ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 1, с. 100–113

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.955+517.956

ЗАДАЧА ИДЕНТИФИКАЦИИ ДЛЯ СИЛЬНО ВЫРОЖДЕННЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ С ПРОИЗВОДНОЙ ГЕРАСИМОВА–КАПУТО

© 2021 г. В. Е. Федоров, М. Костич

Для линейного дифференциального уравнения в банаховом пространстве с вырожденным оператором при дробной производной Герасимова–Капуто доказана теорема о существовании единственного решения обратной задачи с зависящим от времени неизвестным коэффициентом. Предполагается выполнение условия относительной ограниченности пары операторов в уравнении и задание условия переопределения с оператором, ядро которого содержит подпространство вырождения исследуемого уравнения. Полученный результат проиллюстрирован на примере не разрешённой относительно производной по времени дробного порядка модельной системы уравнений в частных производных с неизвестным коэффициентом, снабжённой начальными и краевыми условиями и условием переопределения.

DOI: 10.31857/S037406412101009X

Введение. Пусть $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ – банаховы пространства, оператор $L : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ линеен и непрерывен, оператор $M : D_M \to \mathfrak{Y}$ линеен, замкнут и имеет плотную область определения $D_M \subset \mathfrak{X}$, снабжённую нормой графика оператора M, число $T > 0$ фиксировано, оператор $B(t) : \mathfrak{U} \to \mathfrak{Y}$ при всех $t \in [0,T]$ линеен и непрерывен, а функция $y : [0,T] \to \mathfrak{Y}$ непрерывна, $m \in \mathbb{N}$, $m-1 < \alpha \leqslant m$, D_t^α – производная Герасимова–Капуто порядка α. Рассмотрим обратную задачу, называемую также задачей идентификации [1] (или задачей прогноз-управления [2–4]) для эволюционной системы, описываемой вырожденным ($\ker L \neq \neq \{0\}$) эволюционным уравнением

$$D_t^\alpha Lx(t) = Mx(t) + B(t)u(t) + y(t), \quad t \in [0,T], \tag{1}$$

с характерными для таких уравнений начальными условиями

$$(Px)^{(k)}(0) = x_k, \quad k = \overline{0, m-1}, \tag{2}$$

где P – определяемый операторами L и M проектор вдоль подпространства вырождения уравнения (1) (подробнее см. п. 3). Задача состоит в нахождении пары (u,x) функций $u \in \in C([0,T];\mathfrak{U})$ и $x \in C([0,T];D_M)$, для которых уравнение (1) выполняется при всех $t \in [0,T]$, а для функции x справедливы включение $D_t^\alpha Lx \in C([0,T];\mathfrak{Y})$ и начальные условия (2). Для разрешимости этой задачи необходимо дополнительное условие – условие переопределения, которое в данном случае будет иметь вид

$$\Phi x(t) = \Psi(t), \quad t \in [0,T], \tag{3}$$

где оператор $\Phi : \mathfrak{X} \to \mathfrak{U}$ и функция $\Psi : [0,T] \to \mathfrak{U}$ заданы.

В рамках задачи (1)–(3) могут быть рассмотрены начально-краевые задачи для уравнений и систем уравнений в частных производных, имеющих неизвестные коэффициенты в правой части (или функции источника) [5, 6]. Уравнения и системы дробного порядка по времени часто встречаются при моделировании реальных процессов в различных областях науки (см. [7, 8] и др.).

Обратные задачи для линейных вырожденных эволюционных уравнений первого порядка рассматривались многими авторами [1, 3, 4, 9–15] при различных предположениях об операторах L и M. В данной работе предполагается выполнение условия (L,p)-ограниченности

оператора M (определение приводится в п. 3 работы). Прямая задача (1), (2) (при известной функции u) в случае (L,p)-ограниченного оператора M и её приложения исследованы в работах [16–19]. Условия однозначной разрешимости различных обратных задач для вырожденного эволюционного уравнения дробного порядка вида (1) получены в работах [20–22], для других дробных уравнений см., например, [23–25] и приведённую в них библиографию.

В работе [26] также исследовалась задача (1)–(3) с (L,p)-ограниченным оператором M при тех же предположениях, что и в настоящей работе. Однако результат об однозначной разрешимости этой задачи был установлен только при ограничениях $\alpha \geqslant 1$, $p=0$. Причиной этих ограничений явилось отсутствие в [26] доказательства повышенной гладкости решения вспомогательного интегрального уравнения Вольтерры. В данной работе это ограничение снято – получены условия разрешимости задачи (1)–(3) при любых $\alpha>0$, $p\in\mathbb{N}_0:=\{0\}\bigsqcup\mathbb{N}$.

Второй пункт настоящей работы содержит доказательство существования решения повышенной гладкости уравнения Вольтерры специального вида. Для этого вводится в рассмотрение весовое функциональное пространство функций конечной гладкости с особенностью в нуле и устанавливаются некоторые свойства таких функций. В третьем пункте доказана теорема о существовании решений повышенной гладкости невырожденной задачи (1)–(3) в случае, если $\mathfrak{X}=\mathfrak{Y}$, $L=I$ – тождественный оператор, и найдена оценка устойчивости решения. Четвёртый пункт работы содержит основной результат – теорему о существовании и единственности решения задачи (1)–(3). В последнем пункте полученный результат проиллюстрирован на примере не разрешённой относительно производной дробного порядка по времени модельной системы уравнений в частных производных с неизвестным коэффициентом, снабжённой начальными и краевыми условиями и конкретным условием переопределения вида (3).

1. Решения повышенной гладкости специального уравнения Вольтерры. Пусть $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ – банаховы пространства, $\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$ – нормированное векторное пространство линейных непрерывных операторов, действующих из $\mathfrak{U}$ в $\mathfrak{V}$, $\mathcal{L}(\mathfrak{U}):=\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{U})$; $\mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$ – множество всех линейных замкнутых операторов с плотной областью определения в $\mathfrak{U}$, действующих в пространство $\mathfrak{V}$, $\mathcal{C}l(\mathfrak{U}):=\mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{U})$.

Обозначим через $C^{n,k}(\widehat{\triangle};\mathcal{L}(\mathfrak{U}))$ пространство функций, заданных на прямоугольнике $\widehat{\triangle}:=$ $:=\{(t,s):t\in[0,T],\ \ s\in[0,t]\}\subset\mathbb{R}^2$, принимающих значения в пространстве $\mathcal{L}(\mathfrak{U})$ и являющихся непрерывными по совокупности переменных вместе со своими частными производными до порядка n включительно по первой переменной и до порядка k включительно – по второй.

Лемма 1. *Пусть* $n\in\mathbb{N}_0$, $\alpha>n$, $h\in C^n([0,T];\mathfrak{U})$, $K\in C^{n,0}(\widehat{\triangle};\mathcal{L}(\mathfrak{U}))$. *Тогда уравнение*

$$u(t)=\int\limits_0^t(t-s)^{\alpha-1}K(t,s)u(s)\,ds+h(t) \tag{4}$$

имеет единственное решение $u\in C^n([0,T];\mathfrak{U})$, *при этом справедлива оценка*

$$\|u\|_{C^n([0,T];\mathfrak{U})}\leqslant C(K)\|h\|_{C^n([0,T];\mathfrak{U})} \tag{5}$$

с некоторой константой $C=C(K)$, *не зависящей от* h.

Доказательство. Запишем уравнение (4) в виде $u=F(u)$, где оператор $F\colon C^n([0,T];\mathfrak{U})\to$ $\to C^n([0,T];\mathfrak{U})$ действует по правилу

$$[F(u)](t)=\int\limits_0^t(t-s)^{\alpha-1}K(t,s)u(s)\,ds+h(t). \tag{6}$$

При $k\leqslant n<\alpha$ имеем

$$\frac{d^k}{dt^k}\int\limits_0^t(t-s)^{\alpha-1}K(t,s)u(s)\,ds=\sum_{l=0}^k c_{lk}\int\limits_0^t(t-s)^{\alpha-1-l}K_{k-l}(t,s)u(s)\,ds,$$

где c_{lk} – некоторые константы, $K_l(t,s) = \partial^l K(t,s)/\partial t^l$. Поэтому при всяком $t_1 \in (0,T]$ при некоторых постоянных $b_l > 0$ выполняется неравенство

$$\|F(u_1) - F(u_2)\|_{C^n([0,t_1];\mathfrak{U})} \leqslant \sum_{l=0}^{n} b_l t_1^{\alpha-l} \|K\|_{C^{n,0}(\widehat{\triangle};\mathcal{L}(\mathfrak{U}))} \|u_1 - u_2\|_{C^n([0,t_1];\mathfrak{U})},$$

в котором

$$\|v\|_{C^n([0,t_1];\mathfrak{U})} = \sum_{l=0}^{n} \max_{t\in[0,t_1]} \|v^{(l)}(t)\|_{\mathfrak{U}}, \quad \|K\|_{C^{n,0}(\widehat{\triangle};\mathcal{L}(\mathfrak{U}))} = \sum_{l=0}^{n} \max_{(t,s)\in\widehat{\triangle}} \left\| \frac{\partial^l}{\partial t^l} K(t,s) \right\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})}.$$

Выбрав t_1 достаточно малым, получим сжимающий оператор F на полном метрическом пространстве $C^n([0,t_1];\mathfrak{U})$. По теореме о сжимающем отображении найдётся единственная неподвижная точка $u_0^1 \in C^n([0,t_1];\mathfrak{U})$ оператора F.

Если $t_1 < T$, то при $t_2 \in (t_1, T]$ введём в рассмотрение метрическое пространство

$$C^n_{t_1}([0,t_2];\mathfrak{U}) := \{u \in C^n([0,t_2];\mathfrak{U}) : u(t) = u_0^1(t), \quad t \in [0,t_1]\}$$

с метрикой $d(u_1,u_2) = \|u_1 - u_2\|_{C^n([0,t_2];\mathfrak{U})}$. Нетрудно показать его полноту, при этом, в силу доказанного выше, оператор F действует из пространства $C^n_{t_1}([0,t_2];\mathfrak{U})$ в него же, поскольку при всяком $u \in C^n_{t_1}([0,t_2];\mathfrak{U})$ для $t \in [0,t_1]$ имеем $(Fu)(t) = (Fu_0^1)(t) = u_0^1(t)$. Для любых $u_1, u_2 \in C^n_{t_1}([0,t_2];\mathfrak{U})$ при $k \leqslant n$ очевидно равенство

$$\frac{d^k}{dt^k}(F(u_1) - F(u_2)) = \sum_{l=0}^{k} c_{lk} \int_{t_1}^{t} (t-s)^{\alpha-1-l} K_{k-l}(t,s)(u_1(s) - u_2(s))\, ds.$$

Таким образом,

$$\|F(u_1) - F(u_2)\|_{C^n([0,t_2];\mathfrak{U})} \leqslant \sum_{l=0}^{n} b_l (t_2 - t_1)^{\alpha-l} \|K\|_{C^{n,0}(\widehat{\triangle};\mathcal{L}(\mathfrak{U}))} \|u_1 - u_2\|_{C^n([0,t_2];\mathfrak{U})},$$

при этом константы b_l – те же, что и выше. Поэтому, если $t_2 = \min\{2t_1, T\}$, оператор F является сжимающим на полном метрическом пространстве $C^n_{t_1}([0,t_2];\mathfrak{U})$ и, следовательно, имеет единственную неподвижную точку – функцию $u_0^2 \in C^n_{t_1}([0,t_2];\mathfrak{U})$, совпадающую, таким образом, на $[0,t_1]$ с функцией u_0^1.

Если $t_2 = 2t_1 < T$, то на следующем шаге выбираем $t_3 \in (2t_1, T]$ и рассматриваем отображение F на полном метрическом пространстве

$$C^n_{t_2}([0,t_3];\mathfrak{U}) := \{u \in C^n([0,t_3];\mathfrak{U}) : u(t) = u_0^2(t), \quad t \in [0,t_2]\}.$$

Повторим рассуждения k раз до выполнения условий $(k-1)t_1 < T$, $kt_1 \geqslant T$.

Для полученного решения $u \in C^n([0,T];\mathfrak{U})$ имеем при $l \in \mathbb{N}$ представление

$$u(t) = [F^{l+1}(u)](t) = \int_0^t \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_l} [(t-t_1)(t_1-t_2)\cdots(t_l - t_{l+1})]^{\alpha-1} \times$$

$$\times K(t,t_1)K(t_1,t_2)\cdots K(t_l,t_{l+1})u(t_{l+1})\, dt_{l+1}\cdots dt_2\, dt_1 + \sum_{r=0}^{l-1} (F_0^r h)(t),$$

где

$$[F_0 h](t) = \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} K(t,s) h(s)\, ds.$$

Тогда при $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ получаем

$$\frac{d^k}{dt^k}u(t) = \sum_{p=0}^{k} d_{pk} \int_0^t \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_l} (t-t_1)^{\alpha-p-1}[(t_1-t_2)\cdots(t_l-t_{l+1})]^{\alpha-1} \times$$
$$\times K_{k-p}(t,t_1)K(t_1,t_2)\cdots K(t_l,t_{l+1})u(t_{l+1})\,dt_{l+1}\cdots dt_2\,dt_1 +$$
$$+ \sum_{r=0}^{l-1}\sum_{p=0}^{k} e_{pk} \int_0^t \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{r-1}} (t-t_1)^{\alpha-p-1}[(t_1-t_2)\cdots(t_{r-1}-t_r)]^{\alpha-1} \times$$
$$\times K_{k-p}(t,t_1)K(t_1,t_2)\cdots K(t_{r-1},t_r)h(t_r)\,dt_r\cdots dt_2\,dt_1,$$
$$\|u\|_{C^n([0,T];\mathfrak{U})} \leqslant \sum_{k=0}^{n} d_k \|K\|_{C^{n,0}(\widehat{\triangle};\mathcal{L}(\mathfrak{U}))}\|K\|^l_{C(\widehat{\triangle};\mathcal{L}(\mathfrak{U}))}\frac{T^{(\alpha-1)l}T^{\alpha+l}}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+l)}\|u\|_{C^n([0,T];\mathfrak{U})} +$$
$$+ lC_h\|h\|_{C^n([0,T];\mathfrak{U})} \leqslant \frac{C_1 T^{(\alpha+1)l}\|K\|^l_{C(\widehat{\triangle};\mathcal{L}(\mathfrak{U}))}}{\alpha l!}\|u\|_{C^n([0,T];\mathfrak{U})} + lC_h\|h\|_{C^n([0,T];\mathfrak{U})} \leqslant$$
$$\leqslant q_l\|u\|_{C^n([0,T];\mathfrak{U})} + lC_h\|h\|_{C^n([0,T];\mathfrak{U})},$$

где d_{pk}, e_{pk} – некоторые константы, d_k – положительные константы, $q_l < 1$ при достаточно большом l. Отсюда следует, что выполняется оценка (5). Лемма доказана.

При $n \geqslant m \in \mathbb{N}$ введём в рассмотрение линейное пространство

$$C^n_m([0,T];\mathfrak{U}) := \{u \in C^{m-1}([0,T];\mathfrak{U}) : t^{k+1}u^{(m+k)}(t) \in C([0,T];\mathfrak{U}), \quad k = \overline{0, n-m}\}.$$

Условимся, что при $n < m$ по определению $C^n_m([0,T];\mathfrak{U}) := C^n([0,T];\mathfrak{U})$. При $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$ имеем вложение $C^n_m([0,T];\mathfrak{U}) \subset C([0,T];\mathfrak{U})$.

Лемма 2. *Пусть $n \geqslant m \in \mathbb{N}$. Тогда пространство $C^n_m([0,T];\mathfrak{U})$ с нормой*

$$\|u\|_{C^n_m([0,T];\mathfrak{U})} = \|u\|_{C^{m-1}([0,T];\mathfrak{U})} + \sum_{k=0}^{n-m} \max_{t\in[0,T]} t^{k+1}\|u^{(m+k)}(t)\|_{\mathfrak{U}}$$

является банаховым.

Доказательство. Аксиомы нормы проверяются стандартным образом.

Докажем полноту пространства. Рассмотрим последовательность $\{u_k\}$, фундаментальную в указанной норме. Очевидно, что существует функция $u \in C^{m-1}([0,T];\mathfrak{U})$, к которой эта последовательность сходится в $C^{m-1}([0,T];\mathfrak{U})$. Тогда функция $tu^{(m-1)}(t)$ лежит в $C([0,T];\mathfrak{U})$, а последовательность функций $(tu_k^{(m-1)}(t))' = u_k^{(m-1)}(t) + tu_k^{(m)}(t)$ сходится к некоторой функции $v = (tu^{(m-1)}(t))' = u^{(m-1)}(t) + tu^{(m)}(t)$ в $C([0,T];\mathfrak{U})$, поэтому $tu^{(m)}(t) \in C([0,T];\mathfrak{U})$. Аналогично, последовательность $(t^2u_k^{(m)}(t))' = 2tu_k^{(m)}(t) + t^2u_k^{(m+1)}(t)$ сходится к $2tu^{(m)}(t) + t^2u^{(m+1)}(t)$ в $C([0,T];\mathfrak{U})$, а значит, $t^2u^{(m+1)}(t) \in C([0,T];\mathfrak{U})$. Продолжая этот процесс, за конечное число шагов получим требуемое. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ – банаховы пространства и $\circ : \mathfrak{U}\times\mathfrak{V} \to \mathfrak{W}$ – билинейное отображение. Тогда для $u \in C^n_m([0,T];\mathfrak{U})$, $v \in C^n_m([0,T];\mathfrak{V})$ справедливы включения $u\circ v \in C^n_m([0,T];\mathfrak{W})$ и оценка*

$$\|u\circ v\|_{C^n_m([0,T];\mathfrak{W})} \leqslant \|u\|_{C^n_m([0,T];\mathfrak{U})}\|v\|_{C^n_m([0,T];\mathfrak{V})}.$$

Доказательство. При $k \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ имеем равенство

$$t^{k+1}(u\circ v)^{(m+k)} = \sum_{l=0}^{k} t^l C^l_{m+k} u^{(l)} \circ t^{k-l+1}v^{(m+k-l)} + t^{k+1}\sum_{l=k+1}^{m-1} C^l_{m+k}u^{(l)}\circ v^{(m+k-l)} +$$
$$+ \sum_{l=m}^{m+k} t^{m+k-l}C^l_{m+k}t^{l-m+1}u^{(l)}\circ v^{(m+k-l)}, \quad C^l_{m+k} = \frac{(m+k)!}{l!(m+k-l)!},$$

а при $k \in \{m, m+1, \dots, n-m\}$ – равенство

$$t^{k+1}(u \circ v)^{(m+k)} = \sum_{l=0}^{m-1} t^l C_{m+k}^l u^{(l)} \circ t^{k-l+1} v^{(m+k-l)} + t^{m-1} \sum_{l=m}^{k} C_{m+k}^l t^{l-m+1} u^{(l)} \circ t^{k-l+1} v^{(m+k-l)} +$$

$$+ \sum_{l=k+1}^{m+k} t^{m+k-l} C_{m+k}^l t^{l-m+1} u^{(l)} \circ v^{(m+k-l)}.$$

Остальная часть доказательства очевидна. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha \leqslant n$, $h \in C_m^n([0,T];\mathfrak{U})$, $K \in C^{n,n-m+1}(\widehat{\triangle};\mathcal{L}(\mathfrak{U}))$. *Тогда уравнение (4) имеет единственное решение* $u \in C_m^n([0,T];\mathfrak{U})$, *при этом справедлива оценка*

$$\|u\|_{C_m^n([0,T];\mathfrak{U})} \leqslant C(K)\|h\|_{C_m^n([0,T];\mathfrak{U})} \tag{7}$$

с некоторой константой $C = C(K)$, *не зависящей от* h.

Доказательство. Как и при доказательстве леммы 1, рассмотрим оператор (6), но теперь в банаховом пространстве $C_m^n([0,T];\mathfrak{U})$. При $\alpha \leqslant k \in \mathbb{N}$ имеем

$$\frac{d^k}{dt^k}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}K(t,s)u(s)\,ds = \frac{d^{k-m+1}}{dt^{k-m+1}}\sum_{l=0}^{m-1} c_{l,m-1}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1-l}K_{m-1-l}(t,s)u(s)\,ds =$$

$$= \frac{d^{k-m+1}}{dt^{k-m+1}}\sum_{l=0}^{m-2} c_{l,m-1}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1-l}K_{m-1-l}(t,s)u(s)\,ds +$$

$$+ c_{m-1,m-1}\frac{d^{k-m+1}}{dt^{k-m+1}}\int_0^t s^{\alpha-m}K(t,t-s)u(t-s)\,ds =$$

$$= \frac{d^{k-m}}{dt^{k-m}}\sum_{l=0}^{m-1} c_{l,m}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1-l}K_{m-l}(t,s)u(s)\,ds +$$

$$+ c_{m-1,m-1}\frac{d^{k-m}}{dt^{k-m}}\left(t^{\alpha-m}K(t,0)u(0) + \int_0^t s^{\alpha-m}\frac{d}{dt}[K(t,t-s)u(t-s)]\,ds\right) =$$

$$= \frac{d^{k-m-1}}{dt^{k-m-1}}\sum_{l=0}^{m-1} c_{l,m+1}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1-l}K_{m+1-l}(t,s)u(s)\,ds +$$

$$+ c_{m-1,m}\frac{d^{k-m-1}}{dt^{k-m-1}}\left(t^{\alpha-m}K_1(t,0)u(0) + \int_0^t s^{\alpha-m}\frac{d}{dt}[K_1(t,t-s)u(t-s)]\,ds\right) +$$

$$+ c_{m-1,m-1}\frac{d^{k-m-1}}{dt^{k-m-1}}\left((\alpha-m)t^{\alpha-m-1}K(t,0)u(0) + t^{\alpha-m}K_1(t,0)u(0) +\right.$$

$$\left. + t^{\alpha-m}\frac{d}{dt}\Big|_{s=t}[K(t,t-s)u(t-s)] + \int_0^t s^{\alpha-m}\frac{d^2}{dt^2}[K(t,t-s)u(t-s)]\,ds\right) =$$

$$= \sum_{l=0}^{m-1} c_{l,k}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1-l}K_{k-l}(t,s)u(s)\,ds + \sum_{l=m}^{k} C_l(t)t^{\alpha-l} + \sum_{l=0}^{k-m+1} c_l\int_0^t s^{\alpha-m}\frac{d^l}{dt^l}[K(t,t-s)u(t-s)]\,ds.$$

При этом при любом $t_1 \in (0,T]$ выполняются неравенства

$$\max_{t\in[0,t_1]} \|C_l(t)t^{\alpha-l+k-m+1}\|_{\mathfrak{U}} \leqslant$$

$$\leqslant b\|K\|_{C^{k-l,k-l}(\widehat{\triangle};\mathcal{L}(\mathfrak{U}))}\left(\sum_{i=0}^{m-1}\max_{t\in[0,t_1]} t^{\alpha-m+1}\|u^{(i)}(t)\|_{\mathfrak{U}} + \sum_{i=m}^{k-l}\max_{t\in[0,t_1]} t^{\alpha}\|t^{i-m+1}u^{(i)}(t)\|_{\mathfrak{U}}\right) \leqslant$$

$$\leqslant bt_1^{\alpha-m+1}\|K\|_{C^{k-l,k-l}(\widehat{\triangle};\mathcal{L}(\mathfrak{U}))}\|u\|_{C_m^{k-l}([0,t_1];\mathfrak{U})},$$

где $b>0$, c_l, $c_{l,r}$ – константы,

$$\|K\|_{C^{k,l}(\widehat{\triangle};\mathcal{L}(\mathfrak{U}))} = \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{l}\max_{(t,s)\in\widehat{\triangle}}\left\|\frac{\partial^{i+j}}{\partial t^i\partial s^j}K(t,s)\right\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})}.$$

Следовательно,

$$\max_{t\in[0,t_1]}\left\|t^{k-m+1}\frac{d^k}{dt^k}(F(u_1(t))-F(u_2(t)))\right\|_{\mathfrak{U}} \leqslant at_1^{\alpha+k-2m+2}\|K\|_{C^{k,0}(\widehat{\triangle};\mathcal{L}(\mathfrak{U}))}\|u_1-u_2\|_{C([0,t_1];\mathfrak{U})} +$$

$$+ b_1t_1^{\alpha-m+1}\|K\|_{C^{k-m,k-m}(\widehat{\triangle};\mathcal{L}(\mathfrak{U}))}\|u_1-u_2\|_{C_m^{k-m}([0,t_1];\mathfrak{U})} +$$

$$+ c\|K\|_{C^{k-m+1,k-m+1}(\widehat{\triangle};\mathcal{L}(\mathfrak{U}))}\left(\sum_{i=0}^{m-1}\max_{t\in[0,t_1]} t^{\alpha+k-2m+2}\|u_1^{(i)}(t)-u_2^{(i)}(t)\|_{\mathfrak{U}} +\right.$$

$$\left. + \sum_{i=m}^{k-m+1}\max_{t\in[0,t_1]} t^{\alpha}\|t^{i-m+1}(u_1^{(i)}(t)-u_2^{(i)}(t))\|_{\mathfrak{U}}\right) \leqslant$$

$$\leqslant a_1t_1^{\alpha-m+1}(\|K\|_{C^{k,0}(\widehat{\triangle};\mathcal{L}(\mathfrak{U}))} + \|K\|_{C^{k-m+1,k-m+1}(\widehat{\triangle};\mathcal{L}(\mathfrak{U}))})\|u_1-u_2\|_{C_m^{k-m+1}([0,t_1];\mathfrak{U})}$$

при некоторых положительных постоянных a, a_1, b_1, c.

При $k \leqslant m-1$ нужная оценка получается значительно проще:

$$\frac{d^k}{dt^k}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}K(t,s)u(s)\,ds = \sum_{l=0}^{k} c_{l,k}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1-l}K_{k-l}(t,s)u(s)\,ds,$$

$$\left\|\frac{d^k}{dt^k}(F(u_1)-F(u_2))\right\|_{C[0,t_1];\mathfrak{U})} \leqslant at_1^{\alpha-k}\|K\|_{C^{k,0}(\widehat{\triangle};\mathcal{L}(\mathfrak{U}))}\|u_1-u_2\|_{C([0,t_1];\mathfrak{U})}.$$

В итоге приходим к неравенству

$$\|F(u_1)-F(u_2)\|_{C_m^n([0,t_1];\mathfrak{U})} \leqslant a_2t_1^{\alpha-m+1}\|K\|_{C^{n,n-m+1}(\widehat{\triangle};\mathcal{L}(\mathfrak{U}))}\|u_1-u_2\|_{C_m^n([0,t_1];\mathfrak{U})}.$$

Выбрав t_1 достаточно малым, получим сжимаемость оператора F на полном метрическом пространстве $C_m^n([0,t_1];\mathfrak{U})$. По теореме о сжимающем отображении найдётся единственная неподвижная точка $u_0^1 \in C_m^n([0,t_1];\mathfrak{U})$ оператора F.

Заметим, что из проведённых рассуждений и условия $h \in C_m^n([0,T];\mathfrak{U})$ следует также, что оператор F действует из пространства $C_m^n([0,T];\mathfrak{U})$ в него же.

Если $t_1 < T$, то при $t_2 \in (t_1,T]$ рассмотрим метрическое пространство

$$C_{m,t_1}^n([0,t_2];\mathfrak{U}) := \{u \in C_m^n([0,t_2];\mathfrak{U}) : u(t) = u_0^1(t), \quad t\in[0,t_1]\}$$

с метрикой $d(u_1,u_2)=\|u_1-u_2\|_{C^n_m([0,t_2];\mathfrak{U})}$. Нетрудно доказать его полноту, при этом, в силу доказанного выше, оператор F действует из пространства $C^n_{m,t_1}([0,t_2];\mathfrak{U})$ в него же. Для произвольных $u_1,u_2\in C^n_{m,t_1}([0,t_2];\mathfrak{U})$ обозначим $v=u_1-u_2$, тогда при $k\leqslant m-1$ имеем

$$\frac{d^k}{dt^k}(F(u_1)-F(u_2))=\frac{d^k}{dt^k}\int\limits_{t_1}^{t}(t-s)^{\alpha-1}K(t,s)v(s)\,ds=\sum_{l=0}^{k}c_{l,k}\int\limits_{t_1}^{t}(t-s)^{\alpha-1-l}K_{k-l}(t,s)v(s)\,ds,$$

$$\left\|\frac{d^k}{dt^k}(F(u_1)-F(u_2))\right\|_{C[0,t_2];\mathfrak{U})}\leqslant a(t_2^{\alpha-k}-t_1^{\alpha-k})\|K\|_{C^{k,0}(\widehat{\triangle};\mathcal{L}(\mathfrak{U}))}\|u_1-u_2\|_{C([0,t_2];\mathfrak{U})},$$

а при $m\leqslant k\leqslant n$ получаем

$$\frac{d^k}{dt^k}(F(u_1)-F(u_2))=\frac{d^{k-m+1}}{dt^{k-m+1}}\sum_{l=0}^{m-2}c_{l,m-1}\int\limits_{t_1}^{t}(t-s)^{\alpha-1-l}K_{m-1-l}(t,s)v(s)\,ds+$$

$$+c_{m-1,m-1}\frac{d^{k-m+1}}{dt^{k-m+1}}\int\limits_{0}^{t-t_1}s^{\alpha-m}K(t,t-s)v(t-s)\,ds=$$

$$=\sum_{l=0}^{m-1}c_{l,k}\int\limits_{0}^{t}(t-s)^{\alpha-1-l}K_{k-l}(t,s)v(s)\,ds+\sum_{l=0}^{k-m+1}c_l\int\limits_{0}^{t}s^{\alpha-m}\frac{d^l}{dt^l}[K(t,t-s)v(t-s)]\,ds$$

в силу очевидных равенств $v(t_1)=v'(t_1)=\ldots=v^{(n)}(t_1)=0$. Таким образом,

$$\|F(u_1)-F(u_2)\|_{C^n_m([0,t_2];\mathfrak{U})}\leqslant a_1(t_2^{\alpha-m+1}-t_1^{\alpha-m+1})\|K\|_{C^{n,n-m+1}(\widehat{\triangle};\mathcal{L}(\mathfrak{U}))}\|u_1-u_2\|_{C^n_m([0,t_2];\mathfrak{U})},$$

при этом константу a_1 можно выбрать той же, что и на предыдущем этапе рассуждений. Поэтому при $t_2=\min\{2t_1,T\}$ оператор F является сжимающим на полном метрическом пространстве $C^n_{m,t_1}([0,t_2];\mathfrak{U})$ и, следовательно, имеет единственную неподвижную точку – функцию $u_0^2\in C^n_m([0,t_2];\mathfrak{U})$, совпадающую на $[0,t_1]$ с функцией u_0^1 по определению пространства $C^n_{m,t_1}([0,t_2];\mathfrak{U})$.

Если $t_2<T$, то на следующем шаге выбираем $t_3=\min\{3t_1,T\}$ и рассматриваем отображение F на полном метрическом пространстве

$$C^n_{m,t_2}([0,t_3];\mathfrak{U}):=\{u\in C^n_m([0,t_3];\mathfrak{U}):u(t)=u_0^2(t),\quad t\in[0,t_2]\}.$$

Найдётся такое $k\in\mathbb{N}$, что $(k-1)t_1<T$, $kt_1\geqslant T$. Повторив рассуждения k раз, завершим доказательство разрешимости.

Доказательство оценки (7) проводится так же, как и доказательство аналогичной оценки в лемме 1. Лемма доказана.

2. Невырожденная задача идентификации. Обозначим

$$g_\delta(t):=\Gamma(\delta)^{-1}t^{\delta-1},\quad J_t^\delta h(t):=(g_\delta*h)(t)=\int\limits_0^t g_\delta(t-s)h(s)\,ds$$

при $\delta>0$, $t>0$. Пусть $m-1<\alpha\leqslant m\in\mathbb{N}$, D_t^m – обычная производная целого порядка m, J_t^0 – тождественный оператор,

$$D_t^\alpha f(t)=D_t^mJ_t^{m-\alpha}\left(f(t)-\sum_{k=0}^{m-1}f^{(k)}(0)g_{k+1}(t)\right)$$

– производная Герасимова–Капуто (см. [27, 28], обсуждение терминологии – например, в [29, 30]). При $\alpha, \beta > 0$ обозначим функцию Миттаг-Лёффлера

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)}.$$

Пусть $\mathfrak{Z}$ – банахово пространство, $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{Z})$, $f : [0,T] \to \mathfrak{Z}$, $z_k \in \mathfrak{Z}$, $k = \overline{0, m-1}$. Рассмотрим задачу Коши

$$D_t^\alpha z(t) = Az(t) + f(t), \quad t \in [0,T], \tag{8}$$

$$z^{(k)}(0) = z_k, \quad k = \overline{0, m-1}. \tag{9}$$

Решением задачи (8), (9) будем называть функцию $z \in C^{m-1}([0,T];\mathfrak{Z})$, для которой справедливо включение

$$J_t^{m-\alpha}\left(z - \sum_{k=0}^{m-1} z^{(k)}(0) g_{k+1}\right) \in C^m([0,T];\mathfrak{Z})$$

и выполняются равенства (8), (9).

Лемма 5 [18, 19]. *Пусть $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{Z})$, $f \in C([0,T];\mathfrak{Z})$, $z_k \in \mathfrak{Z}$, $k = \overline{0, m-1}$. Тогда задача (8), (9) имеет единственное решение, и это решение представляется в виде*

$$z(t) = \sum_{k=0}^{m-1} t^k E_{\alpha,k+1}(At^\alpha) z_k + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(A(t-s)^\alpha) f(s)\, ds. \tag{10}$$

Рассмотрим задачу идентификации

$$D_t^\alpha z(t) = Az(t) + B(t)u(t) + g(t), \quad t \in [0,T], \tag{11}$$

$$z^{(k)}(0) = z_k, \quad k = \overline{0, m-1}, \tag{12}$$

$$\Phi z(t) = \Psi(t), \quad t \in [0,T], \tag{13}$$

где $m - 1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{Z}$ – банаховы пространства, $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{Z})$, $B : [0,T] \to \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{Z})$, $g : [0,T] \to \mathfrak{Z}$, $\Phi \in \mathcal{L}(\mathfrak{Z};\mathfrak{V})$, $\Psi : [0,T] \to \mathfrak{V}$, $z_k \in \mathfrak{Z}$, $k = \overline{0, m-1}$ заданы, а функции $z : [0,T] \to \mathfrak{Z}$ и $u : [0,T] \to \mathfrak{U}$ требуется определить, (13) – условие переопределения.

Решением задачи (11)–(13) будем называть пару (u, z) функций $u \in C([0,T];\mathfrak{U})$ и $z \in C^{m-1}([0,T];\mathfrak{Z})$ такую, что

$$J_t^{m-\alpha}\left(z - \sum_{k=0}^{m-1} z^{(k)}(0) g_{k+1}\right) \in C^m([0,T];\mathfrak{Z})$$

и выполняются равенства (11)–(13).

Теорема 1. *Пусть $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{Z})$, $B \in C^{\max\{0,n-m+1\}}([0,T];\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{Z}))$, $g \in C_m^n([0,T];\mathfrak{Z})$, $\Phi \in \mathcal{L}(\mathfrak{Z};\mathfrak{V})$, при всех $t \in [0,T]$ существует обратный оператор $(\Phi B(t))^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{V};\mathfrak{U})$, $(\Phi B(t))^{-1} \in C^n([0,T];\mathcal{L}(\mathfrak{V};\mathfrak{U}))$, $z_k \in \mathfrak{Z}$, $k = \overline{0, m-1}$, $\Psi \in C([0,T];\mathfrak{V})$, $m - 1 < \alpha \leqslant m$, $D_t^\alpha \Psi \in C_m^n([0,T];\mathfrak{V})$, $\Psi^{(k)}(0) = \Phi z_k$, $k = \overline{0, m-1}$. Тогда задача (11)–(13) имеет единственное решение (u, z), при этом $u \in C_m^n([0,T];\mathfrak{U})$ и справедлива оценка*

$$\|z\|_{C^{m-1}([0,T];\mathfrak{Z})} + \|D_t^\alpha z\|_{C([0,T];\mathfrak{Z})} + \|u\|_{C_m^n([0,T];\mathfrak{U})} \leqslant$$

$$\leqslant C\left(\sum_{k=0}^{m-1} \|z_k\|_{\mathfrak{Z}} + \|g\|_{C_m^n([0,T];\mathfrak{Z})} + \|D_t^\alpha \Psi\|_{C_m^n([0,T];\mathfrak{V})}\right), \tag{14}$$

в которой константа $C = C(A, B, \Phi)$ не зависит от z_0, z_1, …, z_{m-1}, g, Ψ.

Доказательство. Если z – решение задачи Коши (11), (12) при некотором u, то в силу непрерывности оператора Φ справедливо равенство

$$D_t^\alpha \Phi z(t) = \Phi D_t^\alpha z(t) = \Phi(Az(t) + B(t)u(t) + g(t)).$$

Поэтому в соответствии с равенством (10) и условием (13) имеем

$$D_t^\alpha \Psi(t) = \Phi A\biggl(\sum_{k=0}^{m-1} t^k E_{\alpha,k+1}(t^\alpha A)z_k + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha A)g(s)\,ds +$$

$$+ \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha A)B(s)u(s)\,ds\biggr) + \Phi B(t)u(t) + \Phi g(t).$$

Воспользовавшись условием непрерывной обратимости операторов семейства $\Phi B(t)$, приходим к равенству

$$u(t) = \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} K(t,s)u(s)\,ds + h(t), \tag{15}$$

где

$$K(t,s) = -(\Phi B(t))^{-1}\Phi A E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha A)B(s) \in C^{n,\max\{0,n-m+1\}}(\widehat{\triangle}; \mathcal{L}(\mathfrak{U})),$$

$$h(t) = (\Phi B(t))^{-1}\biggl(D_t^\alpha \Psi(t) - \Phi A \sum_{k=0}^{m-1} t^k E_{\alpha,k+1}(t^\alpha A)z_k -$$

$$- \Phi A \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha A)g(s)\,ds - \Phi g(t)\biggr) \in C_m^n([0,T];\mathfrak{U}).$$

Действительно, рассуждая так же, как и при доказательстве леммы 4, при $g \in C_m^n([0,T];\mathfrak{Z})$ получаем в силу непрерывности операторов Φ и A, что

$$\Phi g \in C_m^n([0,T];\mathfrak{V}), \quad \Phi A \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha A)g(s)\,ds \in C_m^n([0,T];\mathfrak{V}),$$

остаётся учесть вложение $C^n([0,T];\mathfrak{V}) \subset C_m^n([0,T];\mathfrak{V})$ и лемму 3.

Таким образом, по лемме 1 при $n < \alpha$ или по лемме 4 в случае $n \geqslant \alpha$ существует единственное решение $u \in C_m^n([0,T];\mathfrak{U})$ уравнения (15), которое удовлетворяет оценке вида (14) для функции u.

Из доказанного следует, что по лемме 5 существует единственное решение z задачи Коши (11), (12) с заданным u, которое удовлетворяет оценке (14) в силу равенства (10) с функцией $f(t) = g(t) + B(t)u(t)$. Теорема доказана.

Замечание 1. Понятно, что ключевым условием в теореме является условие непрерывной обратимости операторов семейства $\Phi B(t)$. По сути оно означает адекватное соответствие информации, получаемой из условия переопределения, и неизвестной информации в уравнении.

3. Задача идентификации для вырожденного уравнения. Пусть $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ – банаховы пространства, $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{X};\mathfrak{Y})$, $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{X};\mathfrak{Y})$, D_M – область определения оператора M, снабжённая его нормой графика $\|\cdot\|_{D_M} := \|\cdot\|_{\mathfrak{X}} + \|M\cdot\|_{\mathfrak{Y}}$. Обозначим $R_\mu^L(M) := (\mu L - M)^{-1}L$, $L_\mu^L := L(\mu L - M)^{-1}$.

Оператор M называется (L,σ)-*ограниченным*, если существует такое $a>0$, что при любом μ из множества $\{\mu\in\mathbb{C}:|\mu|>a\}$ существует оператор $(\mu L-M)^{-1}\in\mathcal{L}(\mathfrak{Y};\mathfrak{X})$. Возьмём контур $\gamma=\{\mu\in\mathbb{C}:|\mu|=r>a\}$. В [31, с. 89] показано, что операторы

$$P:=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}R_{\mu}^{L}(M)\,d\mu\in\mathcal{L}(\mathfrak{X})\quad\text{и}\quad Q:=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}L_{\mu}^{L}(M)\,d\mu\in\mathcal{L}(\mathfrak{Y}) \tag{16}$$

являются проекторами. Положим

$$\mathfrak{X}^0:=\ker P,\quad \mathfrak{X}^1:=\operatorname{im}P,\quad \mathfrak{Y}^0:=\ker Q,\quad \mathfrak{Y}^1:=\operatorname{im}Q,\quad P_0:=I-P,\quad Q_0:=I-Q.$$

Тогда $\mathfrak{X}=\mathfrak{X}^0\bigoplus\mathfrak{X}^1$, $\mathfrak{Y}=\mathfrak{Y}^0\bigoplus\mathfrak{Y}^1$. Обозначим через L_k (через M_k) сужение оператора L (оператора M) на подпространство $\mathfrak{X}^k$ $(D_{M_k}:=D_M\bigcap\mathfrak{X}^k)$, $k=0,1$.

Теорема 2 [31, с. 90]. *Пусть оператор M является (L,σ)-ограниченным. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(i) $M_1\in\mathcal{L}(\mathfrak{X}^1;\mathfrak{Y}^1)$, $M_0\in\mathcal{C}l(\mathfrak{X}^0;\mathfrak{Y}^0)$, $L_k\in\mathcal{L}(\mathfrak{X}^k;\mathfrak{Y}^k)$, $k=0,1$;

(ii) существуют операторы $M_0^{-1}\in\mathcal{L}(\mathfrak{Y}^0;\mathfrak{X}^0)$, $L_1^{-1}\in\mathcal{L}(\mathfrak{Y}^1;\mathfrak{X}^1)$.

Обозначим $H:=M_0^{-1}L_0$. При $p\in\mathbb{N}_0$ оператор M называется (L,p)-*ограниченным*, если он (L,σ)-ограничен и при этом $H^p\neq0$, $H^{p+1}=0$.

Лемма 6 [18]. *Пусть $\alpha,\beta>0$, оператор M является (L,σ)-ограниченным и*

$$X_{\alpha,\beta}(t):=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}R_{\mu}^{L}(M)E_{\alpha,\beta}(\mu t^{\alpha})\,d\mu,\quad t\geqslant0.$$

Тогда при всех $t\geqslant0$ выполняются следующие соотношения:

(i) $X_{\alpha,\beta}(t)P=PX_{\alpha,\beta}(t)=X_{\alpha,\beta}(t)$;

(ii) $\mathfrak{X}^0\subset\ker X_{\alpha,\beta}(t)$, $\operatorname{im}X_{\alpha,\beta}(t)\subset\mathfrak{X}^1$;

(iii) $X_{\alpha,\beta}(t)=E_{\alpha,\beta}(L_1^{-1}M_1t^{\alpha})P$.

Пусть $f:[0,T]\to\mathfrak{Y}$. *Решением* уравнения

$$D_t^{\alpha}Lx(t)=Mx(t)+f(t),\quad t\in[0,T], \tag{17}$$

называется функция $x\in C([0,T];D_M)$, для которой справедливы включения

$$Lx\in C^{m-1}([0,T];\mathfrak{Y}),\quad J_t^{m-\alpha}\left(Lx-\sum_{k=0}^{m-1}(Lx)^{(k)}(0)g_{k+1}\right)\in C^{m}([0,T];\mathfrak{Z})$$

и при всех $t\in[0,T]$ выполняется равенство (17). Решение x уравнения (17), для которого $x\in C^{m-1}([0,T);\mathfrak{X})$ и выполняются равенства

$$x^{(k)}(0)=x_k,\quad k=\overline{0,m-1}, \tag{18}$$

называется *решением задачи Коши* (17), (18).

Введём обозначение $G:=L_0M_0^{-1}\in\mathcal{L}(\mathfrak{Y}^0)$.

Лемма 7. *Пусть оператор M является (L,p)-ограниченным при $p\in\mathbb{N}_0$, $g:[0,T]\to\mathfrak{Y}^0$ и существуют операторы $(D_t^{\alpha}H)^kM_0^{-1}g\in C([0,T];\mathfrak{X})$ при $k=\overline{0,p}$. Тогда существует единственное решение уравнения $D_t^{\alpha}Hx(t)=x(t)+M_0^{-1}g(t)$, и это решение представляется в виде*

$$x(t)=-\sum_{k=0}^{p}(D_t^{\alpha}H)^kM_0^{-1}g(t).$$

Если, кроме того, $g\in C^{mp}([0,T];\mathfrak{Y})$, то для этого решения справедливо неравенство

$$\|x\|_{C([0,T];D_M)}+\|Lx\|_{C^{m-1}([0,T];\mathfrak{Y})}+\|D_t^{\alpha}Lx\|_{C([0,T];\mathfrak{Y})}\leqslant C\|g\|_{C^{mp}([0,T];\mathfrak{Y})},$$

в котором положительная константа $C=C(L,M)$ не зависит от g.

Доказательство. Существование единственного решения x доказано в работе [18]. Учитывая равенство $D_t^\alpha L_0 x(t) = M_0 x(t) + g(t)$, для решения $x : D_{M_0} \to \mathfrak{X}$ имеем оценку

$$\|x\|_{C([0,T];D_M)} + \|Lx\|_{C^{m-1}([0,T];\mathfrak{Y})} + \|D_t^\alpha Lx\|_{C([0,T];\mathfrak{Y})} \leqslant$$

$$\leqslant 2\|x\|_{C([0,T];D_M)} + \|Lx\|_{C^{m-1}([0,T];\mathfrak{Y})} + \|g\|_{C([0,T];\mathfrak{Y})} \leqslant$$

$$\leqslant 2\sum_{k=0}^{p} \|(D_t^\alpha H)^k M_0^{-1} g\|_{C([0,T];\mathfrak{X})} + 2\sum_{k=1}^{p} \|(D_t^\alpha G)^k g\|_{C([0,T];\mathfrak{Y})} + 3\|g\|_{C([0,T];\mathfrak{Y})} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{p-1} \|(D_t^\alpha G)^k G g\|_{C^{m-1}([0,T];\mathfrak{Y})} \leqslant C(L,M)\|g\|_{C^{mp}([0,T];\mathfrak{Y})}.$$

Лемма доказана.

Отметим, что

$$Lx(t) = -\sum_{n=0}^{p} (D_t^\alpha G)^n G g(t) = -\sum_{n=0}^{p-1} (D_t^\alpha G)^n G g(t) \in C^{m-1}([0,T];\mathfrak{Y})$$

в условиях данной леммы, поскольку $G^{p+1} = M_0 H^{p+1} M_0^{-1} = 0$.

Пусть $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ – банаховы пространства, $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{X};\mathfrak{Y})$, оператор $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{X};\mathfrak{Y})$ является (L,p)-ограниченным при $p \in \mathbb{N}_0$, $\Phi \in \mathcal{L}(\mathfrak{X};\mathfrak{V})$, $B : [0,T] \to \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{Y})$, $y : [0,T] \to \mathfrak{Y}$, $\Psi : [0,T] \to \mathfrak{V}$, $x_k \in \mathfrak{X}^1$, $k = \overline{0,m-1}$, заданы. При $m-1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N}$ рассмотрим задачу идентификации

$$D_t^\alpha Lx(t) = Mx(t) + B(t)u(t) + y(t), \quad t \in [0,T], \tag{19}$$

$$Px^{(k)}(0) = x_k, \quad k = \overline{0,m-1}, \tag{20}$$

$$\Phi x(t) = \Psi(t), \quad t \in [0,T]. \tag{21}$$

Пара (u,x) функций $u \in C([0,T];\mathfrak{U})$ и $x \in C([0,T];D_M)$, для которой $D_t^\alpha Lx \in C([0,T];\mathfrak{Y})$, называется *решением* этой задачи, если выполняются равенства (19)–(21).

Замечание 2. При постановке условий (20) важен тот факт, что гладкость функции Px не меньше, чем у Lx, так как $Px = L_1^{-1}L_1 Px = L_1^{-1}QLx$.

Замечание 3. При $p \geqslant 1$ уравнение (19) называется *сильно вырожденным*, поскольку в этом случае его подпространство вырождения $\mathfrak{X}^0$ состоит не только из векторов ядра $\ker L$, но и из их M-присоединённых векторов высоты, не большей p (см. [31]).

Далее используется ключевое условие $\mathfrak{X}^0 \subset \ker \Phi$.

Теорема 3. *Пусть $m \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}_0$, оператор M является (L,p)-ограниченным, $B \in C_m^{\max\{0,mp-m+1\}}([0,T];\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{Y}))$, $Q_0 B \in C^{mp}([0,T];\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{Y}))$, при $p > 0$ справедливо соотношение $\|Q_0 B^{(m-1+k)}\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{Y})} = O(t^k)$ при $t \to 0$ для $k = \overline{1,mp-m+1}$, $y : [0,T] \to \mathfrak{Y}$, $Qy \in C_m^{mp}([0,T];\mathfrak{Y})$, $Q_0 y \in C^{mp}([0,T];\mathfrak{Y})$, $\Phi \in \mathcal{L}(\mathfrak{X};\mathfrak{V})$, $\mathfrak{X}^0 \subset \ker\Phi$, при всех $t \in [0,T]$ существует обратный оператор $(\Phi L_1^{-1} QB(t))^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{V};\mathfrak{U})$, $(\Phi L_1^{-1} QB(t))^{-1} \in C^{mp}([0,T];\mathcal{L}(\mathfrak{V};\mathfrak{U}))$, $\Psi \in C([0,T];\mathfrak{V})$, $m-1 < \alpha \leqslant m$, $D_t^\alpha \Psi \in C_m^{mp}([0,T];\mathfrak{V})$, $x_k \in \mathfrak{X}^1$, $\Psi^{(k)}(0) = \Phi x_k$, $k = \overline{0,m-1}$. Тогда существует единственное решение (u,x) задачи (19)–(21), при этом выполняется неравенство*

$$\|x\|_{C([0,T];D_M)} + \|Lx\|_{C^{m-1}([0,T];\mathfrak{Y})} + \|D_t^\alpha Lx\|_{C([0,T];\mathfrak{Y})} + \|u\|_{C([0,T];\mathfrak{U})} \leqslant$$

$$\leqslant C\left(\sum_{k=0}^{m-1} \|x_k\|_{\mathfrak{X}} + \|Qy\|_{C_m^{mp}([0,T];\mathfrak{Y})} + \|Q_0 y\|_{C^{mp}([0,T];\mathfrak{Y})} + \|D_t^\alpha \Psi\|_{C_m^{mp}([0,T];\mathfrak{V})}\right), \tag{22}$$

в котором положительная константа $C = C(L,M,B,\Phi) > 0$ не зависит от x_k, $k = \overline{0,m-1}$, y, Ψ.

Доказательство. Имеем $x(t) = v(t) + w(t)$, где $Px(t) := v(t)$, $P_0x(t) := w(t)$. Из условия $\mathfrak{X}^0 \subset \ker\Phi$ следует, что $\Phi P_0 = 0$, поэтому исходная задача (19)–(21) эквивалентна задаче нахождения функций v, w, u, удовлетворяющих соотношениям

$$D_t^\alpha v(t) = L_1^{-1}M_1 v(t) + L_1^{-1}QB(t)u(t) + L_1^{-1}Qy(t), \quad t \in [0,T], \tag{23}$$

$$v^{(k)}(0) = x_k, \quad k = \overline{0, m-1}, \tag{24}$$

$$\Phi x(t) \equiv \Phi v(t) = \Psi(t), \quad t \in [0,T], \tag{25}$$

$$D_t^\alpha Hw(t) = w(t) + M_0^{-1}Q_0B(t)u(t) + M_0^{-1}Q_0y(t), \quad t \in [0,T]. \tag{26}$$

По теореме 1 с $n = mp$ задача (23)–(25) однозначно разрешима, при этом выполняется включение $u \in C_m^{mp}([0,T];\mathfrak{U}) \subset C([0,T];\mathfrak{U})$. Тогда с учётом условий на оператор Q_0B имеем по лемме 3 включение $Q_0Bu \in C^{mp}([0,T];\mathfrak{Y})$, поэтому при $n = \overline{0,p}$ существуют функции $(D_t^\alpha H)^n M_0^{-1}Q_0Bu \in C([0,T];\mathfrak{X})$ и уравнение (26) разрешимо в силу леммы 7, при этом

$$\|w\|_{C([0,T];D_M)} + \|Lw\|_{C^{m-1}([0,T];\mathfrak{Y})} + \|D_t^\alpha Lw\|_{C([0,T];\mathfrak{Y})} \leqslant$$

$$\leqslant C(L,M)(\|Q_0Bu\|_{C^{mp}([0,T];\mathfrak{Y})} + \|Q_0y\|_{C^{mp}([0,T];\mathfrak{Y}))} \leqslant$$

$$\leqslant C(L,M)\|Q_0y\|_{C^{mp}([0,T];\mathfrak{Y}))} + C(L,M,B)\|u\|_{C_m^{mp}([0,T];\mathfrak{U})}.$$

Отсюда и из неравенства (14) вытекает требуемая оценка (22). Теорема доказана.

Замечание 4. Результат, аналогичный теореме 3, получен в [26] только при условии, что $\alpha \geqslant 1$ и $p = 0$.

Замечание 5. При условии $\mathfrak{X}^1 \subset \ker\Phi$ однозначная разрешимость задачи (19)–(21) была исследована для любых $\alpha > 0$ и $p \in \mathbb{N}_0$ как в случае начальных условий (20), так и при начальных условиях Коши.

4. Пример. Пусть $d \in \{1,2,3\}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ – ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$. Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\frac{\partial^k v_1}{\partial t^k}(s,0) = v_{1k}(s), \quad k = \overline{0, m-1}, \quad s \in \Omega, \tag{27}$$

$$v_1(s,t) = v_3(s,t) = 0, \quad (s,t) \in \partial\Omega \times [0,T], \tag{28}$$

$$D_t^\alpha \triangle v_1 = v_1 + b_1(s,t)u(t), \quad (s,t) \in \Omega \times [0,T],$$

$$D_t^\alpha \triangle v_3 = v_2 + b_2(s,t)u(t), \quad (s,t) \in \Omega \times [0,T],$$

$$0 = \triangle v_3 + b_3(s,t)u(t), \quad (s,t) \in \Omega \times [0,T], \tag{29}$$

$$v_1(s_0,t) = \Psi(t), \quad t \in [0,T], \tag{30}$$

где $m - 1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N}_0$, $s_0 \in \Omega$.

Пусть $A := \Delta = \sum_{k=1}^d \partial^2/\partial s_k^2$ – оператор Лапласа с областью определения $H_0^2(\Omega) := \{z \in H^2(\Omega) : z(s) = 0, \ s \in \partial\Omega\} \subset L_2(\Omega)$, $\{\varphi_k\}$ – ортонормированная в $L_2(\Omega)$ система его собственных функций, соответствующая собственным значениям $\{\lambda_k\}$ оператора A, занумерованным в порядке их невозрастания с учётом кратности.

Редуцируем задачу (27)–(30) к задаче (19)–(21), выбрав пространства

$$\mathfrak{X} = H_0^2(\Omega) \times L_2(\Omega) \times H_0^2(\Omega), \quad \mathfrak{Y} = (L_2(\Omega))^3, \quad \mathfrak{U} = \mathbb{R} \tag{31}$$

и операторы

$$L = \begin{pmatrix} \triangle & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \triangle \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathfrak{X};\mathfrak{Y}), \quad M = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \triangle \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathfrak{X};\mathfrak{Y}). \tag{32}$$

При этом $\Phi x = x_1(s_0)$ для $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathfrak{X}$, поэтому $\mathfrak{V} = \mathbb{R}$, $\Phi \in \mathcal{L}(\mathfrak{X};\mathbb{R})$, так как при $d < 4$ имеет место вложение $H_0^2(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$.

Лемма 8 [32]. *Пусть заданы пространства (31) и операторы (32). Тогда оператор* M $(L,1)$*-ограничен и проекторы (16) имеют вид*

$$P=\begin{pmatrix} I & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q=\begin{pmatrix} I & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Замечание 6. Из представления проектора P следует, что начальные условия (27) имеют вид условий (20), при этом $\mathfrak{X}^0 \subset \ker \Phi$.

Теорема 4. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$, $b_1 \in C^1_m([0,T];L_2(\Omega))$, $b_2, b_3 \in C^m([0,T];L_2(\Omega))$, *справедливы соотношения* $\|\partial^m b_i(\,\cdot\,,t)/\partial t^m\|_{L_2(\Omega)} = O(t)$ *при* $t \to 0$ *и* $i=2,3$, *при всех* $t \in [0,T]$ *выполняются условия* $(A^{-1}b_1(\,\cdot\,,t))|_{s=s_0} \neq 0$ *и* $[(A^{-1}b_1(\,\cdot\,,t))|_{s=s_0}]^{-1} \in C^m([0,T];\mathbb{R})$, $\Psi \in C([0,T];\mathbb{R})$, $m-1<\alpha\leqslant m$, $D^\alpha_t\Psi \in C^m_m([0,T];\mathbb{R})$, $v_{1k} \in H^2_0(\Omega)$, $\Psi^{(k)}(0)=v_{1k}(s_0)$, $k=\overline{0,m-1}$. *Тогда существует единственное решение* (v_1,v_2,v_3,u) *задачи (27)–(30), при этом имеет место неравенство*

$$\|v_1\|_{C([0,T];H^2_0(\Omega))} + \|v_2\|_{C([0,T];L_2(\Omega))} + \|v_3\|_{C([0,T];H^2_0(\Omega))} + \|\Delta v_1\|_{C^{m-1}([0,T];L_2(\Omega))} +$$

$$+ \|\Delta v_3\|_{C^{m-1}([0,T];L_2(\Omega))} + \|D^\alpha_t\Delta v_1\|_{C([0,T];L_2(\Omega))} + \|D^\alpha_t\Delta v_3\|_{C([0,T];L_2(\Omega))} + \sum_{i=1,2,3}\|u_i\|_{C([0,T];\mathbb{R})} \leqslant$$

$$\leqslant C(\|v_{11}\|_{H^2_0(\Omega)} + \|v_{12}\|_{L_2(\Omega)} + \|v_{13}\|_{H^2_0(\Omega)} + \|D^\alpha_t\Psi\|_{C^m_m([0,T];\mathbb{R})}),$$

в котором константа $C>0$ *не зависит от* v_{1k}, $k=\overline{0,m-1}$, *и* Ψ.

Доказательство. В условиях задачи (27)–(30) отображение $\Phi L_1^{-1}QB(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ представляет собой оператор умножения на число $(A^{-1}b_1(\,\cdot\,,t))|_{s=s_0}$. Поэтому все условия теоремы 3 при $p=1$ выполняются и по этой теореме получаем требуемое. Теорема доказана.

Работа Федорова В.Е. выполнена в рамках исследований Уральского математического центра, а также при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 19-41-450001) и финансовой поддержке Правительства Российской Федерации (акт 211, контракт 02.A03.21.0011).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Al Horani M., Favini A.* An identification problem for first-order degenerate differential equations // J. of Optim. Theory and Appl. 2006. V. 130. P. 41–60.
2. *Прилепко А.И.* Метод полугрупп решения обратных, нелокальных и неклассических задач. Прогноз-управление и прогноз-наблюдение эволюционных уравнений. I // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41. № 11. 1560–1571.
3. *Уразаева А.В., Федоров В.Е.* Задачи прогноз-управления для некоторых систем уравнений гидродинамики // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44. № 8. С. 1111–1119.
4. *Уразаева А.В., Федоров В.Е.* О корректности задачи прогноз-управления для некоторых систем уравнений // Мат. заметки. 2009. Т. 85. Вып. 3. С. 440–450.
5. *Prilepko A.I., Orlovskii D.G., Vasin I.A.* Metho ds for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. New York; Basel, 2000.
6. *Favini A., Lorenzi A.* Differential Equations. Inverse and Direct Problems. Boca Raton; London; New York, 2006.
7. *Учайкин В.В.* Метод дробных производных. Ульяновск, 2008.
8. *Tarasov V.E.* Fractional Dynamics: Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fiel ds and Media. New York, 2011.
9. *Kozhanov A.I.* Composite Type Equations and Inverse Problems. Utrecht, 1999.
10. *Пятков С.Г., Абашеева Н.Л.* Разрешимость краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений смешанного типа. Вырожденный случай // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43. № 3. С. 678–693.
11. *Fedorov V.E., Urazaeva A.V.* An inverse problem for linear Sobolev type equations // J. of Inverse and Ill-Posed Problems. 2004. V. 12. P. 387–395.

12. *Pyatkov S.G., Shergin S.N.* Inverse problems for some Sobolev-type mathematical models // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер. Мат. моделирование и программирование. 2016. Т. 9. № 2. С. 75–89.
13. *Fedorov V.E., Ivanova N.D.* Identification problem for a degenerate evolution equation with overdetermination on the solution semigroup kernel // Discr. and Contin. Dynamical Systems. Ser. S. 2016. V. 9. P. 687–696.
14. *Fedorov V.E., Ivanova N.D.* Inverse problem for Oskolkov's system of equations // Math. Methods in the Appl. Sci. 2017. V. 40. № 17. P. 6123–6126.
15. *Fedorov V.E., Ivanova N.D.* Inverse problems for a class of linear Sobolev type equations with overdetermination on the kernel of operator at the derivative // J. of Inverse and Ill-Posed Problems. 2020. V. 28. № 1. P. 53–61.
16. *Федоров В.Е., Гордиевских Д.М.* Разрешающие операторы вырожденных эволюционных уравнений с дробной производной по времени // Изв. вузов. Математика. 2015. № 1. С. 71–83.
17. *Гордиевских Д.М., Федоров В.Е.* Решения начально-краевых задач для некоторых вырожденных систем уравнений дробного порядка по времени // Изв. Иркутск. гос. ун-та. Сер. Математика. 2015. Т. 12. С. 12–22.
18. *Федоров В.Е., Гордиевских Д.М., Плеханова М.В.* Уравнения в банаховых пространствах с вырожденным оператором под знаком дробной производной // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 10. С. 1367–1375.
19. *Plekhanova M.V.* Nonlinear equations with degenerate operator at fractional Caputo derivative // Math. Methods in the Appl. Sci. 2017. V. 40. № 17. P. 6138–6146.
20. *Fedorov V.E., Nazhimov R.R.* Inverse problems for a class of degenerate evolution equations with Riemann–Liouville derivative // Fract. Calc. and Appl. Anal. 2019. V. 22. № 2. P. 271–286.
21. *Федоров В.Е., Нагуманова А.В.* Обратная задача для эволюционного уравнения с дробной производной Герасимова–Капуто в секториальном случае // Изв. Иркутск. гос. ун-та. Сер. Математика. 2019. Т. 28. С. 123–137.
22. *Федоров В.Е., Нагуманова А.В.* Линейные обратные задачи для одного класса вырожденных эволюционных уравнений дробного порядка // Итоги науки и техн. Сер. Совр. математика и её приложения. Темат. обзоры. 2019. Т. 167. С. 97–111.
23. *Глушак А.В.* Обратная задача для абстрактного дифференциального уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу // Соврем. математика. Фунд. направления. 2006. Т. 15. С. 126–141.
24. *Глушак А.В.* Об одной обратной задаче для абстрактного дифференциального уравнения дробного порядка // Мат. заметки. 2010. Т. 87. № 5. С. 684–693.
25. *Orlovsky D.G.* Parameter determination in a differential equation of fractional order with Riemann–Liouville fractional derivative in a Hilbert space // Журн. Сиб. Федер. ун-та. Сер. Математика. Физика. 2015. Т. 8. № 1. P. 55–63.
26. *Fedorov V.E., Ivanova N.D.* Identification problem for degenerate evolution equations of fractional order // Fract. Calc. and Appl. Anal. 2017. V. 20. № 3. P. 706–721.
27. *Герасимов А.Н.* Обобщение линейных законов деформирования и его применение к задачам внутреннего трения // Прикл. математика и механика. 1948. Т. 12. № 3. С. 251–260.
28. *Caputo M., Mainardi F.* A new dissipation model based on memory mechanism // Pure and Appl. Geophysics. V. 91. № 1. P. 134–147.
29. *Rossikhin Y.A.* Reflections on two parallel ways in the progress of fractional calculus in mechanics of solids // Appl. Mech. Rev. 2010. V. 63. № 1.
30. *Новоженова О.Г.* Биография и научные труды Алексея Никифоровича Герасимова. О линейных операторах, упруго-вязкости, элевтерозе и дробных производных. М., 2018.
31. *Sviridyuk G.A., Fedorov V.E.* Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. Utrecht; Boston, 2003.
32. *Plekhanova M.V.* Strong solutions of quasilinear equations in Banach spaces not solvable with respect to the highest-order derivative // Discr. and Contin. Dynamical systems. Ser. S. 2016. V. 9. № 3. P. 833–847.

Челябинский государственный университет,
Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет), г. Челябинск,
Институт математики и механики
им. Н.Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург,
Университет Нови-Сада, г. Нови-Сад, Сербия

Поступила в редакцию 19.06.2020 г.
После доработки 07.07.2020 г.
Принята к публикации 13.10.2020 г.