ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 1, с. 125–129

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.956.3

ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

© 2021 г. А. Т. Асанова

Для системы дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка в прямоугольной области рассматривается начально-краевая задача. С помощью введения новой неизвестной функции исследуемая задача сводится к эквивалентной задаче, состоящей из нелокальной задачи для системы гиперболических уравнений второго порядка с параметрами и интегральных соотношений. Предложен итерационный алгоритм нахождения приближённого решения эквивалентной задачи и доказана его сходимость. Установлены достаточные условия существования единственного классического решения исследуемой задачи, формулируемые в терминах её исходных данных.

DOI: 10.31857/S0374064121010118

1. Постановка задачи. В прямоугольнике $\Omega = [0,T] \times [0,\omega]$ для линейной неоднородной системы n дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка с двумя независимыми переменными

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} = A(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + C(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} + D(t,x)\frac{\partial u}{\partial t} + E(t,x)u + f(t,x) \tag{1.1}$$

рассматривается начально-краевая задача

$$\sum_{j=0}^{m+1}\left\{P_{0,j}(x)\frac{\partial^2 u(t_j,x)}{\partial x^2} + P_{1,j}(x)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x \partial t}\bigg|_{t=t_j} + P_{2,j}(x)\frac{\partial u(t_j,x)}{\partial x} + \right.$$

$$\left. + P_{3,j}(x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\bigg|_{t=t_j} + P_{4,j}(x)u(t_j,x)\right\} = \varphi(x), \quad x \in [0,\omega], \tag{1.2}$$

$$u(t,0) = \psi_1(t), \quad t \in [0,T], \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\bigg|_{x=0} = \psi_2(t), \quad t \in [0,T], \tag{1.4}$$

где $u(t,x) = \operatorname{col}(u_1(t,x), u_2(t,x), \ldots, u_n(t,x))$ – неизвестная функция; $n \times n$-матрицы $A(t,x)$, $B(t,x)$, $C(t,x)$, $D(t,x)$, $E(t,x)$ и n-вектор-функция $f(t,x)$ непрерывны на Ω; $n \times n$-матрицы $P_{i,j}(x)$, $i = \overline{0,4}$, $j = \overline{0,m+1}$, и n-вектор-функция $\varphi(x)$ непрерывны на $[0,\omega]$; $0 = t_0 \leqslant t_1 < \ldots < t_m \leqslant t_{m+1} = T$; n-вектор-функции $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ непрерывно дифференцируемы на $[0,T]$.

Через $C(\Omega,\mathbb{R}^n)$ $(C([0,\omega],\mathbb{R}^n))$ обозначим пространство непрерывных на Ω (на $[0,\omega]$) n-вектор-функций $u(t,x)$ $(\varphi(x))$ с нормой $\|u\|_0 = \max\limits_{(t,x)\in\Omega}\|u(t,x)\|$ $(\|\varphi\|_0 = \max\limits_{x\in[0,\omega]}\|\varphi(x)\|)$, где $\|u(t,x)\| = \max\limits_{i=\overline{1,n}}|u_i(t,x)|$ $(\|\varphi(x)\| = \max\limits_{i=\overline{1,n}}|\varphi_i(x)|)$, а через $C^1([0,T],\mathbb{R}^n)$ – пространство непрерывно дифференцируемых на $[0,T]$ n-вектор-функций $\psi(t)$ с нормой

$$\|\psi\|_1 = \max\Big(\max_{t\in[0,T]}\|\psi(t)\|, \max_{t\in[0,T]}\|\dot\psi(t)\|\Big).$$

Функция $u(t,x) \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$, имеющая в прямоугольнике Ω непрерывные по совокупности переменных частные производные $\partial u(t,x)/\partial x$, $\partial u(t,x)/\partial t$, $\partial^2 u(t,x)/\partial x^2$, $\partial^2 u(t,x)/\partial x \partial t$, $\partial^3 u(t,x)/\partial x^2 \partial t$, называется *классическим решением* задачи (1.1)–(1.4), если она удовлетворяет системе уравнений (1.1) для всех $(t,x) \in \Omega$ и краевым условиям (1.2)–(1.4).

Начально-краевые задачи для систем дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка возникают при исследовании различных явлений естествознания и техники (из многочисленных публикаций, в которых приводятся приложения таких систем, укажем только монографии [1–4]).

В настоящей работе получены достаточные условия существования и единственности классического решения задачи (1.1)–(1.4) и предложен метод построения её приближённых решений. Для этого мы используем метод введения функциональных параметров [5]. С помощью этого метода рассматриваемая начально-краевая задача для системы дифференциальных уравнений третьего порядка сводится к эквивалентной задаче, включающей нелокальную задачу для системы гиперболических уравнений второго порядка относительно параметр-функции и интегральные соотношения. Построен итерационный алгоритм нахождения приближённых решений эквивалентной задачи и установлена его сходимость. Достаточные условия однозначной разрешимости начально-краевых задач (1.1)–(1.4) формулируются в терминах коэффициентов системы и матриц краевых условий. Результаты работ [6, 7] распространяются на класс начально-краевых задач для систем дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка. Отметим, что ранее начально-краевые задачи типа (1.1)–(1.4) рассматривались в одномерном случае.

2. Редукция к эквивалентной задаче и основное утверждение. Введём новую неизвестную функцию $v(t,x) = \partial u(t,x)/\partial x$. Тогда задача (1.1)–(1.4) перейдёт в эквивалентную задачу

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} = A(t,x)\frac{\partial v}{\partial x} + B(t,x)\frac{\partial v}{\partial t} + C(t,x)v + f(t,x) + F\left(t,x,u,\frac{\partial u}{\partial t}\right), \tag{2.1}$$

$$\sum_{j=0}^{m+1}\left\{P_{0,j}(x)\frac{\partial v(t_j,x)}{\partial x} + P_{1,j}(x)\frac{\partial v(t,x)}{\partial t}\bigg|_{t=t_j} + P_{2,j}(x)v(t_j,x)\right\} =$$

$$= \varphi(x) - \Phi\left(x,u,\frac{\partial u}{\partial t}\right), \quad x \in [0,\omega], \tag{2.2}$$

$$v(t,0) = \psi_2(t), \quad t \in [0,T], \tag{2.3}$$

$$u(t,x) = \psi_1(t) + \int_0^x v(t,\xi)\,d\xi, \quad \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \dot{\psi}_1(t) + \int_0^x \frac{\partial v(t,\xi)}{\partial t}\,d\xi, \quad (t,x) \in \Omega, \tag{2.4}$$

где

$$F\left(t,x,u,\frac{\partial u}{\partial t}\right) = D(t,x)\frac{\partial u}{\partial t} + E(t,x)u, \quad \Phi\left(x,u,\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \sum_{j=0}^{m+1}\left\{P_{3,j}(x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\bigg|_{t=t_j} + P_{4,j}(x)u(t_j,x)\right\}.$$

В соотношениях (2.4) учтены условия (1.3).

Пара функций $(v(t,x), u(t,x))$, непрерывных на Ω, называется *решением* задачи (2.1)–(2.4), если функция $v(t,x) \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$ имеет непрерывные частные производные $\partial v(t,x)/\partial x$, $\partial v(t,x)/\partial t$, $\partial^2 v(t,x)/\partial x \partial t$ на Ω и удовлетворяет нелокальной задаче для системы гиперболических уравнений второго порядка (2.1)–(2.3), где функции $u(t,x)$ и $v(t,x)$ связаны интегральным соотношением (2.4).

Пусть $u^*(t,x)$ – классическое решение задачи (1.1)–(1.4). Тогда пара $(v^*(t,x), u^*(t,x))$, где $v^*(t,x) = \partial u^*(t,x)/\partial x$, будет решением задачи (2.1)–(2.4). Обратно, если пара $(\widetilde{v}(t,x), \widetilde{u}(t,x))$ – решение задачи (2.1)–(2.4), то функция $\widetilde{u}(t,x)$ будет классическим решением задачи (1.1)–(1.4).

Если известны функция $u(t,x)$ и её производная $\partial u(t,x)/\partial t$, то из нелокальной задачи для системы гиперболических уравнений (2.1)–(2.3) находим функцию $v(t,x)$ и её производные. Если известна функция $v(t,x)$, то из интегральных соотношений (2.4) находим функцию $u(t,x)$ и её производную $\partial u(t,x)/\partial t$. Так как неизвестными являются как функция $u(t,x)$, так и функция $v(t,x)$, то применяется итерационный процесс, строящийся по следующему алгоритму.

Шаг 0. 1) Положим $u(t,x)=\psi_1(t)$, $\partial u(t,x)/\partial t=\dot\psi_1(t)$ в правой части системы уравнений (2.1) и в соотношении (2.2); затем, решая нелокальную задачу (2.1)–(2.3), находим $v^{(0)}(t,x)$ и её производные $\partial v^{(0)}(t,x)/\partial x$, $\partial v^{(0)}(t,x)/\partial t$ для всех $(t,x)\in\Omega$.

2) Из интегральных соотношений (2.4) при $v(t,x)=v^{(0)}(t,x)$, $\partial v(t,x)/\partial t=\partial v^{(0)}(t,x)/\partial t$ определяем $u^{(0)}(t,x)$ и $\partial u^{(0)}(t,x)/\partial t$ для всех $(t,x)\in\Omega$.

Шаг m ($m\in\mathbb{N}$). 1) Положим $u(t,x)=u^{(m-1)}(t,x)$, $\partial u(t,x)/\partial t=\partial u^{(m-1)}(t,x)/\partial t$ в правой части системы уравнений (2.1) и в соотношении (2.2); затем, решая нелокальную задачу (2.1)–(2.3), находим $v^{(m)}(t,x)$ и её производные $\partial v^{(m)}(t,x)/\partial t$, $\partial v^{(m)}(t,x)/\partial x$ для всех $(t,x)\in\Omega$.

2) Из интегральных соотношений (2.4) при $v(t,x)=v^{(m)}(t,x)$, $\partial v(t,x)/\partial t=\partial v^{(m)}(t,x)/\partial t$ определяем $u^{(m)}(t,x)$ и $\partial u^{(m)}(t,x)/\partial t$ для всех $(t,x)\in\Omega$; $m=1,2,\ldots$

Таким образом, построенный алгоритм состоит из двух частей: 1) при фиксированных $u(t,x)$ решаются нелокальные задачи для системы гиперболических уравнений второго порядка относительно функции $v(t,x)$; 2) при фиксированных $v(t,x)$ из интегрального соотношения определяются функции $u(t,x)$.

Пусть $U_s(t,x)$ – матрица, имеющая вид

$$U_s(t,x)=I+\int\limits_0^t A(\tau_1,x)\,d\tau_1+\ldots+\int\limits_0^t A(\tau_1,x)\cdots\int\limits_0^{\tau_{s-2}} A(\tau_{s-1},x)\int\limits_0^{\tau_{s-1}} A(\tau_s,x)\,d\tau_s\cdots d\tau_1,\quad s\in\mathbb{N}.$$

Введём обозначения $\alpha(x)=\max\limits_{t\in[0,T]}\|A(t,x)\|$, $P(x)=\sum_{j=1}^{m+1}\|P_{0,j}(x)\|$, $x\in[0,\omega]$. Следующее утверждение устанавливает условия однозначной разрешимости задачи (1.1)–(1.4), одновременно обеспечивающие реализуемость и сходимость приведённого выше алгоритма.

Теорема. *Предположим, что при некотором $s_0>0$ для любого $s>s_0$ $n\times n$-матрица $Q_s(x)=P_{0,0}(x)+\sum_{j=1}^{m+1}P_{0,j}(x)U_s(t_j,x)$ обратима при всех $x\in[0,\omega]$ и справедливы неравенства:*

1) $\|[Q_s(x)]^{-1}\|\leqslant\gamma_s(x)$, где $\gamma_s(x)$ – положительная непрерывная функция на $[0,\omega]$;

2) $q_s(x)=\gamma_s(x)P(x)[e^{\alpha(x)T}-1-\sum_{j=1}^{s}[\alpha(x)T]^j/(j!)]\leqslant\chi<1$, где $\chi=\mathrm{const}$.

Тогда начально-краевая задача (1.1)–(1.4) имеет единственное классическое решение $u^*(t,x)\in C(\Omega,\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. По предположению теоремы $n\times n$-матрица $Q_s(x)$ обратима при всех $x\in[0,\omega]$ и справедливы неравенства 1), 2). Поэтому нелокальная задача для системы гиперболических уравнений

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial t}=A(t,x)\frac{\partial v}{\partial x}+B(t,x)\frac{\partial v}{\partial t}+C(t,x)v+F_0(t,x),\tag{2.5}$$

$$\sum_{j=0}^{m+1}\left\{P_{0,j}(x)\frac{\partial v(t_j,x)}{\partial x}+P_{1,j}(x)\frac{\partial v(t,x)}{\partial t}\bigg|_{t=t_j}+P_{2,j}(x)v(t_j,x)\right\}=\varphi(x),\quad x\in[0,\omega],\tag{2.6}$$

$$v(t,0)=\psi_2(t),\quad t\in[0,T],\tag{2.7}$$

имеет единственное классическое решение для любых $F_0(t,x)\in C(\Omega,\mathbb{R}^n)$, $\varphi(x)\in C([0,\omega],\mathbb{R}^n)$ и $\psi_2(t)\in C^1([0,T],\mathbb{R}^n)$ [7].

Используем эквивалентность задач (1.1)–(1.4) и (2.1)–(2.4). Решение задачи (2.1)–(2.4) – пару функций $(v(t,x),u(t,x))$ – найдём согласно приведённому выше алгоритму. Возьмём функцию $\psi_1(t)$ за начальное приближение $u(t,x)$, тогда функцию $v^{(0)}(t,x)$ найдём, решая задачу

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial t}=A(t,x)\frac{\partial v}{\partial x}+B(t,x)\frac{\partial v}{\partial t}+C(t,x)v+f(t,x)+F(t,x,\psi_1,\dot\psi_1), \tag{2.8}$$

$$\sum_{j=0}^{m+1}\left\{P_{0,j}(x)\frac{\partial v(t_j,x)}{\partial x}+P_{1,j}(x)\frac{\partial v(t,x)}{\partial t}\bigg|_{t=t_j}+P_{2,j}(x)v(t_j,x)\right\}=$$

$$=\varphi(x)-\Phi(x,\psi_1,\dot\psi_1),\quad x\in[0,\omega], \tag{2.9}$$

$$v(t,0)=\psi_2(t),\quad t\in[0,T]. \tag{2.10}$$

При условиях 1), 2) теоремы задача (2.8)–(2.10) имеет единственное классическое решение $v^{(0)}(t,x)$. Тогда из интегральных соотношений (2.4) определяем $u^{(0)}(t,x)$ и её производную $\partial u^{(0)}(t,x)/\partial t$ при $v(t,x)=v^{(0)}(t,x)$, $\partial v(t,x)/\partial t=\partial v^{(0)}(t,x)/\partial t$.

Соответственно на $(m-1)$-м шаге алгоритма находим $v^{(m-1)}(t,x)$ и $u^{(m-1)}(t,x)$ для всех $(t,x)\in\Omega$. Тогда $v^{(m)}(t,x)$ находится как решение задачи (2.1)–(2.3), в которой $u(t,x)=u^{(m-1)}(t,x)$, $\partial u(t,x)/\partial t=\partial u^{(m-1)}(t,x)/\partial t$, $m=1,2,\ldots$

Если найдена функция $v^{(m)}(t,x)$, то следующее приближение функции $u(t,x)$ и её производной $\partial u(t,x)/\partial t$ определяется из интегральных соотношений (2.4):

$$u^{(m)}(t,x)=\psi_1(t)+\int_0^x v^{(m)}(t,\xi)\,d\xi,\quad \frac{\partial u^{(m)}(t,x)}{\partial t}=\dot\psi_1(t)+\int_0^x\frac{\partial v^{(m)}(t,\xi)}{\partial t}\,d\xi,\quad (t,x)\in\Omega.$$

Введём обозначения

$$\Delta_1^{(m)}(t,x)=v^{(m)}(t,x)-v^{(m-1)}(t,x),\quad \Delta_2^{(m)}(t,x)=\frac{\partial v^{(m)}(t,x)}{\partial t}-\frac{\partial v^{(m-1)}(t,x)}{\partial t},$$

$$\Delta_3^{(m)}(t,x)=u^{(m)}(t,x)-u^{(m-1)}(t,x),\quad \Delta_4^{(m)}(t,x)=\frac{\partial u^{(m)}(t,x)}{\partial t}-\frac{\partial u^{(m-1)}(t,x)}{\partial t},\quad (t,x)\in\Omega.$$

Тогда для них будут справедливы неравенства

$$\max\left(\max_{t\in[0,T]}\|\Delta_1^{(m+1)}(t,x)\|,\max_{t\in[0,T]}\|\Delta_2^{(m+1)}(t,x)\|\right)\leqslant$$

$$\leqslant Hd(x)\max\left(\max_{t\in[0,T]}\|\Delta_3^{(m)}(t,x)\|,\max_{t\in[0,T]}\|\Delta_4^{(m)}(t,x)\|\right),$$

$$\max\left(\max_{t\in[0,T]}\|\Delta_3^{(m)}(t,x)\|,\max_{t\in[0,T]}\|\Delta_4^{(m)}(t,x)\|\right)\leqslant\int_0^x\max\left(\max_{t\in[0,T]}\|\Delta_1^{(m)}(t,\xi)\|,\max_{t\in[0,T]}\|\Delta_2^{(m)}(t,\xi)\|\right)d\xi,$$

где

$$H=\max\{e^{H_0H_1\omega}[1+\omega H_0],H_2[H_1(1+\omega H_0)+1]\},\quad H_0=\max(H_2,\|A\|_0H_2+1),$$

$$H_1=\max_{x\in[0,\omega]}\max\left\{\max_{t\in[0,T]}\|B(t,x)\|+\max_{t\in[0,T]}\|C(t,x)\|,\sum_{j=0}^{m+1}(\|P_{1,j}(x)\|+\|P_{2,j}(x)\|)\right\},$$

$$H_2=\max_{x\in[0,\omega]}[k_1(x,s)+k_2(x,s)],\quad d(x)=\max_{t\in[0,T]}\|D(t,x)\|+\max_{t\in[0,T]}\|E(t,x)\|,\quad d_0=\max_{x\in[0,\omega]}d(x),$$

$$k_1(x,s)=\frac{\gamma_s(x)}{1-q_s(x)}P(x)\frac{[\alpha(x)T]^s}{s!}k_0(x,s)+T\gamma_s(x)\max\left\{1+P(x)\sum_{j=0}^{s-1}\frac{[\alpha(x)T]^j}{j!},\sum_{j=0}^{s-1}\frac{[\alpha(x)T]^j}{j!}\right\},$$

$$k_2(x,s)=\left\{[e^{\alpha(x)T}-1]\frac{\gamma_s(x)}{1-q_s(x)}P(x)\frac{[\alpha(x)T]^s}{s!}+1\right\}k_0(x,s),$$

$$k_0(x,s)=[e^{\alpha(x)T}-1]\gamma_s(x)\max\left\{1+P(x)\sum_{j=0}^{s-1}\frac{[\alpha(x)T]^j}{j!},\sum_{j=0}^{s-1}\frac{[\alpha(x)T]^j}{j!}\right\}T+Te^{\alpha(x)T};$$

все эти величины не зависят от f, ψ_1, ψ_2 и φ.

Отсюда вытекает основное неравенство

$$\max\left(\max_{t\in[0,T]}\|\Delta_1^{(m+1)}(t,x)\|,\max_{t\in[0,T]}\|\Delta_2^{(m+1)}(t,x)\|\right)\leqslant$$

$$\leqslant Hd(x)\int_0^x\max\left(\max_{t\in[0,T]}\|\Delta_1^{(m)}(t,\xi)\|,\max_{t\in[0,T]}\|\Delta_2^{(m)}(t,\xi)\|\right)d\xi. \tag{2.11}$$

Из неравенства (2.11) следует, что последовательности $\{v^{(m)}(t,x)\}$ и $\{\partial v^{(m)}(t,x)/\partial t\}$ сходятся в пространстве $C(\Omega,\mathbb{R}^n)$ при $m\to\infty$ к функциям $v^*(t,x)$ и $w^*(t,x)$ соответственно. Предельные функции $v^*(t,x)$ и $w^*(t,x)$ непрерывны на Ω, кроме того, $w^*(t,x)=\partial v^*(t,x)/\partial t$ для всех $(t,x)\in\Omega$. Из неравенства (2.10) вытекает равномерная сходимость последовательностей $\{u^{(m)}(t,x)\}$ и $\{\partial u^{(m)}(t,x)/\partial t\}$ на Ω при $m\to\infty$ к функциям $u^*(t,x)$ и $\partial u^*(t,x)/\partial t$ соответственно. Тогда пара функций $(v^*(t,x),u^*(t,x))$ является решением задачи (2.1)–(2.4) и удовлетворяет неравенству

$$\max\{\|v^*\|_0,\|u^*\|_0\}\leqslant(1+\omega)e^{Hd_0\omega}\max\{\|f\|_0,\|\psi_1\|_1,\|\psi_2\|_1,\|\varphi\|_0\}. \tag{2.12}$$

Пусть теперь пара $(\widetilde{v}(t,x),\widetilde{u}(t,x))$ – решение задачи (2.1)–(2.4), где $f(t,x)=0$, $\psi_1(t)=0$, $\psi_2(t)=0$ и $\varphi(x)=0$ для всех $(t,x)\in\Omega$. Тогда из однозначной разрешимости задачи (2.5)–(2.7) и условий (2.4) заключаем, что $\widetilde{v}(t,x)=0$ и $\widetilde{u}(t,x)=0$ для всех $(t,x)\in\Omega$. Поэтому из оценки (2.12) вытекает, что задача (2.1)–(2.4) однозначно разрешима. Из эквивалентности задач (2.1)–(2.4) и (1.1)–(1.4) следует однозначная разрешимость задачи (1.1)–(1.4). Классическое решение $u^*(t,x)\in C(\Omega,\mathbb{R}^n)$ задачи (1.1)–(1.4) удовлетворяет неравенству

$$\|u^*\|_0\leqslant(1+\omega)e^{Hd_0\omega}\max\{\|f\|_0,\|\psi_1\|_1,\|\psi_2\|_1,\|\varphi\|_0\}.$$

Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Республики Казахстан на 2020–2022 гг. (грант AP08955461).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пташник Б.И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. Киев, 1984.
2. *Нахушев А.М.* Уравнения математической биологии. М., 1995.
3. *Жегалов В.И., Миронов А.Н.* Дифференциальные уравнения со старшими частными производными. Казань, 2001.
4. *Нахушев А.М.* Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М., 2006.
5. *Asanova A.T., Dzhumabaev D.S.* Well-posedness of nonlocal boundary value problems with integral condition for the system of hyperbolic equations // J. Math. Anal. and Appl. 2013. V. 402. № 1. P. 167–178.
6. *Assanova A.T., Imanchiev A.E.* On conditions of the solvability of nonlocal multi-point boundary value problems for quasi-linear systems of hyperbolic equations // Eurasian Math. J. 2015. V. 6. № 4. P. 19–28.
7. *Asanova A.T.* Multipoint problem for a system of hyperbolic equations with mixed derivative // J. of Math. Sci. (United States). 2016. V. 212. № 3. P. 213–233.

Институт математики и математического моделирования,
г. Алматы, Республика Казахстан

Поступила в редакцию 28.02.2019 г.
После доработки 02.09.2020 г.
Принята к публикации 13.10.2020 г.