{(\gamma/R)^\rho} \ln^{n+2} \frac{1}{\delta}, \quad x \in \Omega_\rho. \quad (4.16)$$

Доказательство. Из обобщённой интегральной формулы Коши (4.4) при любом $x \in \Omega_\rho$ получаем равенства

$$F(x) - F_{\sigma\delta}(x) = J_\sigma^1(x) + \int_S M_\sigma(y, x; H) [f(y) - f_\delta(y)] dS_y,$$

$$\left| \frac{\partial F}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial F_{\sigma\delta}}{\partial x_j}(x) \right| = J_\sigma^2(x) + \int_S \frac{\partial M_\sigma(y, x; H)}{\partial x_j} [f(y) - f_\delta(y)] dS_y,$$

$$J_\sigma^1(x) = \int_T M_\sigma(y, x; H) F(y) dS_y, \quad J_\sigma^2(x) = \int_S \frac{\partial M_\sigma(y, x; H)}{\partial x_j} F(y) dS_y, \quad x \in \Omega_\rho, \quad j = \overline{1, n}.$$

Теперь, дословно повторяя доказательство теоремы 4.1, получаем оценки (4.16). Теорема доказана.

Следствие 4.2. Для любого $x \in \Omega_\rho$ справедливы равенства

$$F(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} F_{\sigma\delta}(x), \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\partial F_{\sigma\delta}}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial F}{\partial x_j}(x),$$

выполняющееся равномерно на компактах из Ω_ρ .

Построенный функционал $F_{\sigma\delta}(x, f_\delta)$, определённый на множестве $\{f_\delta\}$, где $f_\delta(x) \in C(S)$, $0 < \delta < \delta_0$, называется регуляризацией по Лаврентьеву решения задачи Коши.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сатторов Э.Н., Эрмamatова Ф.Э. Формула Карлемана для решений обобщённой системы Коши–Римана в многомерной пространственной области // Совр. математика. Фунд. направления. 2019. Т. 65. Вып. 1. С. 95–108.
2. Оболашвили Е.И. Обобщенная система Коши–Римана в многомерном евклидовом пространстве // Сб. тр. конф. “Комплексный анализ”. Гале, 1976.
3. Оболашвили Е.И. Обобщенная система Коши–Римана в многомерном пространств // Тр. Тбилисского мат. ин-та. 1978. Т. 58. С. 168–173.
4. Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М., 1974.
5. Владимиров В.С., Волович И.В. Суперанализ I. Дифференциальное исчисление // Теор. и мат. физика. 1984. Т. 59. № 1. С. 3–27.
6. Владимиров В.С., Волович И.В. Суперанализ. II. Интегральное исчисление // Теор. и мат. физика. 1984. Т. 60. № 2. С. 169–198.
7. Brackx F., Delanghe K., Sommen F. Clifford Analysis. V. 76. London, 1982.
8. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М., 1978.

9. Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск, 1962.
10. Берс А., Джонс Ф., Шефтер М. Уравнения с частными производными. М., 1966.
11. Ярмухамедов Ш. О задаче Коши для уравнения Лапласа // Докл. АН СССР. 1977. Т. 235. № 2. С. 281–283.
12. Ярмухамедов Ш. О продолжении решения уравнения Гельмгольца // Докл. РАН. 1997. Т. 357. № 3. С. 320–323.
13. Тихонов А.Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // Докл. АН СССР. 1963. Т. 151. № 3. С. 501–504.
14. Иванов В.К. Задача Коши для уравнения Лапласа в бесконечной полосе // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1. № 1. С. 131–136.
15. Лаврентьев М.М. О задаче Коши для линейных эллиптических уравнений второго порядка // Докл. АН СССР. 1957. Т. 112. № 2. С. 195–197.
16. Мергелян С.Н. Гармоническая аппроксимация и приближённое решение задачи Коши для уравнения Лапласа // Успехи мат. наук. 1956. Т. 11. № 5. С. 3–26.
17. Айзенберг Л.А., Тарханов Н.Н. Абстрактная формула Карлемана // Докл. АН СССР. 1988. Т. 298. № 6. С. 1292–1296.
18. Махмудов О.И. Задача Коши для системы уравнений теории упругости и термоупругости в пространстве // Изв. вузов. Математика. 2004. Т. 501. № 2. С. 43–53.
19. Makhmudov O., Niyozov I., Tarkhanov N. The Cauchy problem of couple-stress elasticity // Contemporary Math. 2008. V. 455. P. 297–310.
20. Сатторов Э.Н., Мардонов Дж.А. Задача Коши для системы уравнений Максвелла // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44. № 4. С. 851–861.
21. Сатторов Э.Н. Регуляризация решения задачи Коши для обобщённой системы Моисила–Теодореску // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44. № 8. С. 1100–1110.
22. Сатторов Э.Н. О продолжении решений обобщённой системы Коши–Римана в пространстве // Мат. заметки. 2009. Т. 85. № 5. С. 768–781.
23. Сатторов Э.Н. Регуляризация решения задачи Коши для системы уравнений Максвелла в бесконечной области // Мат. заметки. 2009. Т. 86. № 6. С. 445–455.
24. Сатторов Э.Н. О восстановлении решений обобщённой системы Моисила–Теодореску в пространственной области по их значениям на куске границы // Изв. вузов. Математика. 2011. № 1. С. 72–84.
25. Ярмухамедов Ш. Об аналитическом продолжении голоморфного вектора по его граничным значениям на куске границы // Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук. 1980. № 6. С. 34–40.
26. Makhmudov K.O., Makhmudov O.I., Tarkhanov N. Equations of Maxwell type // J. Math. Anal. Appl. 2011. V. 378. P. 64–75.
27. Сатторов Э.Н., Эрмаматова З.Э. О восстановлении решений однородной системы уравнений Максвелла в области по их значениям на куске границы // Изв. вузов. Математика. 2019. № 2. С. 39–48.
28. Тарханов Н.Н. О матрице Карлемана для эллиптических систем // Докл. АН СССР. 1985. Т. 284. № 2. С. 294–297.
29. Айзенберг Л.А. Формулы Карлемана в комплексном анализе. Первые приложения. Новосибирск, 1990.
30. Tarkhanov N.N. Cauchy problem for solutions of elliptic equations // Math. Topics. V. 7. Akad. Verl., Berlin, 1995.
31. Векуа И.Н. Обобщённые аналитические функции. М., 1988.
32. Ишанкулов Т.И. О возможности обобщённо-аналитического продолжения в область функций, заданных на куске её границы // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41. № 6. С. 1350–1356.
33. Оболашвили Е.И. Пространственный аналог обобщённых аналитических функций // Сообщ. АН ГССР. 1974. Т. 73. № 1. С. 20–24.
34. Никофоров Л.Ф., Уваров В.Б. Основы теории специальных функций. М., 1974.
35. Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. М., 1957.
36. Джрбашян М.М. Интегральные преобразования и представления функции в комплексной области. М., 1966.
37. Ярмухамедов Ш. Функция Карлемана и задача Коши для уравнения Лапласа // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45. № 3. С. 702–719.

Самаркандский государственный университет,
Узбекистан

Поступила в редакцию 08.04.2020 г.
После доработки 08.04.2020 г.
Принята к публикации 13.10.2020 г.