ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 1, с. 130–134

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.984.5

ОТСУТСТВИЕ ВЫРОЖДЕННЫХ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ ОДНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

© 2021 г. А. М. Ахтямов

Приведены условия, которым должны удовлетворять коэффициенты линейного дифференциального уравнения второго порядка, зависящие от спектрального параметра, чтобы у него не существовало вырожденных двухточечных краевых условий.

DOI: 10.31857/S037406412101012X

Введение. Если характеристический определитель $\Delta(\lambda)$ краевой задачи или дифференциального оператора [1, с. 26] не равен тождественно некоторой постоянной, то для этих задачи или оператора их краевые условия называются *невырожденными краевыми условиями* [2, с. 35], в противном случае, т.е. когда $\Delta(\lambda) \equiv \mathrm{const}$, они называются *вырожденными*.

В работе [3] М.Х. Стоуном показано, что если в задаче Штурма–Лиувилля

$$y'' + q(x)y + \lambda y = 0,$$

$$y(0) - y(\pi) = 0,$$

$$y'(0) + y'(\pi) = 0,$$

рассматриваемой на отрезке $[0, \pi]$, потенциальная функция $q(x)$ является симметричной (т.е. $q(x) = q(\pi - x)$ для любого $x \in [0, \pi]$), то характеристический определитель этой краевой задачи тождественно нулевой, а значит, её спектр полностью заполняет всю плоскость.

В монографии [3, с. 27] показано, что если коэффициенты обыкновенного линейного дифференциального уравнения являются непрерывными, то для спектра его краевой задачи имеет место следующая альтернатива: либо 1) существует не более счётного числа собственных значений, не имеющих предельных точек в $\mathbb{C}$, либо 2) каждое $\lambda \in \mathbb{C}$ есть собственное значение.

Прямые и обратные задачи с нераспадающимися краевыми условиями для случая 1) достаточно хорошо изучены (см., например, [4, 5]). Вырожденный случай 2) изучен значительно меньше.

В работах [6] и [7] описаны все вырожденные двухточечные краевые условия для оператора D^2 и для оператора Штурма–Лиувилля соответственно. Эти результаты обобщены на оператор диффузии в работе [8]. Именно, в ней показано, что у рассматриваемого на отрезке $[0, \pi]$ уравнения

$$y'' + (\lambda^2 - 2\lambda p(x) - q(x))y = 0,$$

в котором λ – спектральный параметр, а $p(\cdot) \in W_2^1(0, \pi)$, $q(\cdot) \in L_2(0, \pi)$ – вещественнозначные функции, в случае, если $p(x) \neq p(\pi - x)$ или $q(x) \neq q(\pi - x)$ для x из некоторого подынтервала отрезка $[0, \pi]$, двухточечных краевых условий с $\Delta(\lambda) \equiv 0$ не существует и единственно возможными вырожденными двухточечными краевыми условиями являются условия Коши: $y(0) = y'(0) = 0$ и $y(\pi) = y'(\pi) = 0$. В случае же $p(x) = p(\pi - x)$ и $q(x) = q(\pi - x)$, $x \in [0, \pi]$, тождество $\Delta(\lambda) \equiv 0$ реализуется только для условий $y^{(i)}(0) + (-1)^i y^{(i)}(\pi) = 0$, $i = 0, 1$, и $y^{(i)}(0) + (-1)^{i+1} y^{(i)}(\pi) = 0$, $i = 0, 1$ (названных в [7] ложнопериодическими условиями), а тождество $\Delta(\lambda) \equiv \mathrm{const} \neq 0$ – только для условий $y^{(i)}(0) + (-1)^i a y^{(i)}(\pi) = 0$, $i = 0, 1$, и $y^{(i)}(0) + (-1)^{i+1} a y^{(i)}(\pi) = 0$, $i = 0, 1$, где $a \neq 1$ (названных в [7] обобщёнными условиями Коши).

Первые результаты для дифференциальных операторов произвольного чётного порядка получены в работе [9] (см. также монографию [10]). В этой работе приведены примеры дифференциальных операторов любого чётного порядка n, спектр которых заполняет всю комплексную плоскость. Краевые условия у этих операторов имели следующий вид:

$$y^{(i)}(0) + (-1)^i y^{(i)}(\pi) = 0, \quad i = \overline{0, n-1}.$$

Возникает естественный вопрос, существуют ли другие, помимо приведённых в [9], примеры операторов чётного порядка, спектр которых заполняет всю комплексную плоскость.

В работе [11] дан утвердительный ответ на поставленный вопрос. Более того, для оператора D^4 описаны все 12 возможных классов двухточечных краевых задач на собственные значения, спектр которых заполняет всю комплексную плоскость. Каждый из этих классов содержит произвольную константу. Поэтому для оператора дифференцирования четвёртого порядка имеется континуум краевых задач со спектром, полностью заполняющим всю комплексную плоскость.

До недавного времени оставался открытым вопрос, сформулированный, в частности, в монографии [10]: существуют ли спектральные задачи с дифференциальным уравнением нечётного порядка, спектр которых заполняет всю комплексную плоскость. Примеры таких операторов для любого нечётного порядка приведены в работе [12].

В работе [13] показано, что если n – чётное число, большее двух, а $d \neq \pm 1$, то характеристический определитель задачи

$$y^{(n)}(x) + \sum_{m=1}^{n} p_m(x) y^{(n-m)}(x) + \lambda y(x) = 0,$$

$$y^{(n-j)}(0) + d(-1)^{j+1} y^{(n-j)}(\pi) = 0, \quad j = \overline{1, n},$$

где $p_m(\cdot) \in L_1(0, \pi)$, тождественно равен константе, отличной от нуля.

В заключение отметим, что для оператора Штурма–Лиувилля с вырожденными краевыми условиями достаточно хорошо изучены [14, 15] вопросы полноты и базисности.

1. Случай, когда корни характеристического уравнения – константы. Рассмотрим спектральную задачу, порождённую уравнением

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p_1(x, \lambda)\frac{dy}{dx} + p_2(x, \lambda) y = 0 \tag{1}$$

и краевыми условиями

$$U_j(y) \equiv a_{j1} y(0) + a_{j2} y(1) + a_{j3} y'(0) + a_{j4} y'(1) = 0, \quad j = 1, 2, \tag{2}$$

здесь λ – спектральный параметр, $x \in [0, 1]$, $a_{jk} \in \mathbb{C}$ $(j = 1, 2,\ k = \overline{1, 4})$, а функции $p_i(x, \lambda)$ $(i = 1, 2)$ имеют следующий вид:

$$p_1(x, \lambda) = \lambda p_{10} + p_{11}(x), \quad p_2(x, \lambda) = \lambda^2 p_{20} + \lambda p_{21}(x) + p_{22}(x),$$

где $p_{i1}(x) \in C^1[0, 1]$, $p_{22}(x) \in C[0, 1]$, $p_{i0} = \mathrm{const}$, $i = 1, 2$.

Обозначим матрицу, образованную коэффициентами a_{jk} краевых условий (2) через A, а её миноры, составленные из l-го и m-го столбцов, через M_{lm}, т.е.

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{Vmatrix}, \quad M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{1l} & a_{1m} \\ a_{2l} & a_{2m} \end{vmatrix}, \quad l, m = \overline{1, 4}.$$

На протяжении всей статьи будем считать, что ранг матрицы A равен двум:

$$\operatorname{rank} A = 2. \tag{3}$$

Пусть также выполнены следующие три условия:
1) $p_{10}^2 - 4p_{20} \neq 0$;
2) $p_{10} \neq 0$;
3) $p_{20} \neq 0$.

Вследствие условия 1) характеристическое уравнение $\omega^2 + p_{10}\omega + p_{20} = 0$ имеет различные корни $\omega_1 \neq \omega_2$. Поэтому (см. [16]) уравнение (1) имеет фундаментальную систему решений $\{y_1(x,\lambda),\ y_2(x,\lambda)\}$ такую, что эти решения и их производные допускают при $\lambda \to +\infty$, $\lambda \in \mathbb{R}$, асимптотические разложения

$$y_k(x,\lambda) = e^{\omega_k \lambda x}(u_{k0}(x) + \lambda^{-1}u_{k1}(x) + \lambda^{-2}u_{k2}(x) + \mathcal{O}(\lambda^{-3})), \quad k = 1,2, \tag{4}$$

$$\frac{dy_k(x,\lambda)}{dx} = \omega_k \lambda e^{\omega_k \lambda x}\left(u_{k0}(x) + \lambda^{-1}(u_{k1}(x) + \frac{1}{\omega_k}u'_{k0}(x)) + \mathcal{O}(\lambda^{-2})\right), \quad k = 1,2, \tag{5}$$

где $u_{k0}(x) \neq 0$, $k = 1,2$, при всех $x \in [0,1]$. Здесь и ниже через $\mathcal{O}(\lambda^{-m})$, где $m \in \mathbb{N}$, обозначается функция от x и λ, модуль которой не превосходит $\mathrm{const}\ |\lambda|^{-m}$ для всех $x \in$ $\in [0,1]$ и достаточно больших $|\lambda|$.

В дальнейшем нам понадобятся следующие обозначения:

$$f_1(\lambda) = y_1(0,\lambda)y_2(1,\lambda) - y_2(0,\lambda)y_1(1,\lambda), \quad f_2(\lambda) = y_1(0,\lambda)y'_2(0,\lambda) - y'_1(0,\lambda)y_2(0,\lambda),$$

$$f_3(\lambda) = y_1(0,\lambda)y'_2(1,\lambda) - y_2(0,\lambda)y'_1(1,\lambda), \quad f_4(\lambda) = y_1(1,\lambda)y'_2(0,\lambda) - y'_1(0,\lambda)y_2(1,\lambda),$$

$$f_5(\lambda) = y_1(1,\lambda)y'_2(1,\lambda) - y_2(1,\lambda)y'_1(1,\lambda), \quad f_6(\lambda) = y'_1(0,\lambda)y'_2(1,\lambda) - y'_2(0,\lambda)y'_1(1,\lambda). \tag{6}$$

Очевидно, что $f_2(\lambda) \neq 0$ для любого $\lambda \in \mathbb{C}$.

Обозначим через $z_i(x,\lambda)$, $i = 1,2$, решения уравнения (1), удовлетворяющие начальным условиям $z_1(0,\lambda) = 1$, $z'_1(0,\lambda) = 0$ и $z_2(0,\lambda) = 0$, $z'_2(0,\lambda) = 1$. Отсюда и из линейной независимости функций $y_1(x,\lambda)$ и $y_2(x,\lambda)$ вытекают тождества

$$z_1(x,\lambda) = \frac{y'_2(0,\lambda)y_1(x,\lambda) - y'_1(0,\lambda)y_2(x,\lambda)}{f_2(\lambda)}, \quad z_2(x,\lambda) = \frac{y_1(0,\lambda)y_2(x,\lambda) - y_2(0,\lambda)y_1(x,\lambda)}{f_2(\lambda)}. \tag{7}$$

Как несложно убедиться, воспользовавшись формулами (7), характеристический определитель $\Delta(\lambda) = \det\,(U_k(z_i))_{k,i=1}^2$ задачи (1), (2) имеет следующий вид:

$$\Delta(\lambda) = M_{12}\frac{f_1(\lambda)}{f_2(\lambda)} + M_{13} + M_{14}\frac{f_3(\lambda)}{f_2(\lambda)} + M_{23}\frac{f_4(\lambda)}{f_2(\lambda)} + M_{24}\frac{f_5(\lambda)}{f_2(\lambda)} + M_{34}\frac{f_6(\lambda)}{f_2(\lambda)}. \tag{8}$$

Из вида функций $f_i(\lambda)$, $i = \overline{1,6}$, и представлений (4), (5) следует [17], что тождество $\Delta(\lambda) \equiv \mathrm{const} \neq 0$ невозможно. В работе [17] доказана линейная независимость семейства функций $\{f_i(\lambda) : i = \overline{1,6}\}$, а значит, тождество $\Delta(\lambda) \equiv 0$ возможно тогда и только тогда, когда выполняются равенства $M_{12} = M_{13} = M_{14} = M_{23} = M_{24} = M_{34} = 0$, но эти равенства противоречат условию (3). Поэтому справедлива

Теорема 1. *Задача (1), (2) не имеет вырожденных краевых двухточечных условий.*

2. Случай, когда корни характеристического уравнения – переменные. Рассмотрим спектральную задачу, порождённую уравнением

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda q_1(x,\lambda)\frac{dy}{dx} + \lambda^2 q_2(x,\lambda)y = 0 \tag{9}$$

и краевыми условиями (2), где для коэффициентов $q_i(x,\lambda)$ справедливо представление

$$q_i(x,\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^{-j} p_{ij}(x), \quad i = 1,2, \tag{10}$$

для всех $x \in [0,1]$ и $\lambda \in \Omega_R$ при некотором $R > 0$ (здесь и ниже $\Omega_R = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \geqslant R\}$) и хотя бы одна из функций $p_{i0}(x)$, $i = 1,2$, не равна тождественно нулю на $[0,1]$.

Предположим, что выполняются следующие условия:

а) функции $p_{ij}(x)$, $i = 1,2$, $j = 0,1,\ldots,$ (см. представление (10)) непрерывны и ограничены в совокупности на отрезке $[0,1]$;

б) корни $\omega_1(x)$, $\omega_2(x)$ характеристического уравнения $\omega^2 + p_{10}(x)\omega + p_{20}(x) = 0$ различны между собой при всех значениях $x \in (0,1)$;

в) функции $dp_{i0}(x)/dx$ и $p_{i1}(x)$, $i = 1,2$, имеют непрерывные производные в промежутке $(0,1)$;

г) существует бесконечная подобласть $\widetilde{\Omega}_R$ области Ω_R, в которой при всех значениях $x \in [0,1]$ выполняются неравенства $\operatorname{Re}(\lambda\omega_1(x)) \leqslant \operatorname{Re}(\lambda\omega_2(x))$;

д) справедливы соотношения

$$\int_0^1 \omega_i(x)\,dx \neq 0, \quad i = 1,2, \quad \text{и} \quad \int_0^1 (\omega_1(x) \pm \omega_2(x))\,dx \neq 0;$$

е) $\omega_1(1)\omega_2(0) \neq 0$ или $\omega_1(0)\omega_2(1) \neq 0$;

ж) $\omega_1(0)\omega_1(1) - \omega_2(0)\omega_2(1) \neq 0$.

При выполнении условий а)–г) дифференциальное уравнений (9) имеет в области $\widetilde{\Omega}_R$ фундаментальную систему решений $\{y_1(x,\lambda), y_2(x,\lambda)\}$, допускающих представление

$$y_k(x,\lambda) = e^{\lambda\int_0^x \omega_k(\tau)d\tau}(u_{k0}(x) + \lambda^{-1}u_{k1}(x) + \lambda^{-2}u_{k2}(x) + \mathcal{O}(\lambda^{-3})), \quad k = 1,2, \tag{11}$$

где $u_{k0}(x) \neq 0$, $k = 1,2$, при всех $x \in [0,1]$; причём представления (11) можно дифференцировать с точностью до первых двух членов.

Характеристический определитель $\Delta(\lambda)$ задачи (2), (9) задаётся равенством (8), в котором функции $f_i(\lambda)$, $i = \overline{1,6}$, определяются формулами (6) с функциями (11).

Из вида функций $\{f_i(\lambda)\}$, $i = \overline{1,6}$, следует [17], что тождество $\Delta(\lambda) \equiv \text{const} \neq 0$ невозможно. В работе [17] доказано, что функции $\{f_i(\lambda) : i = \overline{1,6}\}$, заданные равенствами (6), (11), являются линейно независимыми, поэтому тождество $\Delta(\lambda) \equiv 0$ возможно тогда и только тогда, когда выполняются равенства $M_{12} = M_{13} = M_{14} = M_{23} = M_{24} = M_{34} = 0$, но эти равенства противоречат условию (3). Поэтому имеет место

Теорема 2. *Задача (2), (9) не имеет вырожденных краевых двухточечных условий.*

Работа выполнена за счёт средств государственного бюджета по госзаданию (проект 0246-2019-0088) и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 18-51-06002-Аз_а, 18-01-00250-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М., 1969.
2. *Марченко В.А.* Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев, 1977.
3. *Stone M.H.* Irregular differential systems of order two and the related expansion problems // Trans. Amer. Math. Soc. 1927. V. 29. P. 23–53.
4. *Ширяев Е.А., Шкаликов А.А.* Регулярные и вполне регулярные дифференциальные операторы // Мат. заметки. 2007. Т. 81. Вып. 4. С. 636–640.
5. *Sadovnichii V.A., Sultanaev Ya.T., Akhtyamov A.M.* General inverse Sturm–Liouville problem with symmetric potential // Azerbaijan J. of Math. 2015. V. 5. № 2. P. 96–108.
6. *Lang P., Locker J.* Spectral theory of two-point differential operators determined by D^2. I. Spectral properties // J. of Math. Anal. and Appl. 1989. V. 141. № 2. P. 538–558.
7. *Ахтямов А.М.* О вырожденных краевых условиях в задаче Штурма–Лиувилля // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 8. С. 1121–1123.
8. *Ахтямов А.М.* Вырожденные краевые условия оператора диффузии // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 11. С. 1546–1549.

9. *Садовничий В.А., Кангужин Б.Е.* О связи между спектром дифференциального оператора с симметрическими коэффициентами и краевыми условиями // Докл. АН СССР. 1982. Т. 267. № 2. С. 310–313.
10. *Locker J.* Eigenvalues and Completeness for Regular and Simply Irregular Two-Point Differential Operators (Mem. Amer. Math. Soc.). Providence, 2006.
11. *Akhtyamov A.M.* On degenerate boundary conditions for operator D^4 // Springer Proc. in Math. and Stat. 2017. V. 216. P. 195–203.
12. *Ахтямов А.М.* О спектре дифференциального оператора нечётного порядка // Мат. заметки. 2017. Т. 101. Вып. 5. С. 643–646.
13. *Makin A.* Two-point boundary-value problems with nonclassical asymptotics on the spectrum // Electr. J. of Differ. Equat. 2018. V. 95. P. 1–7.
14. *Маламуд М.М.* О полноте системы корневых векторов оператора Штурма–Лиувилля с общими краевыми условиями // Функц. анализ и его приложения. 2008. Т. 42. № 3. С. 45–52.
15. *Макин А.С.* Об обратной задаче для оператора Штурма–Лиувилля с вырожденными краевыми условиями // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 10. С. 1408–1411.
16. *Тамаркин Я.Д.* О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды. Петроград, 1917.
17. *Ахтямов А.М.* О единственности восстановления краевых условий спектральной задачи по её спектру // Фунд. и прикл. математика. 2000. Т. 6. Вып. 4. С. 995–1006.

Башкирский государственный университет, г. Уфа,
Институт механики им. Р.Р. Мавлютова,
Уфимского научного центра РАН

Поступила в редакцию 26.02.2020 г.
После доработки 26.02.2020 г.
Принята к публикации 13.10.2020 г.