ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 10, с. 1299–1304

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.984

О СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ КЛАССИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ ДИРАКА И ОПЕРАТОРОВ С ИНВОЛЮЦИЕЙ В ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ФУНКЦИЙ

© 2021 г. А. Г. Баскаков, И. А. Криштал, Н. Б. Ускова

Приводятся теоремы о локализации спектра операторов Дирака и операторов с инволюцией в некотором классе пространств функций, введённом в статье, опубликованной в [Contemp. Math. 2018. V. 706. P. 93–114].

DOI: 10.31857/S0374064121100010

Введение. В работе рассматривается дифференциальное выражение первого порядка, определяющее дифференциальный оператор в некотором классе однородных пространств (см. определение ниже, а также [1]). Класс задаётся таким образом, чтобы спектр оператора не зависел от выбора конкретного однородного пространства, причём одно из пространств в классе является гильбертовым пространством $\mathfrak{H}$ функций со значениями в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. В $\mathfrak{H}$ спектр дифференциального оператора возможно оценить. Таким образом, оценка спектра распространяется и на другие однородные пространства. В данной работе мы аккуратно определяем пространства и операторы, для которых эта схема работает, а также приводим соответствующие оценки. В качестве примера рассматривается оператор Дирака на прямой из [2], и полученная в [2] оценка его спектра обобщается на целый класс однородных пространств, в частности, на пространства Степанова. Другим примером является оператор с инволюцией из [3]. Для него полученные в [3] оценки также распространяются на другие функциональные пространства.

Введём используемые в статье функциональные пространства.

Для любого комплексного банахова пространства $\mathcal{X}$ через $\operatorname{End}\mathcal{X}$ обозначим банахову алгебру всех ограниченных линейных операторов, действующих в $\mathcal{X}$. Далее комплексное гильбертово пространство обозначим через $\mathcal{H}$, а символом $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ – двусторонний идеал операторов Гильберта–Шмидта из алгебры $\operatorname{End}\mathcal{H}$.

В работе систематически используются пространства Бохнера–Лебега $L_p(\mathbb{R},\mathcal{X})$, $p\in[1,\infty]$. Для $p\in[1,\infty]$ через $L_p(\mathbb{R},\mathcal{X})$ обозначается банахово пространство измеримых по Бохнеру и суммируемых на $\mathbb{R}$ со степенью p (существенно ограниченных при $p=\infty$) классов эквивалентности функций со значениями в комплексном банаховом пространстве $\mathcal{X}$. Нормы в пространствах $L_p(\mathbb{R},\mathcal{X})$ задаются формулами

$$\|x\|_p=\bigg(\int\limits_{\mathbb{R}}\|x(t)\|_{\mathcal{X}}^p\,dt\bigg)^{1/p},\quad p\in[1,\infty),\quad \text{и}\quad \|x\|_\infty=\operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}}\|x(t)\|_{\mathcal{X}}.$$

В первой части статьи используются пространства $L_1=L_1(\mathbb{R})=L_1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ и $L_2=L_2(\mathbb{R})= L_2(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Пространство L_1 будем рассматривать как банахову алгебру со свёрткой функций в качестве операции умножения. Пространство $\mathfrak{H}=L_2(\mathbb{R},\mathcal{H})$ (и, в частности, пространство L_2) является гильбертовым пространством со стандартным скалярным произведением. Через $W_2^1(\mathbb{R},\mathbb{C}^d)$, $d\in\mathbb{N}$, обозначаем пространство Соболева абсолютно непрерывных функций из $L_2(\mathbb{R},\mathbb{C}^d)$, производная которых также принадлежит пространству $L_2(\mathbb{R},\mathbb{C}^d)$.

Пусть $\mathcal{X}$ – комплексное банахово пространство и $L_{1,s}=L_{1,s}(\mathbb{R},\operatorname{End}\mathcal{X})$ – пространство, состоящее из всех таких функций $F:\mathbb{R}\to\operatorname{End}\mathcal{X}$, для которых выполняются следующие два свойства (см. также [1]):

а) для каждого $x\in\mathcal{X}$ функция из $\mathbb{R}$ в $\mathcal{X}$, действующая по правилу $s\mapsto F(s)x$, измерима;

б) существует функция $f \in L_1(\mathbb{R})$ такая, что

$$\|F(s)\|_{\operatorname{End}\mathcal{X}} \leqslant f(s). \tag{1}$$

Для $F \in L_{1,s}$ положим $\|F\| = \|F\|_1 = \inf \|f\|$, где инфимум берётся по всем таким функциям $f \in L_1(\mathbb{R})$, для которых выполнено неравенство (1).

Отметим, что введённое пространство $L_{1,s}$ является банаховой алгеброй со свёрткой

$$(F_1 * F_2)(t)x = \int\limits_{\mathbb{R}} F_1(s)F_2(t-s)x\,ds, \quad F_1, F_2 \in L_{1,s}, \quad x \in \mathcal{X},$$

в качестве операции умножения; в частности, $\|F_1 * F_2\|_1 \leqslant \|F_1\|_1\|F_2\|_1$.

Мы далее также будем использовать линейное пространство $L_{1,\mathrm{loc}} = L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ локально суммируемых (измеримых по Бохнеру) классов эквивалентности функций со значениями в банаховом пространстве $\mathcal{X}$, в частности [1], для любых компакта $K \subset \mathbb{R}$ и функции $f \in$ $\in L_{1,\mathrm{loc}}$ имеем

$$\int\limits_K \|f(t)\|_{\mathcal{X}}\,dt < \infty.$$

Через $S_p = S_p(\mathbb{R}, \mathcal{X})$, $p \in [1, +\infty)$, обозначаем пространство Степанова [4, с. 37], состоящее из функций $f \in L_{1,\mathrm{loc}}$, для которых конечна величина

$$\|f\|_{S_p} = \sup_{s\in\mathbb{R}} \left(\int\limits_0^1 \|f(t+s)\|_{\mathcal{X}}^p\,dt\right)^{1/p},$$

принимаемая за норму в S_p.

Определение [1]. Банахово пространство $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ функций, определённых на $\mathbb{R}$ со значениями в комплексном банаховом пространстве $\mathcal{X}$, называется *однородным*, если выполнены следующие пять условий:

i) пространство $\mathfrak{F}$ непрерывно вложено в S_1;

ii) представление $S : \mathbb{R} \to \operatorname{End}\mathfrak{F}$, определяемое правилом

$$(S(s)x)(t) = x(t+s), \quad t, s \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathfrak{F}, \tag{2}$$

является изометрическим представлением группы $\mathbb{R}$ операторами из $\operatorname{End}\mathfrak{F}$ [5, 6];

iii) для $x \in \mathfrak{F}$ и $C \in \operatorname{End}\mathcal{X}$ функция $y(t) = C(x(t))$, $t \in \mathbb{R}$, принадлежит пространству $\mathfrak{F}$ и справедливо неравенство $\|y\| \leqslant \|C\|\|x\|$;

iv) для $x \in \mathfrak{F}$ и $F \in L_{1,s}$ свёртка $(F*x)(t) = \int_{\mathbb{R}} F(s)x(t-s)\,ds$ принадлежит пространству $\mathfrak{F}$ и имеет место неравенство $\|F * x\| \leqslant \|F\|_1\|x\|$;

v) если для некоторого $x \in \mathfrak{F}$ равенство $x * f = 0$ верно для всех $f \in L_1$, то $x = 0$.

Следующие банаховы пространства являются однородными пространствами (или имеется эквивалентная норма, в которой они однородны):

1) пространство Степанова $S_p = S_p(\mathbb{R}, \mathcal{X})$, $p \in [1, +\infty)$;

2) пространство $L_p = L_p(\mathbb{R}, \mathcal{X})$, $p \in [1, +\infty]$;

3) пространство $C_b = C_b(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ ограниченных непрерывных функций со значениями в банаховом пространстве $\mathcal{X}$ и нормой $\|x\|_\infty = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|x(t)\|$, $x \in C_b$;

4) подпространство $C_0 = C_0(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ функций из $C_b(\mathbb{R}, \mathcal{X})$, исчезающих на бесконечности, т.е. $\lim\limits_{|t|\to\infty} \|x(t)\|_{\mathcal{X}} = 0$ для любой $x \in C_0(\mathbb{R}, \mathcal{X})$.

Подчеркнём, что это далеко не все интересные однородные пространства функций, другие можно найти в [1, 7, 8], но они в данной работе не используются. Все результаты будем формулировать только для указанных выше однородных пространств 1)–4), обозначая их символом $\mathfrak{F}$. Кроме того, предполагается, что пространство значений $\mathcal{X}$ функций из $\mathfrak{F}$ является некоторым гильбертовым пространством, т.е. $\mathcal{X} = \mathcal{H}$.

Перейдём к определению рассматриваемых дифференциальных операторов L. Пусть

$$L \equiv -\frac{d}{dt} - B : D(L) \subseteq \mathfrak{F} \to \mathfrak{F},$$

где область определения $D(L) \subseteq \mathfrak{F}$ оператора L совпадает с областью определения $D(A) \subseteq \mathfrak{F}$ оператора $A = -d/dt$, и оператор $B : D(B) \subseteq \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}$ – линейный замкнутый оператор умножения на функцию $b : \mathbb{R} \to \operatorname{End}\mathcal{H}$, подчинённый оператору A; поэтому считаем, что $D(B) = D(A)$.

Напомним, что оператор B *подчинён* оператору A, если $D(A) \subseteq D(B)$ и при некоторой постоянной $C > 0$ справедливо неравенство $\|Bx\| \leqslant C(\|x\| + \|Ax\|)$, $x \in D(A)$. Пространство операторов, подчинённых оператору A, обозначим через $\mathfrak{L}_A(\mathfrak{F})$.

Область определения $D(A)$ оператора A состоит из всех таких $x \in \mathfrak{F}$, для которых существует $y \in \mathfrak{F}$, для которой при всех $s \leqslant t$ из $\mathbb{R}$ имеют место равенства

$$x(t) = x(s) - \int\limits_s^t y(\tau)\,d\tau, \quad s \leqslant t.$$

В работе [9, теорема 4] доказана следующая

Теорема 1. *Спектр $\sigma(L)$ оператора L не зависит от выбора пространства $\mathfrak{F}$.*

Приведём также без доказательства ещё один результат [3, теорема 4.1], на который будем опираться.

Теорема 2. *Пусть $A : D(A) \subset \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ – самосопряжённый оператор в комплексном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ и оператор B принадлежит идеалу операторов Гильберта–Шмидта $\mathfrak{S}_2(\mathfrak{H})$. Тогда существует такая непрерывная функция $f \in L_2(\mathbb{R})$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, что для всех $\lambda \in \sigma(A - B)$ имеет место неравенство $|\operatorname{Im}\lambda| \leqslant f(\operatorname{Re}\lambda)$.*

Таким образом, существует такая непрерывная вещественная функция $f \in L_2(\mathbb{R})$, что спектр $\sigma(A - B)$ оператора $A - B$ лежит между графиками функций f и $-f$.

Из теоремы 1 немедленно вытекает, что если имеет место теорема о локализации спектра для оператора

$$L \equiv -\frac{d}{dt} - B : D(L) \subseteq \mathfrak{H} \to \mathfrak{H} \quad \text{и} \quad B \in \mathfrak{S}_2(\mathfrak{H}), \quad \mathfrak{H} = L_2(\mathbb{R}, \mathcal{H}),$$

то такая же теорема имеет место для оператора L, действующего в однородных пространствах $S_p(\mathbb{R}, \mathcal{H})$, $p \in [1, \infty)$, $L_p(\mathbb{R}, \mathcal{H})$, $p \in [1, \infty]$, $C_b(\mathbb{R}, \mathcal{H})$, $C_0(\mathbb{R}, \mathcal{H})$.

Если включение $B \in \mathfrak{S}_2(\mathfrak{H})$, где $\mathfrak{H}$ – гильбертово пространство, места не имеет, то можно использовать любое преобразование подобия оператора $A-B$, $B \in \mathfrak{L}_A(\mathfrak{H})$, в оператор $A - B_0$, $B_0 \in \mathfrak{S}_2(\mathfrak{H})$. В [2] в качестве такого преобразования подобия выступает предварительное преобразование подобия метода подобных операторов. Приведём его краткое описание.

Для функции $f \in L_1(\mathbb{R})$ её преобразование Фурье $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ определяется формулой

$$\widehat{f}(\lambda) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\lambda t}\,dt, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Для построения преобразования подобия понадобятся следующие функции из $L_1(\mathbb{R}) \bigcap L_2(\mathbb{R})$. Для $a > 0$ рассмотрим трапецевидную функцию τ_a, заданную условиями

$$\tau_a(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad |\xi| \leqslant a, \\ a^{-1}(2a - |\xi|), & \text{если} \quad a < |\xi| \leqslant 2a, \\ 0, & \text{если} \quad |\xi| > 2a. \end{cases}$$

Непосредственный подсчёт показывает, что $\tau_a \in L_2(\mathbb{R})$ и $\tau_a = \widehat{\varphi}_a$, где

$$\varphi_a(t) = \frac{2\sin(3at/2)\sin(at/2)}{\pi a t^2}.$$

Рассмотрим также функцию $\omega_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, заданную равенствами: $\omega_a(\xi) = (1 - \tau_a(\xi))/\xi$, если $\xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, и $\omega_a(0) = 0$. Пусть функция ψ_a такова, что $\widehat{\psi}_a = \omega_a$. Известно [3], что $\psi_a \in L_1$ и $\|\psi_a\|_1 \leqslant 1.35/a$.

Напомним, что $\mathfrak{H} = L_2(\mathbb{R}, \mathcal{H})$. Наряду с представлением $S : \mathbb{R} \to \operatorname{End}\mathfrak{H}$, определённым формулой (2), введём в рассмотрение также представление $T : \mathbb{R} \to \operatorname{End}(\mathfrak{L}_A(\mathfrak{H}))$, заданное формулой
$$T(t)X = S(t)XS(-t), \quad X \in \mathfrak{L}_A(\mathfrak{H}), \quad t \in \mathbb{R}.$$
Для каждой функции $f \in L_1(\mathbb{R})$ и оператора $X \in \mathfrak{L}_A(\mathfrak{H})$ определим оператор $T(f)X \in \mathfrak{L}_A(\mathfrak{H})$ равенством
$$(T(f)X)x = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)(T(-t)X)x\,dt = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)S(-t)XS(t)x\,dt, \quad x \in D(A).$$
В рассматриваемом случае B – оператор умножения на функцию $b : \mathbb{R} \to \operatorname{End}\mathcal{H}$ и
$$(T(f)Bx)(s) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)b(s-t)x(s)\,dt = (f * b)(s)x(s), \quad s \in \mathbb{R}.$$
Из [2, теорема 2] и приведённых выше теорем 1, 2 непосредственно следует

Теорема 3. *Пусть* $A : D(A) \subseteq \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ *– самосопряжённый оператор и* $B \in \mathfrak{L}_A(\mathfrak{H})$. *Пусть также выполнены условия:*

a) $T(\psi_a)B \in \operatorname{End}\mathfrak{H}$ *и существует такое* $a > 0$, *что* $\|T(\psi_a)B\|_{\operatorname{End}\mathfrak{H}} < 1$;

b) $(T(\psi_a)B)D(A) \subseteq D(A)$;

c) $BT(\psi_a)B + T(\varphi_a)B \in \mathfrak{S}_2(\mathfrak{H})$;

d) для любого $\varepsilon > 0$ *существует* $\lambda_\varepsilon \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} = \rho(A)$, *при котором* $\|B(A - \lambda_\varepsilon I)^{-1}\| < \varepsilon$.
Тогда оператор $A - B$ *подобен оператору* $A - B_0$, *где* $B_0 \in \mathfrak{S}_2(\mathfrak{H})$ *и существует такая непрерывная функция* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $f \in L_2(\mathbb{R})$, *что спектр* $\sigma(A - B)$ *оператора* $A - B$ *лежит между графиками функций* f *и* $-f$.

Перейдём к оператору Дирака на прямой. Пусть
$$(\mathcal{L}x)(t) = i\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\frac{dx}{dt} - \mathcal{V}(t)x(t) = Ax(t) - Vx(t), \quad t \in \mathbb{R},$$
где
$$\mathcal{V}(t) = \begin{pmatrix}0 & v_1(t)\\ v_2(t) & 0\end{pmatrix}, \quad v_1, v_2 \in L_2(\mathbb{R}, \operatorname{End}\mathcal{H}), \quad D(\mathcal{L}) = W_2^1(\mathbb{R}, \mathcal{H}^2) \subseteq L_2(\mathbb{R}, \mathcal{H}^2) = \mathfrak{H}.$$
В [2, теорема 4] для $\mathcal{H} = \mathbb{C}$ доказана

Теорема 4. *Существует такая непрерывная функция* $f \in L_2(\mathbb{R})$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, *что для* $\lambda \in \sigma(\mathcal{L})$ *имеет место оценка* $|\operatorname{Im}\lambda| \leqslant f(\operatorname{Re}\lambda)$.

Непосредственная проверка показывает, что результаты теоремы 4 остаются верными и в случае произвольного гильбертова пространства $\mathcal{H}$ (не только для $\mathcal{H} = \mathbb{C}$).

Из свойства 5) в [2, лемма 3] следует, что возмущение V в теореме 4 принадлежит $\mathfrak{L}_A(\mathfrak{H})$. Однако в общем случае V не является ограниченным оператором, и тем более оператором из идеала $\mathfrak{S}_2(\mathfrak{H})$. Поэтому при доказательстве теоремы 4 перед применением теоремы 2 строится преобразование подобия оператора $A - V$ в оператор $A - V_0$, где $V_0 \in \mathfrak{S}_2(\mathfrak{H})$. По существу доказательство теоремы 4 сводится к проверке того, что оператор $\mathcal{L}$ удовлетворяет условиям теоремы 3.

Пусть теперь $\mathcal{L} = A - V : D(\mathcal{L}) = D(A) \subseteq \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}$, где $\mathfrak{F}$ – одно из указанных однородных пространств. Представим оператор $\mathcal{L}$ в виде
$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\left(i\frac{d}{dt} - \begin{pmatrix}0 & -v_1\\ v_2 & 0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} i\widetilde{\mathcal{L}}.$$

Для операторов $\mathcal{L}$ и $i\widetilde{\mathcal{L}}$ имеет место локализационная теорема 4 при $\mathfrak{F} = \mathfrak{H} = L_2(\mathbb{R}, \mathcal{H})$. Поэтому из теорем 1 и 4 вытекает

Теорема 5. *Существует непрерывная неотрицательная функция* $f \in L_2(\mathbb{R})$, *для которой спектр оператора Дирака* $\mathcal{L}$, *действующего в любом из указанных выше однородных пространств* $\mathfrak{F}$, *заключён между графиками функций* f *и* $-f$.

Перейдём к оператору с инволюцией. Вначале приведём результат из [3, теорема 1.1].

Теорема 6. *Пусть*

$$L_I = -i\frac{d}{dt} - V : W_2^1(\mathbb{R}) \subseteq L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R}) \tag{3}$$

и $(Vx)(t) = v(t)x(-t)$, $t \in \mathbb{R}$, $v \in L_2(\mathbb{R})$. *Тогда существует такая непрерывная вещественная функция* $f \in L_2(\mathbb{R})$, *что для всех* $\lambda \in \sigma(L_I)$ *имеет место неравенство* $|\operatorname{Im}\lambda| \leqslant f(\operatorname{Re}\lambda)$.

Зачастую исследование спектра оператора с инволюцией сводится к исследованию спектра оператора Дирака [10]. Именно, спектр оператора с инволюцией L_I, заданного формулой (3), совпадает со спектром оператора Дирака

$$\mathcal{L} = -i\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\frac{d}{dt} - \begin{pmatrix}0 & v(t)\\ v(-t) & 0\end{pmatrix},$$

где $v \in L_2(\mathbb{R}, \operatorname{End}\mathcal{H})$ и $D(\mathcal{L}) \subseteq W_2^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2) \subset L_2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2) \to L_2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2)$.

Таким образом, имеет место

Теорема 7. *Существует непрерывная неотрицательная функция* $f \in L_2(\mathbb{R})$ *такая, что спектр оператора* L_I, *действующего в любом из однородных пространств* $\mathfrak{F}$, *допускает для всех* $\lambda \in \sigma(L_I)$ *оценку* $|\operatorname{Im}\lambda| \leqslant f(\operatorname{Re}\lambda)$.

Отметим, что обычно рассматриваются операторы Дирака и операторы с инволюцией на конечном отрезке $[0, \omega]$. Интересные результаты, касающиеся спектральных свойств таких операторов, содержатся, например, в [10–15].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 19-01-00732).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Baskakov A.G., Krishtal I.A.* Spectral properties of an operator polynomial with coefficients in a Banach algebra // Contemp. Math. 2018. V. 706. P. 93–114.
2. *Баскаков А.Г., Криштал И.А., Ускова Н.Б.* О спектральных свойствах оператора Дирака на прямой // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 2. С. 153–161.
3. *Baskakov A.G., Krishtal I.A., Uskova N.B.* Closed operator functional calculus in Banach modules and applications // J. Math. Anal. Appl. 2020. V. 492. № 2. P. 124473.
4. *Левитан Б.М., Жиков В.В.* Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения. М., 1978.
5. *Баскаков А.Г., Криштал И.А.* Гармонический анализ каузальных операторов и их спектральные свойства // Изв. РАН. Сер. мат. 2005. Т. 69. Вып. 3. С. 3–54.
6. *Баскаков А.Г.* Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов // Совр. мат. Фунд. напр. 2004. Т. 9. С. 3–151.
7. *Баскаков А.Г., Струков В.Е., Струкова И.И.* Гармонический анализ периодических и почти периодических на бесконечности функций из однородных пространств и гармонических распределений // Мат. сб. 2019. Т. 210. № 10. С. 37–90.
8. *Баскаков А.Г., Дикарев Е.Е.* Спектральная теория функций в исследовании дифференциальных операторов с частными производными // Уфимск. мат. журн. 2019. Т. 11. № 1. С. 3–18.
9. *Баскаков А.Г.* Полугруппы разностных операторов в спектральном анализе линейных дифференциальных операторов // Функц. анализ и его приложения. 1996. Т. 30. Вып. 3. С. 1–11.
10. *Бурлуцкая М.Ш., Хромов А.П.* Метод Фурье в смешанной задаче для уравнения с частными производными первого порядка с инволюцией // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2011. Т. 51. № 12. С. 2233–2246.
11. *Джаков П., Митягин Б.С.* Зоны неустойчивости одномерных периодических операторов Шредингера и Дирака // Успехи мат. наук. 2006. Т. 61. Вып. 4 (370). С. 77–182.

12. *Савчук А.М.* О базисности системы собственных и присоединенных функций одномерного оператора Дирака // Изв. РАН. Сер. мат. 2018. Т. 82. Вып. 2. С. 113–139.
13. *Савчук А.М., Садовничая И.В.* Спектральный анализ одномерной системы Дирака с суммируемым потенциалом и оператора Штурма–Лиувилля с коэффициентами-распределениями // Совр. мат. Фунд. напр. 2020. Т. 66. Вып. 3. С. 373–530.
14. *Владыкина В.Е., Шкаликов А.А.* Спектральные свойства обыкновенных дифференциальных операторов с инволюцией // Докл. РАН. 2019. Т. 484. № 1. С. 12–17.
15. *Kopzhassarova A.A., Lukashov A.L., Sarsenbi A.M.* Spectral properties of non-self-adjoint perturbations for a spectral problem with involution // Abstr. Appl. Anal. 2012. Art. ID 590781.

Воронежский государственный университет,
Северо-Осетинский государственный университет
им. К.Л. Хетагурова, г. Владикавказ,
Университет Северного Иллинойса,
г. Де-Калб, США,
Воронежский государственный технический университет

Поступила в редакцию 01.02.2021 г.
После доработки 10.04.2021 г.
Принята к публикации 08.09.2021 г.