ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 1, с. 140–144

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.956

ЗАДАЧИ ТИПА ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОШИ–РИМАНА С СИНГУЛЯРНЫМИ ОКРУЖНОСТЬЮ И ТОЧКОЙ В МЛАДШИХ КОЭФФИЦИЕНТАХ

© 2021 г. Ю. С. Фёдоров, А. Б. Расулов

В настоящей работе для обобщённой системы Коши–Римана, младшие коэффициенты которой допускают сильную особенность на окружности и слабую особенность в точке, решена задача типа Гильберта.

DOI: 10.31857/S0374064121010143

1. Постановка задачи типа Римана–Гильберта. Пусть область D содержит точку $z=0$ и окружность $L=\{z:|z|=R\}$ и ограничена простым ляпуновским контуром Γ, ориентированным против часовой стрелки. Обозначим $D_0=D\setminus(\{0\}\bigcup L)$ и $D_\varepsilon=D\setminus(d_{0\varepsilon}\bigcup d_{1\varepsilon})$ с малым $\varepsilon>0$, где $d_{0\varepsilon}=\{z:|z|<\varepsilon\}$ и $d_{1\varepsilon}=\{z:R-\varepsilon<|z|<R+\varepsilon\}$. В области D_0 рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial\overline{z}}-p(z)\frac{a(z)}{||z|-R|^n}u+\frac{b(z)}{|z|^m}\overline{u}=f(z), \tag{1.1}$$

где $2\partial_{\overline{z}}=\partial_x+i\partial_y$, $u(z)=u_1(x,y)+iu_2(x,y)$, нормирующий множитель $p(z)=p_0(z)|p_0(z)|^{-1}$, $p_0(z)=z(|z|-R)$. Коэффициенты a, b принадлежат классу $C(\overline{D})$, а правая часть f – классу $L^p(D)$, $p>2$, где $n>1$, $0<m<1$.

Исследованию задач для уравнения (1.1) с коэффициентами, имеющими особенности первого порядка в изолированной особой точке или линии, посвящены работы [1–8] и др.

Под *обобщённым решением* уравнения (1.1) понимается функция $u\in C(\overline{D}\setminus(\{0\}\bigcup L))$, имеющая первую обобщённую производную по $\overline{z}$, принадлежащую классу $L^p(D_\varepsilon)$ для любого $\varepsilon>0$, и удовлетворяющая этому уравнению почти всюду.

В настоящей работе для обобщённой системы типа Коши–Римана (1.1), коэффициенты которой допускают сильную особенность на окружности L и слабую особенность в точке $z=0$, исследована задача типа Римана–Гильберта.

Задача R. Для уравнения (1.1) в классе

$$u, e^{a(R)/||z|-R|^{n-1}}u\in C^\mu(\overline{D}),\quad 0<\mu<1-2/p, \tag{1.2}$$

требуется найти решения краевой задача типа Римана–Гильберта:

$$\operatorname{Re}Ge^{a(R)/||z|-R|^{n-1}}u|_\Gamma=g, \tag{1.3}$$

где функции G, g заданы и принадлежат классу $C^\nu(\Gamma)$, причём G всюду отлична от нуля.

2. Интегральные представления решений. Рассмотрим частный случай уравнения (1.1) с $b=0$, т.е. уравнение

$$u_{\bar z}-Au=f, \tag{2.1}$$

где для краткости положено $A(z)=p(z)(||z|-R|^n)^{-1}a(z)$, $a(z)\in C(\overline{D})$. В данном случае коэффициент A ограничен в начале координат и имеет сильную неподвижную особенность на окружности L.

В представлении общего решения последнего уравнения и в его описании существенную роль играет интегральный оператор Векуа [9, с. 31]

$$(Tf)(z)=-\frac{1}{\pi}\int\limits_D\frac{f(\zeta)\,d_2\zeta}{\zeta-z}$$

с плотностью $f \in L^p(D)$, $p > 2$. Здесь и ниже через $d_2\zeta$ обозначается элемент площади. Хорошо известно, что этот оператор $T : L^p(D) \to W^{1,p}(D)$ ограничен и имеет место вложение $W^{1,p}(D) \subset C^\alpha(\overline{D})$ с показателем Гёльдера $\alpha = (p-2)/p$. В частности, этот оператор компактен в пространстве $L^p(D)$, $p > 2$.

В общем случае сингулярного коэффициента A интегральный оператор Векуа также можно применить при условии, что известно некоторое решение уравнения $\Omega'_{\bar z} = A$ в области D_0, где

$$\Omega(z) = \lim_{\varepsilon\to 0}(T_\varepsilon A)(z), \quad z \neq L.$$

Следующая лемма [10] описывает одно из решений уравнения $\Omega'_{\bar z} = A$ в области D_0.

Лемма 1. *В предположении*

$$A_0(z) = p(z)(a(z) - a(R))(||z| - R|^n)^{-1} \in L^p(D), \quad n > 1, \tag{2.2}$$

сингулярный интеграл $\Omega(z)$ *существует и представим в виде*

$$\Omega(z) = -\frac{2a(R)}{(n-1)||z| - R|^{n-1}} + h(z),$$

где $h(z) \in H(\overline{D})$ *определяется равенством*

$$h(z) = (TA_0)(z) + \frac{1}{\pi i}\frac{a(R)}{(n-1)}\int\limits_\Gamma \frac{1}{|\rho - R|^{n-1}}\frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

С помощью этой леммы по обычной процедуре [9, с. 31] непосредственно приходим к следующему представлению, полученному в работе [8].

Теорема 1. *Пусть выполнено условие (2.2) и* $\operatorname{Re} a(R) > 0$, *а также* $e^{-\Omega} f \in L^p(D)$. *Тогда общее решение уравнения (2.1) в классе* $C(\overline{D}\backslash L)$ *даётся формулой*

$$u = e^\Omega[\phi + T(e^{-\Omega} f)],$$

где функция $\phi \in C(\overline{D}\backslash L)$ *аналитична в области* $C(D\backslash L)$.

Сформулированная теорема показывает, что имеет место соотношение

$$u = O(1)e^{-2a(R)/||z|-R|^{n-1}} \quad \text{при} \quad |z| \to R.$$

Теперь рассмотрим случай, когда коэффициенты $a(z)$ и $b(z)$ отличны от нуля для любого $z \in \overline{D}$. Заметим, что область D содержит сингулярное многообразие, которое состоит из двух неподвижных особенностей: точка $z = 0$ и окружность L. Используя общее решение уравнения (2.1), приходим к интегральному уравнению

$$V + T(B\overline{V}) = \phi + F, \tag{2.3}$$

в котором $V = e^{-\Omega}u$, $B = |z|^{-m}b(z)e^{-2i\operatorname{Im}\Omega}$, $F = T(e^{-\Omega}f)$, причём вид функции Ω указан в лемме 1. В случае отсутствия сингулярности коэффициентов подобное уравнение возникало у И.Н. Векуа, который для его обращения предложил [9, с. 28] метод последовательных приближений. Однако этот метод применим лишь в предположении, что коэффициент b по модулю достаточно мал. В общем случае необходимо построить в явном виде резольвенту этого уравнения.

Для рассмотрения интегрального уравнения (2.3) предварительно изучим действие в различных пространствах интегрального оператора вида

$$(T_0\varphi)(z) = \int\limits_D \frac{\varphi(\zeta)\, d_2\zeta}{|\zeta|^{\alpha_0}|\zeta - z|^{\alpha_1}}, \quad z \in D,$$

с положительными α_j, $j = 1, 2$ [8].

Лемма 2. *Пусть постоянные* α_0, α_1, p, *удовлетворяющие неравенствам*

$$0 < \alpha_0 < 1 \leqslant \alpha_1 < 2, \quad \alpha_0 + 2\alpha_1 < 3, \quad p > 2/(3 - \alpha_0 - 2\alpha_1), \tag{2.4}$$

таковы, что

$$0 < \mu_0 = 3 - \alpha_0 - 2\alpha_1 - 2/p < 1. \tag{2.5}$$

Тогда оператор $T_0 : L^p(D) \to C^\mu(\overline{D})$ *ограничен.*

Как будет показано ниже, в представлении общего решения этого уравнения (1.1) важную роль играет вещественный линейный интегральный оператор

$$(K\varphi)(z) = \frac{1}{\pi} \int\limits_D \frac{b_1(\zeta)}{|\zeta|^m(\zeta - z)} \overline{\varphi(\zeta)}\, d_2\zeta, \quad z \in D,$$

и связанное с ним уравнение Фредгольма $\varphi + K\varphi = f$.

Теорема 2. *При выполнении условий (2.4) и (2.5) имеют место следующие утверждения:*

(a) однородное уравнение $\varphi + K\varphi = 0$ *в классе* $C(\overline{D})$ *имеет конечное число линейно независимых (над полем* $\mathbb{R}$*) решений* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in H(\overline{G})$, *и существуют такие линейно независимые суммируемые функции* $h_1, \ldots, h_n \in L(D)$, *что условия ортогональности*

$$\operatorname{Re} \int\limits_D f(\zeta) h_j(\zeta)\, d_2\zeta = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant n, \tag{2.6}$$

необходимы и достаточны для разрешимости неоднородного уравнения $\varphi + K\varphi = f$;

(b) для заданного $1 < \alpha_1 < 2$, *которое по отношению к* $\alpha_0 = m$ *удовлетворяет условиям (2.4), найдутся такие функции* $P_1(z,\zeta), P_2(z,\zeta) \in C(\overline{D} \times \overline{D})$, *что при выполнении условий (2.6) функция*

$$\varphi(z) = f(z) + (Pf)(z), \quad (Pf)(z) = \frac{1}{\pi} \int\limits_D \frac{[P_1(z,\zeta) f(\zeta) + P_2(z,\zeta)\overline{f(\zeta)}]\, d_2\zeta}{|\zeta|^m |\zeta - z|^{\alpha_1}}, \tag{2.7}$$

является одним из решений уравнения $\varphi + K\varphi = f$;

(c) для достаточно малого $\varepsilon > 0$ *оператор* $P : C(\overline{D}) \to C^\varepsilon(\overline{D})$ *ограничен.*

Обратимся к уравнению (2.3) с ядром $B = |z|^{-m} b(z) e^{-2i \operatorname{Im} \Omega}$, а также с правой частью $\phi + F$, где $F = T(e^{-\Omega} f)$.

Обозначим через $H(\overline{D}, e^\Omega)$ класс функций u, для которых $e^{-\Omega} u \in H(\overline{D})$. Аналогичный смысл имеет и весовой класс $L^p(D, e^\Omega)$.

Теорема 3. *Пусть* $n > 1$, $0 < m < 1$, *выбрано* $1 < \alpha < (3 - m)/2$ *и выполнены условия теоремы 1. Пусть* $e^{-\Omega} F \in L^p(D)$, $p > 2$, *так что функция* $F \in H(\overline{D})$. *Тогда в обозначениях теоремы 2 любое решение* u *уравнения (1.1) в классе* $u \in H(\overline{D}, e^\Omega)$ *представимо в виде*

$$u = e^\Omega \left[\phi + P\phi + F + PF + \sum_{j=1}^n \xi_j \varphi_j \right] \tag{2.8}$$

с произвольными $\xi_j \in \mathbb{R}$, *где интегральный оператор* P *определяется формулой (2.7), а функция* $\phi(z) \in H(\overline{D})$ *аналитична в области* D *и удовлетворяет условиям*

$$\operatorname{Re} \int\limits_D (\phi + F)(\zeta) h_j(\zeta)\, d_2\zeta = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant n. \tag{2.9}$$

Доказательства теорем 1–3 приведены в [8].

3. Решение задачи типа Римана–Гильберта. Мы не приводим хорошо известные результаты (см., например, [11, 12]) относительно классической задачи Римана–Гильберта для аналитических функций, задаваемой условием

$$\operatorname{Re} G\phi|_\Gamma = g,$$

где функция $G \in C^\nu(\Gamma)$ всюду отлична от нуля.

Пусть контур Γ принадлежит классу $C^{1,\nu}$ и функция $\zeta = \alpha(z)$ осуществляет конформное отображение области D на единичный круг $|\zeta| < 1$. Тогда по теореме Келлога [13] эта функция принадлежит классу $C^{1,\nu}(\overline{D})$. Считая контур Γ ориентированным против часовой стрелки, введём индекс Коши

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi} \arg G|_\Gamma.$$

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теорем 2, 3 и $F \in L^p(D, e^\Omega)$, $p > 2$. Тогда задача R является фредгольмовой в классе $H(D, e^\Omega)$ и её индекс равен $1 - 2\varkappa$.*

Другими словами, однородная задача имеет конечное число m линейно независимых решений, неоднородная задача разрешима при выполнении m' условий ортогональности на правую часть f уравнения (1.1) и правой части g задачи R, причём $m - m' = 1 - 2\varkappa$.

Доказательство. Подставляя представление (2.8) в условие (1.3), для аналитической функции ϕ вместе с дополнительными условиями (2.9) получим краевую задачу

$$\operatorname{Re} G_0(\phi + R\phi)|_\Gamma + \sum_1^n \xi_j \operatorname{Re}(G_0\varphi_j)|_\Gamma = g_0 \tag{3.1}$$

с коэффициентом $G_0 = \lambda e^h|_\Gamma$ и правыми частями

$$g_0 = g - \operatorname{Re}[G_0(F + PF)]|_\Gamma.$$

Неизвестными в этой задаче наряду с функцией ϕ являются и вещественные числа ξ_j.

Соотношения (3.1) запишем в следующем операторном виде:

$$R^0\phi + P^0\phi + \sum_1^n \xi_j\varphi_j^0 = g^0,$$

$$\operatorname{Re} \int_D \phi(\zeta) h_j(\zeta)\, d_2\zeta = \eta_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant n, \tag{3.2}$$

где положено

$$R^0\phi = \operatorname{Re} G_0\phi|_\Gamma, \quad P^0\phi = \operatorname{Re} G_0(P\phi)|_\Gamma, \quad \varphi_j^0 = \operatorname{Re} G_0\varphi_j|_\Gamma,$$

$$g^0 = g_0, \quad \eta_j = -\operatorname{Re} \int_D F(\zeta) h_j(\zeta)\, d_2\zeta.$$

Обозначим через X банахово пространство функций ϕ, которые аналитичны в D и принадлежат классу $C^\mu(\overline{D})$. Через Y^0 обозначим пространство вещественнозначных функций из класса $C^\mu(\Gamma)$. Тогда при достаточно малом μ оператор $R^0 : X \to Y^0$ ограничен, а с учётом теоремы 2 оператор $P^0 : X \to Y^0$ компактен. Как следует из теоремы 3, оператор $R^0 : X \to Y^0$ фредгольмов и его индекс равен $1 - 2\varkappa$, поэтому на основании известных свойств (см. [14, с. 122; 15]) фредгольмовых операторов это же верно и для оператора $N = (R^0 + P^0)$. С другой стороны, оператор системы (3.1) можно рассматривать как ограниченный оператор $\widetilde{N} : X \times \mathbb{R}^n \to Y^0 \times \mathbb{R}^n$, главная часть которого совпадает с N. Поэтому (см. [14, с. 122; 15]) оператор $\widetilde{N}$ также фредгольмов и его индекс $\operatorname{ind} \widetilde{N} = \operatorname{ind} N = 1 - 2\varkappa$. Остаётся заметить [12, с. 134, 334], что система (3.2) эквивалентна исходной задаче R. Теорема доказана.

Авторы выражают глубокую благодарность А.П. Солдатову за ценные советы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Михайлов Л.Г.* Новые классы особых интегральных уравнений и их применение к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами. Душанбе, 1963.
2. *Усманов З.Д.* Обобщенные системы Коши–Римана с сингулярной точкой. Душанбе, 1993.
3. *Расулов А.Б., Солдатов А.П.* Краевая задача для обобщённого уравнения Коши–Римана с сингулярными коэффициентами // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 5. С. 637–650.
4. *Тунгатаров А., Абдыманапов С.А.* Некоторые классы эллиптических систем на плоскости с сингулярными коэффициентами. Алматы, 2005.
5. *Begehr H., Dao-Qing Dai.* On continuous solutions of a generalized Cauchy–Riemann system with more than one singularity // J. Differ. Equat. 2004. V. 196. P. 67–90.
6. *Meziani A.* Representation of solutions of a singular CR equation in the plane // Complex Var. and Elliptic Equat. 2008. V. 53. P. 1111–1130.
7. *Гончаров А.Л., Климентов С.Б.* Построение нелокальных решений обобщённых систем Коши–Римана с сингулярной точкой // Междунар. школа-семинар по геометрии и анализу, посвящ. памяти Н.В. Ефимова. Тез. докл. Абрау-Дюрсо, 1998. С. 185–187.
8. *Расулов А.Б., Бободжанова М.А., Федоров Ю.С.* Представление общего решения уравнения типа Коши–Римана с сингулярной окружностью и особой точкой // Дифференц. уравнения и процессы управления. 2016. № 3. С. 1–16.
9. *Векуа И.Н.* Обобщенные аналитические функции. М., 1959.
10. *Расулов А.Б.* Интегральные представления и краевые задачи для обобщённой системы Коши–Римана со сверхсингулярными многообразиями // Вестн. МЭИ. 2012. № 6. С. 23–30.
11. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М, 1977.
12. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М., 1968.
13. *Goluzin G.M.* Geometric Theory of Functions of a Complex Variable. Providence, 1969.
14. *Пале Р.* Семинар по теореме Атьи–Зингера об индексе. М., 1970.
15. *Солдатов А.П.* Сингулярные интегральные операторы и эллиптические краевые задачи. I // Совр. математика. Фунд. направления. 2017. Т. 63. № 1. С. 1–189.

Национальный исследовательский университет
“Московский энергетический институт”

Поступила в редакцию 25.06.2019 г.
После доработки 12.09.2020 г.
Принята к публикации 13.10.2020 г.