

УДК 517.977.57+517.958

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ ДЛЯ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ НЕЛИНЕЙНО-ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

© 2021 г. В. Г. Звягин, А. В. Звягин, Нгуен Минь Хонг

Рассматривается задача оптимального управления с обратной связью для начально-краевой задачи, описывающей движение нелинейно-вязкой жидкости. Доказывается существование оптимального решения, дающего минимум заданному функционалу качества. Для доказательства существования оптимального решения используется аппроксимационно-топологический метод исследования задач гидродинамики.

DOI: 10.31857/S0374064121010131

Введение. Движение несжимаемой нелинейно-вязкой жидкости в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, на промежутке времени $[0, T]$ ($T < \infty$) описывается следующей начально-краевой задачей:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \operatorname{Div} [2\mu(I_2(v))\varepsilon(v)] + \operatorname{grad} p = f, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} v = 0, \quad v|_{t=0} = v_0(x), \quad v|_{\partial\Omega \times [0, T]} = 0, \quad (2)$$

где $v(x, t)$ – вектор-функция скорости частицы жидкости в точке $x \in \Omega$ в момент времени $t \in [0, T]$; p – функция давления в жидкости; f – плотность внешних сил; ε – тензор скоростей деформации $\varepsilon(v) = (\varepsilon_{ij}(v))$, $\varepsilon_{ij}(v) = (\partial v_i / \partial x_j + \partial v_j / \partial x_i) / 2$; тензор $I_2(v)$ определяется равенством $I_2^2(v) = \varepsilon(v) : \varepsilon(v) = \sum_{i,j=1}^n [\varepsilon_{ij}(v)]^2$. Здесь для произвольных квадратных матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одного порядка используется обозначение $A : B := \sum_{i,j=1}^n a_{ij} b_{ij}$, а через $\operatorname{Div} M$ обозначена дивергенция тензора $M = (m_{ij})$, т.е. вектор

$$\operatorname{Div} M := \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial m_{1j}}{\partial x_j}, \dots, \sum_{j=1}^n \frac{\partial m_{nj}}{\partial x_j} \right).$$

Данная математическая модель подробно исследовалась в работах профессора В.Г. Литвинова (см., например, [1]), в которых приведены примеры таких жидкостей и естественные ограничения на вязкость рассматриваемой среды, выраженные через свойства функции $\mu : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$. Эта функция должна быть непрерывно дифференцируема и удовлетворять неравенствам

$$a) \ 0 < C_1 \leq \mu(s) \leq C_2 < \infty; \quad b) \ -s\mu'(s) \leq \mu(s) \quad \text{при} \quad \mu'(s) < 0;$$

$$c) \ |s\mu'(s)| \leq C_3 < \infty.$$

Здесь и далее через C_i обозначаются различные константы.

Вопрос существования решений для данной задачи рассматривался в работах [1–3] и др. В данной работе рассматривается задача оптимального управления с обратной связью для системы (1), (2). Исследованию задач управления посвящено большое количество работ (см. [4–6]). Однако, в то время как управление для линейных систем достаточно хорошо изучено, управление для нелинейных систем остаётся малоисследованной задачей (даже для конечномерных или локальных областей). На практике часто возникает задача управления (оптимального управления) движением жидкости при помощи внешних сил. Обычно при решении таких задач управление выбирается из некоторого заданного (конечного) множества управлений.

В настоящей работе рассматривается задача управления внешними силами, которые зависят от скорости движения жидкости. Такие задачи называются задачами с обратной связью (см., например, [7–9] и приведённую в этих работах библиографию). Эта позволяет более точно выбирать управление, поскольку в данном случае управление выбирается не из конечного набора имеющихся управлений, а принадлежит образу некоторого многозначного отображения (естественно, что на это отображение накладываются некоторые условия), что даёт возможность более точно выбрать управление.

В данной работе изучается вопрос существования решений задачи управления с обратной связью для модели нелинейно-вязкой жидкости (1), (2), а также доказывается существование оптимального решения рассматриваемой задачи, дающего минимум заданному ограниченному функционалу качества.

1. Постановка задачи и основные результаты. Сначала введём основные обозначения и приведём вспомогательные утверждения.

Обозначим: $L_p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, – множество измеримых вектор-функций $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, суммируемых с p -й степенью; $W_p^m(\Omega)$, $m \geq 1$, $p \geq 1$, – пространства Соболева; $C_0^\infty(\Omega)^n$ – пространство бесконечно-дифференцируемых вектор-функций из Ω в $\mathbb{R}^n$ с компактным носителем в Ω . Через $\mathcal{V}$ обозначим множество $\{v \in C_0^\infty(\Omega)^n : \operatorname{div} v = 0\}$. Замыкание множества $\mathcal{V}$ по норме $L_2(\Omega)$ будем обозначать через H , а по норме пространства $W_2^1(\Omega)$ – через V . Введём основное пространство, в котором будут изучаться слабые решения рассматриваемой задачи:

$$W_1 = \{v : v \in L_2(0, T, V) \cap L_\infty(0, T; H), \quad v' \in L_1(0, T, V^*)\}.$$

Пространство W_1 снабжено нормой $\|v\|_{W_1} = \|v\|_{L_2(0, T, V)} + \|v\|_{L_\infty(0, T; H)} + \|v'\|_{L_1(0, T, V^*)}$.

Рассмотрим многозначное отображение $\Psi : W_1 \rightrightarrows L_2(0, T, V^*)$ в качестве функции управления. Будем предполагать, что Ψ удовлетворяет следующим условиям:

(Ψ1) отображение Ψ определено на пространстве W_1 и имеет непустые, компактные и выпуклые значения;

(Ψ2) отображение Ψ компактно и полунепрерывно сверху (т.е. для любой функции $v \in W_1$ и открытого множества $Y \subset L_2(0, T, V^*)$, такого что $\Psi(v) \subset Y$, существует окрестность $U(v)$, для которой $\Psi(U(v)) \subset Y$);

(Ψ3) отображение Ψ глобально ограничено, т.е. существует константа $C_4 > 0$ такая, что

$$\|\Psi(v)\|_{L_2(0, T, V^*)} := \sup\{\|u\|_{L_2(0, T, V^*)} : u \in \Psi(v)\} \leq C_4 \quad \text{для всех } v \in W_1;$$

(Ψ4) отображение Ψ слабо замкнуто в следующем смысле: если $\{v_l\}_{l=1}^\infty \subset W_1$, $v_l \rightharpoonup v_0$ и $u_l \in \Psi(v_l)$, $u_l \rightharpoonup u_0$ в $L_2(0, T, V^*)$, то $u_0 \in \Psi(v_0)$.

Будем рассматривать слабую постановку задачи управления с обратной связью для начально-краевой задачи (1), (2). В работе под *обратной связью* мы понимаем условие

$$f \in \Psi(v). \quad (3)$$

Определение 1. Пара функций $(v, f) \in W_1 \times L_2(0, T, V^*)$ называется *слабым решением* задачи с обратной связью (1), (2), если она удовлетворяет при всех $\varphi \in V$ и п.в. $t \in [0, T]$ равенству

$$\langle v', \varphi \rangle - \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx + 2 \int_\Omega \mu(I_2(v)) \varepsilon(v) : \varepsilon(\varphi) dx = \langle f, \varphi \rangle, \quad (4)$$

начальному условию $v(0) = v_0$ и условию обратной связи (3).

Здесь и далее $\langle v', \varphi \rangle = (\partial v / \partial t, \varphi)$.

Первым результатом работы является

Теорема 1. Пусть многозначное отображение Ψ удовлетворяет условиям (Ψ1)–(Ψ4), а вязкость μ рассматриваемой среды – условиям а)–с). Тогда существует хотя бы одно решение $(v_*, f_*) \in W_1 \times L_2(0, T, V^*)$ задачи с обратной связью (1)–(3).

Обозначим через $\Sigma \subset W_1 \times L_2(0, T; V^*)$ множество всех слабых решений задачи управления с обратной связью (1)–(3). Рассмотрим произвольный функционал качества $\Phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющий следующим условиям:

(Ф1) Существует число γ такое, что $\Phi(v, f) \geq \gamma$ для всех $(v, f) \in \Sigma$.

(Ф2) Если $v_l \rightharpoonup v_*$ в W_1 и $f_l \rightarrow f_*$ в $L_2(0, T; V^*)$, то $\Phi(v_*, f_*) \leq \varliminf_{l \rightarrow \infty} \Phi(v_l, f_l)$.

Основным результатом работы является

Теорема 2. Если отображение Ψ удовлетворяет условиям (Ψ1)–(Ψ4), вязкость μ рассматриваемой среды – условиям а)–с), а функционал Φ – условиям (Ф1), (Ф2), то задача оптимального управления с обратной связью (1)–(3) имеет хотя бы одно слабое решение (v_*, f_*) такое, что

$$\Phi(v_*, f_*) = \inf_{(v, f) \in \Sigma} \Phi(v, f).$$

2. Схема доказательства. Доказательство теорем 1 и 2 основано на аппроксимационно-топологическом методе исследования задач гидродинамики (см. [10–14]).

Для этого сначала переходят к операторной трактовке рассматриваемой задачи:

$$v'(t) + D(v) - K(v) = f, \quad (5)$$

в которой операторы $K : V \rightarrow V^*$ и $D : V \rightarrow V^*$ для функций $v \in V$ и $\varphi \in V$ задаются равенствами

$$\langle K(v), \varphi \rangle = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx \quad \text{и} \quad \langle D(v), \varphi \rangle = 2 \int_{\Omega} \mu(I_2(v)) \varepsilon(v) : \varepsilon(\varphi) dx.$$

Таким образом, слабое решение задачи с обратной связью (1)–(3) – это решение $(v, f) \in W_1 \times L_2(0, T, V^*)$ операторного уравнения (5), удовлетворяющее начальному условию $v|_{t=0} = v_0$ и условию обратной связи (3). Отметим некоторые свойства введенных выше операторов.

Лемма 1. 1) Оператор $K : L_2(0, T; V) \rightarrow L_1(0, T; V^*)$ непрерывен.

2) Оператор $D : L_2(0, T; V) \rightarrow L_2(0, T; V^*)$ непрерывен и монотонен.

Далее, в связи с тем, что операторы в полученном операторном включении не обладают необходимыми свойствами, рассматривается задача, аппроксимирующая исходную (в данном случае она представляет собой также операторное включение, но с оператором, обладающим требуемыми свойствами, рассматриваемое в более удобном функциональном пространстве $W_2 = \{v : v \in L_2(0, T; V), v' \in L_2(0, T; V^*)\}$).

Вспомогательная задача. Найти пару функций $(v, f) \in W_2 \times L_2(0, T, V^*)$, удовлетворяющую операторному включению

$$v'(t) + D(v) - K_{\delta}(v) = f \in \Psi(v) \quad (6)$$

и начальному условию $v(0) = v_0$. Здесь оператор $K_{\delta} : V \rightarrow V^*$, $\delta > 0$, для функций $v \in V$ и $\varphi \in V$ задается равенством

$$\langle K_{\delta}(v), \varphi \rangle = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \frac{v_i v_j}{1 + \delta |v|^2} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx, \quad \text{где} \quad |v|^2 = \sum_{i=1}^n v_i v_i.$$

Лемма 2. Для любого $\delta > 0$ оператор $K_{\delta} : W_2 \rightarrow L_2(0, T; V^*)$ компактен и справедлива оценка

$$\|K_{\delta}(v)\|_{L_2(0, T; V^*)} \leq C_5 / \delta \quad (7)$$

с некоторой константой C_5 , не зависящей от v .

После чего на основе априорных оценок решений и теории топологической степени многозначных отображений доказывается существование решения вспомогательной задачи. Для этого вспомогательная задача записывается в следующем виде:

$$\mathbf{L}(v) - \mathbf{K}_{\delta}(v) \in \Psi(v),$$

где $\mathbf{L} : W_2 \rightarrow L_2(0, T; V^*) \times H$, $\mathbf{L}(v) = (v' + D(v), v|_{t=0})$; $\mathbf{K}_\delta : W_2 \subset L_2(0, T; V) \rightarrow L_2(0, T; V^*) \times H$, $\mathbf{K}_\delta(v) = (K_\delta(v), 0)$; $\Psi : W_2 \rightarrow L_2(0, T; V^*) \times H$, $\Psi(v) = (\Psi(v), v_0)$.

Лемма 3. *Нелинейный оператор $\mathbf{L} : W_2 \rightarrow L_2(0, T; V^*) \times H$ корректно определён, обратим, и для любых $v \in W_2$ справедлива оценка*

$$\|v\|_{W_2} \leq C_6 \|\mathbf{L}(v)\|_{L_2(0, T; V^*) \times H}. \quad (8)$$

Кроме того, обратный оператор $\mathbf{L}^{-1} : L_2(0, T; V^*) \times H \rightarrow W_2$ непрерывен.

Из последней леммы следует, что изучение вспомогательной задачи эквивалентно исследованию задачи о неподвижной точке следующего включения:

$$v \in F(v), \quad (9)$$

где $F : W_2 \rightarrow W_2$ и $F(v) = \mathbf{L}^{-1}(\mathbf{K}_\delta(v) + \Psi(v))$.

Теорема 3. *Операторное включение (9) имеет хотя бы одно решение $v \in W_2$.*

Для доказательства теоремы 3 рассматривается семейство вспомогательных включений: $v \in G(v)$, где $G(v) = \mathbf{L}^{-1}(\lambda \mathbf{K}_\delta(v) + \lambda \Psi(v))$. Заметим, что данное семейство совпадает с изучаемой задачей (9) при $\lambda = 1$.

Установим априорную оценку решений для включения $v \in G(v)$. Если $v \in W_2$ – решение одного из включений семейства вспомогательных задач, то в силу оценок (7) и (8) и условий $(\Psi 1) - (\Psi 4)$ имеем

$$\|v\|_{W_2} \leq C_7(\|\mathbf{K}_\delta(v)\|_{L_2(0, T; V^*)} + \|f\|_{L_2(0, T; V^*)} + \|v_0\|_H) \leq C_7(C_5/\delta + C_8 + \|v_0\|_H).$$

Выберем $R > C_7(C_5/\delta + C_8 + \|v_0\|_H)$, тогда ни одно решение семейства вспомогательных задач не принадлежит границе шара $B_R \subset W_2$. Поэтому отображение $G : W_2 \times [0, 1] \rightarrow W_2$ определяет гомотопию многозначных отображений на B_R . Следовательно, топологическая степень $\deg(G, \bar{B}_R, 0)$ определена для каждого значения $\lambda \in [0, 1]$ (см. [15, гл. 3]). В силу свойства гомотопической инвариантности степени имеем $\deg(F, \bar{B}_R, 0) = \deg(I, \bar{B}_R, 0) = 1$. Отличие от нуля степени отображения F обеспечивает существование решения операторного включения (9), а следовательно, существование решения вспомогательной задачи.

Лемма 4. *Для любого решения $v_\delta \in W_2$, $\delta > 0$, операторного включения (9) справедливы оценки*

$$\max_{t \in [0, T]} \|v_\delta(t)\|_H + \|v_\delta\|_{L_2(0, T; V)} \leq C_9(\|f\|_{L_2(0, T; V^*)} + \|v_{\delta_0}\|_H), \quad (10)$$

$$\|v'_\delta\|_{L_1(0, T; V^*)} \leq C_{10}(1 + \|f\|_{L_2(0, T; V^*)} + \|v_{\delta_0}\|_H)^2 \quad (11)$$

с константами C_9 и C_{10} , не зависящими от δ .

И, наконец, показывается, что из последовательности решений вспомогательной задачи можно выделить подпоследовательность, сходящуюся в некотором смысле к решению исходного операторного включения.

Для этого возьмём произвольную последовательность положительных чисел $\{\delta_l\}_{l=1}^\infty$, $\delta_l \rightarrow 0$. Для каждого δ_l известно, что соответствующая вспомогательная задача имеет по крайней мере одно решение $v_l \in W_2$. Вследствие оценок (10) и (11), не уменьшая общности рассуждений, считаем, что $v_l \rightharpoonup v_*$ слабо в $L_2(0, T; V)$, $v_l \rightharpoonup^* v_*$ слабо в $L_\infty(0, T; H)$, $v_l \rightarrow v_*$ сильно в $L_2(Q_T)$, $v_l \rightarrow v_*$ почти всюду Q_T , $v'_l \rightharpoonup v'_*$ в смысле распределений. Так как оператор D слабо непрерывен, то будем полагать, что $D(v_l) \rightharpoonup D(v_*)$ слабо в $L_2(0, T; V^*)$, а следовательно, в смысле распределений со значениями в V^* . В силу леммы 5.3 из гл. 5 монографии [16] имеет место следующая сходимост: $K_{\delta_l}(v_l) \dashrightarrow K(v_*)$ в смысле распределений.

Принимая во внимание оценки (10), (11) и условия $(\Psi 1) - (\Psi 4)$, без ограничения общности можем предположить, что существует $f_* \in L_2(0, T; V^*)$ такое, что $f_l \rightarrow f_* \in \Psi(v_*)$ при $l \rightarrow \infty$. Таким образом, переходя в каждом из членов равенства

$$v'_l + D(v_l) - K_{\delta_l}(v_l) = f_l \in \Psi(v_l)$$

к пределу при $l \rightarrow \infty$, получаем, что предельные функции (v_*, f_*) удовлетворяют равенству

$$v_*' + D(v_*) - K(v_*) = f_* \in \Psi(v_*),$$

а переходя к пределу при $l \rightarrow \infty$ в начальном условии $v_l(0) = v_0$, заключаем, что v_* удовлетворяет начальному условию $v_*(0) = v_0$.

Следовательно, (v_*, f_*) – слабое решение задачи управления с обратной связью (1)–(3). Заметим, что так как $v_* \in L_2(0, T; V) \cap L_\infty(0, T; H)$, то из равенства (5) следует включение $v_*' \in L_1(0, T; V^*)$.

После доказательства разрешимости задачи управления показывается, что во множестве решений найдётся хотя бы одно решение, дающее минимум заданному функционалу качества (именно поэтому данный вид задач называют задачами оптимального управления движением жидкости с обратной связью).

Исследования Звягина В.Г. выполнены при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект FZGU-2020-0035) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект 20-01-00051). Исследования Звягина А.В. выполнены при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 19-31-60014).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Литвинов В.Г. Движение нелинейно-вязкой жидкости. М., 1982.
2. Соболевский П.Е. Существование решений математической модели нелинейно вязкой жидкости // Докл. АН СССР. 1985. Т. 285. № 1. С. 44–48.
3. Dmitrienko V.T., Zvyagin V.G. The topological degree method for equations of the Navier–Stokes type // Abstr. and Appl. Analysis. 1997. V. 2. № 1. P. 1–45.
4. Lions J.L. Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations. Berlin, 1971.
5. Abergel F., Temam R. On some control problems in fluid mechanics // Theor. Comput. Fluid Dyn. 1990. V. 1. № 6. P. 303–325.
6. Фурсиков А.В. Оптимальное управление распределёнными системами. Теория и приложения. Новосибирск, 1999.
7. Zvyagin V., Obukhovskii V., Zvyagin A. On inclusions with multivalued operators and their applications to some optimization problems // J. Fixed Point Theory and Appl. 2014. V. 16. P. 27–82.
8. Звягин А.В. Задача оптимального управления для стационарной модели слабо концентрированных водных растворов полимеров // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 2. С. 245–249.
9. Звягин А.В. Оптимальное управление с обратной связью для альфа-модели Лере и альфа-модели Навье–Стокса // Докл. РАН. 2019. Т. 486. № 5. С. 527–530.
10. Звягин В.Г. Аппроксимационно-топологический подход к исследованию математических задач гидродинамики // Совр. математика. Фундам. направления. 2012. Т. 46. С. 92–119.
11. Звягин В.Г., Турбин М.В. Математические вопросы гидродинамики вязкоупругих сред. М., 2012.
12. Звягин А.В., Поляков Д.М. О разрешимости альфа-модели Джеффриса–Олдройда // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 6. С. 782–787.
13. Звягин В.Г., Дмитриенко В.Т. О слабых решениях регуляризованной модели вязкоупругой жидкости // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38. № 12. С. 1633–1645.
14. Звягин В.Г., Орлов В.П. О слабой разрешимости задачи вязкоупругости с памятью // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 2. С. 215–220.
15. Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P. Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces. Berlin, 2001.
16. Звягин В.Г., Дмитриенко В.Т. Аппроксимационно-топологический подход к исследованию задач гидродинамики. Система Навье–Стокса. М., 2004.

Воронежский государственный университет,
Воронежский государственный
педагогический университет

Поступила в редакцию 16.03.2020 г.
После доработки 16.03.2020 г.
Принята к публикации 13.10.2020 г.