ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 10, с. 1305–1317

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.911

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, СЛАБО УПРАВЛЯЕМЫХ ГРУБЫМИ ТРАЕКТОРИЯМИ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ ГЁЛЬДЕРА

© 2021 г. **М. М. Васьковский**

Разработан функциональный вариант теории грубых траекторий с произвольным показателем Гёльдера. С его помощью для класса обыкновенных и класса стохастических одномерных дифференциальных уравнений, слабо управляемых грубыми траекториями с произвольным показателем Гёльдера, доказана теорема существования и единственности решения и для уравнений первого из этих классов получена формула замены переменных.

DOI: 10.31857/S0374064121100022

Введение. Дифференциальные уравнения вида $dY_t = f(Y_t)\,dX_t,$ где X – некоторая α-гёльдеровская функция, $\alpha \leqslant 1/2,$ не могут быть исследованы с использованием интегралов Римана–Стилтьеса. В работе Т. Лайонса [1] предложен принципиально новый подход к интегрированию по α-гёльдеровским функциям и разработаны его приложения к теории дифференциальных уравнений. Метод Лайонса основан на включении в интегральные суммы членов тейлоровских разложений высших порядков, соответствующих уравнению $dY_t = f(Y_t)\,dX_t,$ и получил название теории грубых траекторий. М. Губинелли [2] разработал функциональный вариант теории грубых траекторий, позволяющий исследовать дифференциальные уравнения, управляемые негеометрическими грубыми траекториями. Однако теория грубых траекторий применима лишь при $\alpha > 1/3.$ Ф.А. Харан [3] показал, что подход Губинелли может быть расширен и использован для интегрирования по гёльдеровским функциям с показателем $\alpha > 1/4.$ Однако подход Харана реализован лишь для геометрических грубых траекторий.

Теория грубых траекторий имеет наиболее значительное применение в теории стохастических дифференциальных уравнений и, в частности, для уравнений, управляемых дробными броуновскими движениями [4]. Первые работы, посвящённые таким приложениям теории грубых траекторий, принадлежат Л. Кутэн, Ж. Кьяну, Ф. Бадуэну [5, 6]. В дальнейшем эти результаты уточнялись и обобщались в работах [7–11]. В статье [5] показано, что для дробных броуновских движений с индексами Хёрста $H \leqslant 1/4$ их кусочно-линейные аппроксимации не являются сходящимися по вероятности. Поэтому стохастические дифференциальные уравнения, управляемые дробными броуновскими движениями с индексами Хёрста $H \leqslant 1/4,$ не могут быть исследованы в рамках известной теории грубых траекторий.

Опираясь на идеи Губинелли и Харана, в настоящей статье разработана теория грубых траекторий с произвольным показателем Гёльдера $\alpha,$ которая, в отличие от теории Лайонса, не требует сходимости кусочно-линейных аппроксимаций процесса $X,$ что позволяет применять построенную теорию к исследованию проблемы существования и единственности решений одномерных стохастических дифференциальных уравнений, управляемых дробными броуновскими движениями с произвольным показателем Хёрста $H \in (0,1).$ Недостатком теории грубых траекторий являются жёсткие условия относительно гладкости и ограниченности функции $f.$ Для стохастических дифференциальных уравнений, управляемых стандартными и дробными броуновскими движениями с индексами Хёрста, большими $1/2,$ результаты могут быть значительно усилены, что, в частности, показано в работах [12–20].

Определение грубых траекторий. Зафиксируем какие-либо $T > 0$ и $\alpha \in (0,1]$. Пусть V – конечномерное евклидово пространство. Через $C^\alpha([0,T],V)$ и $C_2^\alpha([0,T],V)$ обозначим множества функций $f:[0,T]\to V$ и $g:[0,T]^2\to V$ соответственно таких, что величины

$$\|f\|_\alpha := \sup_{\substack{s,t\in[0,T]\\ s\neq t}} \frac{|f_t - f_s|}{|t-s|^\alpha}, \quad \|g\|_{\alpha,2} := \sup_{\substack{s,t\in[0,T]\\ s\neq t}} \frac{|g_{s,t}|}{|t-s|^\alpha}$$

конечны. Как и в [4, гл. 2], далее для функции двух переменных $g_{s,t}$ будем писать $\|g\|_\alpha$ вместо $\|g\|_{\alpha,2}$. Для функции одной переменной f_t через $f_{s,t}$ будем обозначать приращение $f_t - f_s$.

Для целого неотрицательного k и конечномерных евклидовых пространств V и W через $C_b^k(V,W)$ обозначим множество функций $h: V\to W$ таких, что норма

$$\|h\|_{C_b^k} := \sum_{i=0}^k \|D^i h\|_\infty$$

конечна, где $\|D^i h\|_\infty = \sup\limits_{t\in[0,T]} |D^i h_t|$.

Положим $n = [1/\alpha]$. Обозначим через $\mathscr{C}^\alpha([0,T],V)$ множество α-непрерывных по Гёльдеру *грубых траекторий,* т.е. множество элементов $\mathbf{X} = (1,\mathbf{X}^1,\ldots,\mathbf{X}^n)$ таких, что $\mathbf{X}^i \in C_2^{i\alpha}([0,T],V^{\bigotimes i})$ для любого $i = \overline{1,n}$, и для любых $s,u,t\in[0,T]$ выполняется тождество Чена $\mathbf{X}_{s,t} = \mathbf{X}_{s,u} \boxplus \mathbf{X}_{u,t}$, где

$$(\mathbf{X}_{s,u} \boxplus \mathbf{X}_{u,t})^i = \sum_{j=0}^i \mathbf{X}_{s,u}^j \bigotimes \mathbf{X}_{u,t}^{i-j}.$$

Отметим, что операция $\boxplus$ задаёт умножение на тензорной алгебре $T^{(n)}(V) = \bigoplus_{i=0}^n V^{\bigotimes i}$, где $V^{\bigotimes 0} = \mathbb{R}$. Таким образом, элемент $\mathbf{X}:[0,T]^2\to T^{(n)}(V)$ однозначно определяется значениями $\mathbf{X}_{0,t}$, $t\in[0,T]$, поскольку $\mathbf{X}_{s,t} = (\mathbf{X}_{0,s})^{-1}\boxplus \mathbf{X}_{0,t}$. Далее будем писать $\mathbf{X}_t$ вместо $\mathbf{X}_{0,t}$.

Грубая траектория $\mathbf{X} = (1,\mathbf{X}^1,\ldots,\mathbf{X}^n)$ называется *геометрической,* если

$$\mathrm{Sym}\,(\mathbf{X}_{s,t}^i) = \frac{1}{i!}(\mathbf{X}_{s,t}^1)^{\bigotimes i} \quad \text{для всех} \quad i = \overline{1,n},$$

где $\mathrm{Sym}\,(\mathbf{X}_{s,t}^i)$ обозначает симметрическую часть тензора $\mathbf{X}_{s,t}^i$. Множество геометрических грубых траекторий обозначаем через $\mathscr{C}_g^\alpha([0,T],V)$.

Будем говорить, что элемент $\mathbf{X}\in\mathscr{C}^\alpha([0,T],V)$ является *грубой траекторией* над $X\in C^\alpha([0,T],V)$, если $\mathbf{X}_{0,t}^1 = X_t$ для любых $t\in[0,T]$.

Определение слабо управляемых грубых траекторий. Пусть $X\in C^\alpha([0,T],V)$, а $\mathbf{X} = (1,\mathbf{X}^1,\ldots,\mathbf{X}^n)$ – грубая траектория над X. Пусть W – конечномерное евклидово пространство. Будем говорить, что функция $Y_t \in C^\alpha([0,T],W)$ *слабо управляется* грубой траекторией $\mathbf{X}\in\mathscr{C}^\alpha([0,T],V)$, если существуют функции $Y^{(1)}:[0,T]\to\mathcal{L}(V,W)$, $\ldots$ $\ldots$, $Y^{(n-1)}:[0,T]\to\mathcal{L}(V^{\bigotimes(n-1)},W)$ такие, что

$$Y_{s,t} = Y_s^{(1)}\mathbf{X}_{s,t}^1 + \ldots + Y_s^{(n-1)}\mathbf{X}_{s,t}^{n-1} + R_{s,t}^{Y,n}, \quad Y_{s,t}^{(1)} = Y_s^{(2)}\mathbf{X}_{s,t}^1 + \ldots + Y_s^{(n-1)}\mathbf{X}_{s,t}^{n-2} + R_{s,t}^{Y,n-1}, \quad \ldots$$

$$\ldots, \quad Y_{s,t}^{(n-2)} = Y_s^{(n-1)}\mathbf{X}_{s,t}^1 + R_{s,t}^{Y,2}, \quad Y_{s,t}^{(n-1)} = R_{s,t}^{Y,1};$$

а величина $\|R^{Y,i}\|_{i\alpha}$, $i = \overline{1,n}$, конечна для каждого из остаточных членов $R^{Y,i}$. Функцию $Y^{(i)}$ будем называть *грубой производной* порядка i от Y (если $\alpha\in(1/2,1/3]$, то грубая производная $Y^{(1)}$ является производной Губинелли [4, гл. 4]).

Так как пространство $C^\alpha([0,T],W)$ банахово, то множество

$$\mathcal{D}^\alpha_{\mathbf{X}}([0,T],W)=\left\{(Y,Y^{(1)},\ldots,Y^{(n-1)}) : Y\in C^\alpha([0,T],W),\ \ \sum_{i=1}^{n}\|R^{Y,i}\|_{i\alpha}<\infty\right\}$$

также образует банахово пространство относительно нормы

$$\|\mathbf{Y}\|_{\mathcal{D}^\alpha_{\mathbf{X}}}:=\sum_{i=0}^{n-1}|Y_0^{(i)}|+\|(Y,Y^{(1)},\ldots,Y^{(n-1)})\|_{\mathcal{D}^\alpha_{\mathbf{X}}},$$

где $Y_t^{(0)}=Y_t$, $\|(Y,Y^{(1)},\ldots,Y^{(n-1)})\|_{\mathcal{D}^\alpha_{\mathbf{X}}}=\sum_{i=1}^n\|R^{Y,i}\|_{i\alpha}$ [4, гл. 4].

Определение интеграла по грубым траекториям. Пусть V, W – некоторые конечномерные евклидовы пространства, $\mathbf{X}=(1,\mathbf{X}^1,\ldots,\mathbf{X}^n)\in\mathscr{C}^\alpha([0,T],V)$, $Y\in C^\alpha([0,T],\mathcal{L}(V,W))$, $(Y,Y^{(1)},\ldots,Y^{(n-1)})\in\mathcal{D}^\alpha_{\mathbf{X}}([0,T],\mathcal{L}(V,W))$. Возьмём некоторые $s,t\in[0,T]$, $s<t$, через $\mathcal{P}$ обозначим произвольное конечное разбиение отрезка $[s,t]$ точками, а через $|\mathcal{P}|$ – наибольшую из длин отрезков разбиения.

Потраекторным интегралом $\int_s^t Y_r\,d\mathbf{X}_r$ назовём следующий предел интегральных сумм (если этот предел существует, конечен и не зависит от способа разбиения отрезка $[s,t]$ точками):

$$\int\limits_s^t Y_r\,d\mathbf{X}_r:=\lim_{|\mathcal{P}|\to0}\sum_{[u,v]\in\mathcal{P}}\sum_{i=0}^{n-1}Y_u^{(i)}\mathbf{X}^{i+1}_{u,v}.$$

Предложение 1. *Пусть V, W – конечномерные евклидовы пространства, $\alpha\in(0,1]$, $n=[1/\alpha]$, $\mathbf{X}=(1,\mathbf{X}^1,\ldots,\mathbf{X}^n)\in\mathscr{C}^\alpha([0,T],V)$, $(Y,Y^{(1)},\ldots,Y^{(n-1)})\in\mathcal{D}^\alpha_{\mathbf{X}}([0,T],\mathcal{L}(V,W))$. Тогда для любых $s,t\in[0,T]$ интеграл $\int_s^t Y_r\,d\mathbf{X}_r$ корректно определён и существует постоянная $C=C(\alpha)$ такая, что выполняется оценка*

$$\left|\int\limits_s^t Y_r\,d\mathbf{X}_r-\sum_{i=0}^{n-1}Y_s^{(i)}\mathbf{X}^{i+1}_{s,t}\right|\leqslant C\sum_{i=1}^{n}\|\mathbf{X}^{n+1-i}\|_{(n+1-i)\alpha}\|R^{Y,i}\|_{i\alpha}|t-s|^{(n+1)\alpha}\tag{1}$$

для всех $s,t\in[0,T]$.

Доказательство. Пусть

$$\psi_{s,t}=\sum_{i=0}^{n-1}Y_s^{(i)}\mathbf{X}^{i+1}_{s,t},\quad 0<s<t<T,$$

$$\delta\psi_{s,u,t}=\psi_{s,t}-\psi_{s,u}-\psi_{u,t},\quad 0<s<u<t<T.$$

Непосредственной подстановкой несложно убедиться в справедливости равенства

$$\delta\psi_{s,u,t}=-\sum_{i=1}^{n}R^{Y,i}_{s,u}\mathbf{X}^{n-i+1}_{u,t}.\tag{2}$$

Докажем, что существует постоянная $\beta>1$ такая, что $\|\psi\|_{\alpha,\beta}:=\|\psi\|_\alpha+\|\delta\psi\|_{\beta,3}<\infty$, где

$$\|\psi\|_\alpha=\sup_{s<t}\frac{|\psi_{s,t}|}{|t-s|^\alpha},\quad \|\delta\psi\|_{\beta,3}=\sup_{s<u<t}\frac{|\delta\psi_{s,u,t}|}{|t-s|^\beta}.$$

Имеем

$$\|\psi\|_\alpha\leqslant\sum_{i=0}^{n-1}\sup_s|Y_s^i|\sup_{s<t}\frac{|\mathbf{X}^{i+1}_{s,t}|}{|t-s|^\alpha}=\sum_{i=0}^{n-1}\sup_s\left(|Y_0^i|+\sum_{j=i+1}^{n-1}|Y_0^{(j)}\mathbf{X}^{j-i}_{0,s}+R^{Y,n-i}_{0,s}|\right)\|\mathbf{X}^{i+1}\|_\alpha\leqslant$$

$$\leqslant c_{T,\alpha,\mathbf{X}}(1+\|\mathbf{Y}\|_{\mathcal{D}^\alpha_\mathbf{X}})<\infty,$$

здесь $c_{T,\alpha,\mathbf{X}}$ – постоянная, зависящая от T, α, $\max\limits_{i=\overline{0,n-1}}\|\mathbf{X}^{i+1}\|_\alpha$.

Покажем теперь, что $\|\delta\psi\|_{\beta,3}<\infty$ при $\beta=(n+1)\alpha$. Вследствие равенства (2) имеем

$$\|\delta\psi\|_{\beta,3}=\sup_{s<u<t}\frac{|\delta\psi_{s,u,t}|}{|t-s|^{(n+1)\alpha}}=\sup_{s<u<t}\frac{|\sum_{i=1}^n R^{Y,i}_{s,u}\mathbf{X}^{n-i+1}_{u,t}|}{|t-s|^{(n+1)\alpha}}\leqslant\sum_{i=1}^n\sup_{s<u<t}\frac{|R^{Y,i}_{s,u}|}{|t-s|^{i\alpha}}\frac{|\mathbf{X}^{n-i+1}_{u,t}|}{|t-s|^{(n+1-i)\alpha}}. \quad (3)$$

Существуют постоянные $c=c_{T,\alpha,\mathbf{X}}$, $l=l_{T,\alpha,\|\mathbf{Y}\|_{\mathcal{D}^\alpha_\mathbf{X}}}$ такие, что для любых $i=\overline{1,n}$ и всех s,u,t, $0<s<u<t<T$, выполняются неравенства

$$|R^{Y,i}_{s,u}|\leqslant l|s-u|^{i\alpha},\quad |\mathbf{X}^{n-i+1}_{u,t}|\leqslant c|t-u|^{(n-i+1)\alpha}. \quad (4)$$

Учитывая неравенства (4) в (3), получаем, что $\|\delta\psi\|_{\beta,3}<\infty$.

Таким образом, согласно лемме 4.2 [4], интеграл $\int_s^t Y_r\,d\mathbf{X}_r$ корректно определён.

Перейдём к доказательству оценки (1). Из доказательства леммы 4.2 [4] следует, что существует постоянная $C=C(\beta)$ такая, что выполняется неравенство

$$\left|\int\limits_s^t Y_r\,d\mathbf{X}_r-\sum_{i=0}^{n-1}Y^{(i)}_s\mathbf{X}^{i+1}_{s,t}\right|\leqslant C\|\delta\psi\|_{\beta,3}|t-s|^\beta\quad\text{для всех}\quad s,t,\quad 0<s<t<T. \quad (5)$$

Используя равенство (2), получаем

$$\|\delta\psi\|_{\beta,3}=\sup_{s<u<t}\frac{|\sum_{i=1}^n R^{Y,i}_{s,u}\mathbf{X}^{n-i+1}_{u,t}|}{|t-s|^\beta}\leqslant\sum_{i=1}^n\sup_{s<u<t}\frac{|R^{Y,i}_{s,u}\mathbf{X}^{n-i+1}_{u,t}|}{|t-s|^\beta}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^n\sup_{s<u<t}\frac{|R^{Y,i}_{s,u}|}{|u-s|^{i\alpha}}\frac{|\mathbf{X}^{n-i+1}_{u,t}|}{|t-u|^{(n-i+1)\alpha}}\leqslant\sum_{i=1}^n\|R^{Y,i}\|_{i\alpha}\|\mathbf{X}^{n+1-i}\|_{(n+1-i)\alpha}. \quad (6)$$

Таким образом, из соотношений (5) и (6) вытекает оценка (1). Предложение доказано.

Следствие. *Пусть* $\mathbf{X}=(1,\mathbf{X}^1,\ldots,\mathbf{X}^n)\in\mathscr{C}^\alpha_g([0,T],\mathbb{R})$ *– геометрическая грубая траектория над* $X\in C^\alpha([0,T],\mathbb{R})$, $\alpha\in(0,1]$, $n=[1/\alpha]$. *Если* $F\in C^n_b(\mathbb{R},W)$, *где* W *– конечномерное евклидово пространство, то* $(F(X),DF(X),\ldots,D^{n-1}F(X))\in\mathcal{D}^\alpha_\mathbf{X}([0,T],W)$ *и для любых* $s,t\in[0,T]$ *корректно определён интеграл* $\int_s^t F(X_r)\,d\mathbf{X}_r$.

Доказательство. Пусть $Y^{(i)}_t=D^iF(X_t)$, $i=\overline{0,n-1}$. По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа имеем

$$F(X_t)=F(X_s)+DF(X_s)\mathbf{X}^1_{s,t}+\ldots+D^{n-1}F(X_s)\mathbf{X}^{n-1}_{s,t}+D^nF(X_s+\theta X_{s,t})\mathbf{X}^n_{s,t},\quad\theta\in(0,1).$$

Отсюда следует, что $R^{Y,n}_{s,t}=D^nF(X_s+\theta X_{s,t})\mathbf{X}^n_{s,t}$. Так как $D^nF(X)\in C_b(\mathbb{R},W)$, $\|\mathbf{X}^n\|_{n\alpha}<\infty$, то $\|R^{Y,n}\|_{n\alpha}<\infty$.

Аналогичными рассуждениями, раскладывая $D^iF(X_t)$ по формуле Тейлора, доказываем, что $\|R^{Y,i}\|_{i\alpha}<\infty$ для любого $i<n$.

Таким образом, $(Y,Y^{(1)},\ldots,Y^{(n-1)})\in\mathcal{D}^\alpha_\mathbf{X}([0,T],W)$ и, согласно предложению 1, интеграл $\int_s^t F(X_r)\,d\mathbf{X}_r$ корректно определён.

Композиция слабо управляемых грубых траекторий с гладкими функциями. Пусть $\alpha\in(1/(n+1),1/n]$, $\mathbf{X}=(1,\mathbf{X}^1,\ldots,\mathbf{X}^n)\in\mathscr{C}^\alpha_g([0,T],\mathbb{R})$ – геометрическая грубая траектория над $X\in C^\alpha([0,T],\mathbb{R})$. Пусть $Y\in C^\alpha([0,T],\mathbb{R})$, $(Y,Y^{(1)},Y^{(2)},\ldots,Y^{(n-1)})\in\mathcal{D}^\alpha_\mathbf{X}([0,T],\mathbb{R})$; $f\in C^n_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Определим $Z_t = f(Y_t)$. По аналогии с формулой Фаа-Ди-Бруно [21, с. 137] положим

$$Z^{(k)} = \sum_{j=1}^{k} D^j f(Y) B_{k,j}(Y^{(1)}, \ldots, Y^{(k-j+1)}), \quad k = \overline{1, n-1}, \tag{7}$$

где $B_{k,j}(x_1, \ldots, x_{k-j+1})$ – многочлены Белла [21, с. 133].

Предложение 2. *Пусть* $\alpha \in (1/(n+1), 1/n]$, $\mathbf{X} = (1, \mathbf{X}^1, \ldots, \mathbf{X}^n) \in \mathscr{C}_g^\alpha([0,T], \mathbb{R})$ – *геометрическая грубая траектория над* $X \in C^\alpha([0,T], \mathbb{R})$, $f \in C_b^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. *Если*

$$(Y, Y^{(1)}, Y^{(2)}, \ldots, Y^{(n-1)}) \in \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha([0,T], \mathbb{R}),$$

то $(Z, Z^{(1)}, Z^{(2)}, \ldots, Z^{(n-1)}) \in \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha([0,T], \mathbb{R})$, *где* $Z = f(Y)$, *а грубые производные* $Z^{(k)}$ *определяются по формулам (7). Кроме того, для любого* $M > 0$ *существует такое* $C_M > 0$, *что для любого* $(Y, Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n-1)}) \in \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha([0,T], \mathbb{R})$, *для которого* $\|(Y, Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n-1)})\|_{\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha} + \sum_{i=0}^{n-1} |Y_0^{(i)}| \leqslant M$, *выполняется оценка*

$$\|(Z, Z^{(1)}, Z^{(2)}, \ldots, Z^{(n-1)})\|_{\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha} \leqslant C_M.$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $X_t = t$, а Y – произвольная функция из $C_b^n([0,T], \mathbb{R})$. В данном случае грубые производные $Y_t^{(i)}$ совпадают с обычными производными $D^i Y_t$.

Возьмём произвольное $i \in \{1, \ldots, n\}$. С одной стороны, справедливость равенства

$$Z_t^{(i)} = Z_s^{(i)} + Z_s^{(i+1)} \mathbf{X}_{s,t}^1 + \ldots + Z_s^{(n-1)} \mathbf{X}_{s,t}^{n-i-1} + R_{s,t}^{Z,n-i}, \tag{8}$$

где $R_{s,t}^{Z,n-i} = O(|t-s|^{n-i})$, вытекает из формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

С другой стороны, согласно формуле (7), справедливо равенство

$$Z_t^{(i)} = \sum_{j=1}^{i} D^j f(Y_t) B_{i,j}(Y_t^{(1)}, \ldots, Y_t^{(i-j+1)}). \tag{9}$$

В силу формулы Тейлора получаем

$$D^j f(Y_t) = \sum_{k=j}^{n-1} D^k f(Y_s) Y_{s,t}^{k-j+1} + O(Y_{s,t}^{n-j}) =$$

$$= \sum_{k=j}^{n-1} \left(D^k f(Y_s) \left(\sum_{l=1}^{n-1} Y_s^{(l)} \mathbf{X}_{s,t}^l + R_{s,t}^{Y,n} \right)^{k-j+1} \right) + O(Y_{s,t}^{n-j}). \tag{10}$$

По определению грубых производных имеем

$$B_{i,j}(Y_t^{(1)}, \ldots, Y_t^{(i-j+1)}) = B_{i,j}(Y_s^{(1)} + Y_s^{(2)} \mathbf{X}_{s,t}^1 + \ldots + Y_s^{(n-1)} \mathbf{X}_{s,t}^{n-2} + R_{s,t}^{Y,n-1}, \quad \ldots,$$
$$Y_s^{(i-j+1)} + Y_s^{(i-j+2)} \mathbf{X}_{s,t}^1 + \ldots + Y_s^{(n-1)} \mathbf{X}_{s,t}^{n-i+j-2} + R_{s,t}^{Y,n-i+j-1}). \tag{11}$$

Подставляя (10) и (11) в (9) и приводя подобные, приходим к соотношению

$$Z_t^{(i)} = \sum_{r=0}^{n-i-1} \mathbf{X}_{s,t}^r \sum_{j=1}^{n-1} D^j f(Y_s) P_{r,j}(Y_s^{(1)}, \ldots, Y_s^{(n-1)}) + O(|t-s|^{n-i}), \tag{12}$$

где $P_{r,j}(x_1, \ldots, x_{n-1})$ – некоторые многочлены, не зависящие от $\mathbf{X}$, Y, f.

Принимая во внимание равенства (7), будем иметь

$$Z_s^{(i)} + Z_s^{(i+1)}\mathbf{X}_{s,t}^1 + \ldots + Z_s^{(n-1)}\mathbf{X}_{s,t}^{n-i-1} = \sum_{r=0}^{n-i-1} \mathbf{X}_{s,t}^r \sum_{j=1}^{r+i} D^j f(Y_s) B_{r+i,j}(Y_s^{(1)}, \ldots, Y_s^{(r+i-j+1)}). \quad (13)$$

Теперь из формулы Фаа-Ди-Бруно [21, с. 137], соотношений (8), (12), (13), выполненных для произвольных функций $Y \in C_b^n([0,T],\mathbb{R})$, $f \in C_b^n(\mathbb{R},\mathbb{R})$ и $X_t = t$, вытекает, что

$$P_{r,j}(x_1, \ldots, x_{n-1}) = B_{r+i,j}(x_1, \ldots, x_{r+i-j+1}) \quad (14)$$

для всех $j \leqslant r+i$, и $P_{r,j}(x_1, \ldots, x_{n-1}) \equiv 0$ при $j > r+i$.

Пусть $\mathbf{X} = (1, \mathbf{X}^1, \ldots, \mathbf{X}^n) \in \mathscr{C}_g^\alpha([0,T],\mathbb{R})$, $\mathbf{Y} = (Y, Y^{(1)}, Y^{(2)}, \ldots, Y^{(n-1)}) \in \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha([0,T],\mathbb{R})$. В силу соотношений (7) справедливо равенство (13), а также равенство (12) с теми же многочленами $P_{r,j}(x_1, \ldots, x_{n-1})$. Теперь из равенств (14) следуют соотношения (8). При этом постоянные, входящие в оценку для O большого в соотношениях (10), (12), могут быть выбраны одними и теми же для всех $\mathbf{Y} \in \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha([0,T],\mathbb{R})$ из шара радиуса M (следовательно, таким же свойством обладает и постоянная, входящая в оценку для O большого в соотношении (8)). Таким образом, $(Z, Z^{(1)}, Z^{(2)}, \ldots, Z^{(n-1)}) \in \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha([0,T],\mathbb{R})$ и $\|(Z, Z^{(1)}, Z^{(2)}, \ldots, Z^{(n-1)})\|_{\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha} = O(M)$. Предложение доказано.

В дальнейшем нам понадобится многомерный аналог формул Фаа-Ди-Бруно для грубых производных.

Пусть $\mathbf{X} \in \mathscr{C}_g^\alpha([0,T],\mathbb{R})$, $\mathbf{Y} = (Y, Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n-1)})$, $\widetilde{\mathbf{Y}} = (\widetilde{Y}, \widetilde{Y}^{(1)}, \ldots, \widetilde{Y}^{(n-1)}) \in \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha([0,T],\mathbb{R})$, $g \in C_b^n(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$, $Z_t = g(Y_t, \widetilde{Y}_t)$. Положим

$$Z_t^{(k)} = \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=0}^{j} D^j_{x^l y^{j-l}} g(Y_t, \widetilde{Y}_t) Q_{j,l}(Y_t^{(1)}, \ldots, Y_t^{(k)}, \widetilde{Y}_t^{(1)}, \ldots, \widetilde{Y}_t^{(k)}), \quad k = \overline{1, n-1}, \quad (15)$$

где $Q_{j,l}(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k) = \sum k! \prod_{i=1}^k ((i!)^{m_i} q_{i1}! q_{i2}!)^{-1} x_i^{q_{i1}} y_i^{q_{i2}}$, а суммирование осуществляется по всем целым неотрицательным числам m_i, q_{i1}, q_{i2} $(i \in \{1, \ldots, k\})$ таким, что $m_1 + 2m_2 + \ldots + km_k = k$, $q_{11} + \ldots + q_{k1} = l$, $q_{12} + \ldots + q_{k2} = j - l$, $q_{i1} + q_{i2} = m_i$, $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Предложение 3. *Пусть* $\alpha \in (1/(n+1), 1/n]$, $\mathbf{X} = (1, \mathbf{X}^1, \ldots, \mathbf{X}^n) \in \mathscr{C}_g^\alpha([0,T],\mathbb{R})$ – *геометрическая грубая траектория над* $X \in C^\alpha([0,T],\mathbb{R})$, $g \in C_b^n(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$. *Если*

$$(Y, Y^{(1)}, Y^{(2)}, \ldots, Y^{(n-1)}), (\widetilde{Y}, \widetilde{Y}^{(1)}, \ldots, \widetilde{Y}^{(n-1)}) \in \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha([0,T],\mathbb{R}),$$

то $(Z, Z^{(1)}, Z^{(2)}, \ldots, Z^{(n-1)}) \in \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha([0,T],\mathbb{R})$, *где* $Z = g(Y, \widetilde{Y})$, *а грубые производные* $Z^{(k)}$ *определяются по формулам (15). Для любого* $M > 0$ *существует такое* $C_M > 0$, *что для любых* $(Y, Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n-1)})$, $(\widetilde{Y}, \widetilde{Y}^{(1)}, \ldots, \widetilde{Y}^{(n-1)}) \in \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha([0,T],\mathbb{R})$, *для которых*

$$\|(Y, Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n-1)})\|_{\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha} + \sum_{i=0}^{n-1} |Y_0^{(i)}| \leqslant M, \quad \|(\widetilde{Y}, \widetilde{Y}^{(1)}, \ldots, \widetilde{Y}^{(n-1)})\|_{\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha} + \sum_{i=0}^{n-1} |\widetilde{Y}_0^{(i)}| \leqslant M,$$

выполняется оценка $\|(Z, Z^{(1)}, Z^{(2)}, \ldots, Z^{(n-1)})\|_{\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha} \leqslant C_M$.

Доказательство предложения 3 проводится по той же схеме, что и предложения 2, при этом необходимо воспользоваться формулой Тейлора для функции двух переменных и двумерным аналогом формулы Фаа-Ди-Бруно из [22].

В завершение настоящего пункта докажем, что произведение управляемых грубых траекторий является управляемой грубой траекторией.

Пусть

$$\mathbf{X} \in \mathscr{C}_g^\alpha([0,T],\mathbb{R}), \quad \mathbf{G} = (G, G^{(1)}, \ldots, G^{(n-1)}),$$

$$\mathbf{H} = (H, H^{(1)}, \ldots, H^{(n-1)}) \in \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha([0,T],\mathbb{R}), \quad Z_t = G_t H_t.$$

Положим

$$Z_t^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} C_k^j G_t^{(j)} H_t^{(k-j)}, \quad k = \overline{1, n-1}. \tag{16}$$

Предложение 4. *Пусть* $\alpha \in (1/(n+1), 1/n]$, $\mathbf{X} = (1, \mathbf{X}^1, \ldots, \mathbf{X}^n) \in \mathscr{C}_g^\alpha([0,T], \mathbb{R})$ – *геометрическая грубая траектория над* $X \in C^\alpha([0,T], \mathbb{R})$, $g \in C_b^n(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. *Если*

$$\mathbf{G} = (G, G^{(1)}, \ldots, G^{(n-1)}), \quad \mathbf{H} = (H, H^{(1)}, \ldots, H^{(n-1)}) \in \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha([0,T], \mathbb{R}),$$

то $(Z, Z^{(1)}, Z^{(2)}, \ldots, Z^{(n-1)}) \in \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha([0,T], \mathbb{R})$, *где* $Z = GH$, *а грубые производные* $Z^{(k)}$ *определяются по формулам (16). Кроме того, выполняется оценка*

$$\|(Z, Z^{(1)}, Z^{(2)}, \ldots, Z^{(n-1)})\|_{\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant C\biggl(\|(G, G^{(1)}, \ldots, G^{(n-1)})\|_{\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha} + \sum_{i=0}^{n-1} |G_0^{(i)}|\biggr)\biggl(\|(H, H^{(1)}, \ldots, H^{(n-1)})\|_{\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha} + \sum_{i=0}^{n-1} |H_0^{(i)}|\biggr),$$

где постоянная C *не зависит от* G *и* H.

Доказательство. Возьмём произвольное $i \in \{1, \ldots, n\}$ и рассмотрим остаточный член

$$R_{s,t}^{Z,i} = Z_{s,t}^{(n-i)} - Z_s^{(n-i+1)} \mathbf{X}_{s,t}^1 - \ldots - Z_s^{(n-1)} \mathbf{X}_{s,t}^{i-1}.$$

Нетрудно убедиться, что для любых функций $f, g : [0,T] \to \mathbb{R}$ справедливо тождество $(fg)_{s,t} = f_s g_{s,t} + g_s f_{s,t} + f_{s,t} g_{s,t}$. Поэтому

$$R_{s,t}^{Z,i} = \sum_{j=0}^{n-i} C_{n-i}^j \bigl(G_s^{(j)} H_{s,t}^{(n-i-j)} + G_{s,t}^{(j)} H_s^{(n-i-j)} + G_{s,t}^{(j)} H_{s,t}^{(n-i-j)}\bigr) - \sum_{l=1}^{i-1} \mathbf{X}_{s,t}^l \sum_{j=0}^{n-i+l} C_{n-i+l}^j G_s^{(j)} H_s^{(n-i+l-j)} =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-i} C_{n-i}^j G_s^{(j)} \biggl(\sum_{r=1}^{i+j-1} H_s^{(n-i-j+r)} \mathbf{X}_{s,t}^r + R_{s,t}^{H,i+j}\biggr) + \sum_{j=0}^{n-i} C_{n-i}^j H_s^{(n-i-j)} \biggl(\sum_{r=1}^{n-j-1} G_s^{(j+r)} \mathbf{X}_{s,t}^r + R_{s,t}^{G,n-j}\biggr) +$$

$$+ \sum_{j=0}^{n-i} C_{n-i}^j \biggl(\sum_{r=1}^{n-j-1} G_s^{(j+r)} \mathbf{X}_{s,t}^r + R_{s,t}^{G,n-j}\biggr)\biggl(\sum_{r=1}^{i+j-1} H_s^{(n-i-j+r)} \mathbf{X}_{s,t}^r + R_{s,t}^{H,i+j}\biggr) -$$

$$- \sum_{l=1}^{i-1} \mathbf{X}_{s,t}^l \sum_{j=0}^{n-i+l} C_{n-i+l}^j G_s^{(j)} H_s^{(n-i+l-j)}.$$

Приводя подобные и группируя члены, получаем

$$R_{s,t}^{Z,i} = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{X}_{s,t}^j \sum_{r=0}^{n-1} H_s^{(r)} P_{j,r}(G_s^{(1)}, \ldots, G_s^{(n-1)}, R_{s,t}^{G,i}, \ldots, R_{s,t}^{G,n}) +$$

$$+ \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{X}_{s,t}^j \sum_{r=i}^{n} R_{s,t}^{H,r} Q_{j,r}(G_s^{(1)}, \ldots, G_s^{(n-1)}, R_{s,t}^{G,i}, \ldots, R_{s,t}^{G,n}), \tag{17}$$

где $P_{j,r}(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_i, \ldots, y_n)$, $Q_{j,r}(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_i, \ldots, y_n)$ – некоторые линейные многочлены с нулевыми свободными членами, коэффициенты которых не зависят от $\mathbf{G}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{X}$.

Полагая $X_t = t$, $G, H \in C^n([0,T],\mathbb{R})$ и раскладывая $Z_t^{(n-i)}$ по формуле Тейлора в точке s, заключаем, что $P_{j,r}(x_1,\ldots,x_{n-1},y_i,\ldots,y_n)$ не зависят от $x_1,\ldots,\ x_{n-1}$ при $j<i$. Следовательно, из соотношения (17) вытекает существование постоянной $C_i = C_i(\mathbf{G},\mathbf{X})$ такой, что

$$\|R^{Z,i}\|_{i\alpha} \leqslant C_i\biggl(\|(G,G^{(1)},\ldots,G^{(n-1)})\|_{\mathcal{D}^\alpha_\mathbf{X}} + \sum_{i=0}^{n-1}|G_0^{(i)}|\biggr)\biggl(\|(H,H^{(1)},\ldots,H^{(n-1)})\|_{\mathcal{D}^\alpha_\mathbf{X}} + \sum_{i=0}^{n-1}|H_0^{(i)}|\biggr).$$

Предложение доказано.

Дифференциальные уравнения, управляемые грубыми траекториями. Пусть $\beta \in (1/(n+1),1/n]$, $\mathbf{X} = (1,\mathbf{X}^1,\ldots,\mathbf{X}^n) \in \mathscr{C}_g^\beta([0,T],\mathbb{R})$ – геометрическая грубая траектория над $X \in C^\beta([0,T],\mathbb{R})$; $f \in C_b^{n+1}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Выберем произвольно и зафиксируем $\alpha \in (0,\beta)$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$dY_t = f(Y_t)\,d\mathbf{X}_t, \quad t \in [0,T]. \tag{18}$$

Определение 1. *Решением* уравнения (18) с начальным условием $Y_0 = x \in \mathbb{R}$ будем называть элемент $(Y,Y^{(1)},\ldots,Y^{(n-1)}) \in \mathcal{D}^\alpha_\mathbf{X}([0,T],\mathbb{R})$ такой, что для любого $t \in [0,T]$ выполнено равенство

$$Y_t = x + \int_0^t f(Y_s)\,d\mathbf{X}_s, \tag{19}$$

где интеграл в правой части соотношения (19) понимается как грубый потраекторный интеграл, а соответствующие ему грубые производные от $Z = f(Y)$ определяются по формулам (7), а $Y_0^{(1)} = f(Y_0)$, $Y_0^{(2)} = Df(Y_0)f(Y_0)$, $Y_0^{(3)} = D^2f(Y_0)f^2(Y_0) + (Df(Y_0))^2 f(Y_0)$ и т.д.

Определение 2. Пусть $x \in \mathbb{R}$. Будем говорить, что уравнение (18) с начальным условием

$$Y_0 = x \tag{20}$$

имеет *единственное* решение, если для любых решений $\mathbf{Y}$, $\widetilde{\mathbf{Y}} \in \mathcal{D}^\alpha_\mathbf{X}([0,T],\mathbb{R})$ уравнения (18) таких, что $Y_0 = \widetilde{Y}_0 = x$, следует, что $\mathbf{Y}_t = \widetilde{\mathbf{Y}}_t$ для любых $t \in [0,T]$.

Теорема 1. *Пусть* $\alpha,\beta \in (1/(n+1),1/n]$, $\alpha<\beta$, $\mathbf{X} = (1,\mathbf{X}^1,\ldots,\mathbf{X}^n) \in \mathscr{C}_g^\beta([0,T],\mathbb{R})$. *Если* $f \in C_b^{n+1}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, *то для любого* $x \in \mathbb{R}$ *уравнение (18) с начальным условием (20) имеет единственное решение.*

Доказательство. Не нарушая общности, можем предполагать, что $[0,T] = [0,1]$. Докажем, что существует $T_0 > 0$ такое, что уравнение (18) с начальным условием (20) имеет единственное решение в единичном шаре

$$\mathcal{B}_{T_0} = \{\mathbf{Y} = (Y,Y^{(1)},\ldots,Y^{(n-1)}) \in \mathcal{D}^\alpha_\mathbf{X}([0,T_0],\mathbb{R}) : \mathbf{Y}_0 = (x, f(x), Df(x)f(x),\ldots),\ \ \|\mathbf{Y}\|_{\mathcal{D}^\alpha_\mathbf{X}} \leqslant 1\}.$$

Определим аналог отображения Ито–Лайонса $\mathcal{M}_{T_0} : \mathcal{D}^\alpha_\mathbf{X}([0,T_0],\mathbb{R}) \to \mathcal{D}^\alpha_\mathbf{X}([0,T_0],\mathbb{R})$, задав его равенством

$$\mathcal{M}_{T_0}(Y,Y^{(1)},\ldots,Y^{(n-1)}) = \biggl(x + \int_0^\cdot Z_s\,d\mathbf{X}_s, Z, Z^{(1)},\ldots,Z^{(n-2)}\biggr),$$

где грубые производные $Z^{(i)}$ определяются по формулам (7).

Воспользовавшись предложениями 1 и 2, получаем

$$\|\mathcal{M}_{T_0}(Y,Y^{(1)},\ldots,Y^{(n-1)})\|_{\mathcal{D}^\alpha_\mathbf{X}} = \sup_{s\neq t}\frac{|Z_{s,t}^{(n-2)}|}{|t-s|^\alpha} + \sum_{k=3}^n \sup_{s\neq t}|t-s|^{-(k-1)\alpha}\biggl|Z_{s,t}^{(n-k)} - \sum_{i=1}^{k-2} Z_s^{(n-k+i)}\mathbf{X}_{s,t}^i\biggr| +$$

$$+\sup_{s\neq t}|t-s|^{-n\alpha}\left|\int_s^t Z_r\,d\mathbf{X}_r-\sum_{i=0}^{n-2}Z_s^{(i)}\mathbf{X}_{s,t}^{i+1}\right|=\left[Z_{s,t}^{(n-k)}=\sum_{i=1}^{k-1}Z_s^{(n-k+i)}\mathbf{X}_{s,t}^{i}+R_{s,t}^{Z,k}\right]\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{n-1}\sup_{s\neq t}\frac{|Z_s^{(n-1)}\mathbf{X}_{s,t}^{k}+R_{s,t}^{Z,k+1}|}{|t-s|^{k\alpha}}+$$

$$+\sup_{s\neq t}|t-s|^{-n\alpha}\left|\sum_{i=1}^{n}\|\mathbf{X}^{n+1-i}\|_{(n+1-i)\alpha}\|R^{Z,i}\|_{i\alpha}|t-s|^{(n+1)\alpha}+Z_s^{(n-1)}\mathbf{X}_{s,t}^{n}\right|\leqslant CT_0^{\beta-\alpha}<1,$$

где постоянная C может быть выбрана не зависящей от $\mathbf{Y}\in\mathcal{B}_{T_0}$. Таким образом, существует $T_0>0$ такое, что $\mathcal{M}_{T_0}(\mathcal{B}_{T_0})\subset\mathcal{B}_{T_0}$.

Докажем, что отображение $\mathcal{M}_{T_0}$ является сжимающим в шаре $\mathcal{B}_{T_0}$.

Пусть $\mathbf{Y}=(Y,Y^{(1)},\ldots,Y^{(n-1)})$, $\widetilde{\mathbf{Y}}=(\tilde Y,\tilde Y^{(1)},\ldots,\tilde Y^{(n-1)})\in\mathcal{B}_{T_0}$. Применяя композицию с функцией f, определим соответствующие элементы $(Z,Z^{(1)},\ldots,Z^{(n-1)}),(\tilde Z,\tilde Z^{(1)},\ldots,\tilde Z^{(n-1)})\in\in\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^{\alpha}([0,T_0],\mathbb{R})$ согласно формулам (7).

Положим

$$(\Delta,\Delta^{(1)},\ldots,\Delta^{(n-1)})=(Z-\tilde Z,Z^{(1)}-\tilde Z^{(1)},\ldots,Z^{(n-1)}-\tilde Z^{(n-1)}).$$

Аналогично, воспользовавшись предложением 1, получаем

$$\|\mathcal{M}_{T_0}(Y,Y^{(1)},\ldots,Y^{(n-1)})-\mathcal{M}_{T_0}(\tilde Y,\tilde Y^{(1)},\ldots,\tilde Y^{(n-1)})\|_{\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^{\alpha}}\leqslant \tag{21}$$

$$\leqslant C(|\Delta_0^{(1)}|+\ldots+|\Delta_0^{(n-1)}|+\|(\Delta,\Delta^{(1)},\ldots,\Delta^{(n-1)})\|_{\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^{\alpha}})T_0^{\beta-\alpha}=C\|(\Delta,\Delta^{(1)},\ldots,\Delta^{(n-1)})\|_{\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^{\alpha}}T_0^{\beta-\alpha}.$$

Положим $\widetilde\Delta_s=G_sH_s$, где

$$G_s=g(Y_s,\tilde Y_s),\quad H_s=Y_s-\tilde Y_s,\quad g(x,y)=\int_0^1 Df(xt+(1-t)y)\,dt,$$

и определим грубые производные $G^{(i)}$ согласно формулам (15), грубые производные $H^{(i)}$ согласно формулам (7) и грубые производные $\widetilde\Delta^{(i)}$ согласно формулам (16).

Как показано в [4, с. 115], имеет место равенство $\Delta_t=\widetilde\Delta_t$ для любых $t\in[0,T_0]$. Если $X_t=t$, $Y,\widetilde Y\in C^n([0,T_0],\mathbb{R})$, то $\Delta^{(i)}=\widetilde\Delta^{(i)}$ в силу единственности производной. Так как коэффициенты многочленов, входящих в формулы (7), (15), (16), не зависят от $\mathbf{Y}$, $\widetilde{\mathbf{Y}}$, $\mathbf{X}$, то равенство $\Delta^{(i)}=\widetilde\Delta^{(i)}$ для всех $i\in\{1,\ldots,n-1\}$ сохраняется для произвольных $\mathbf{Y}$, $\widetilde{\mathbf{Y}}\in\mathcal{B}_{T_0}$, $\mathbf{X}\in\mathscr{C}_g^{\beta}([0,T_0],\mathbb{R})$.

Используя предложения 3 и 4, приходим к оценке

$$\|(\Delta,\Delta^{(1)},\ldots,\Delta^{(n-1)})\|_{\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^{\alpha}}\leqslant C\left(\sum_{i=0}^{n-1}G_0^{(i)}+\|(G,G^{(1)},\ldots,G^{(n-1)})\|_{\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^{\alpha}}\right)\|(H,H^{(1)},\ldots,H^{(n-1)})\|_{\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^{\alpha}}\leqslant$$

$$\leqslant C\|(Y-\tilde Y,Y^{(1)}-\tilde Y^{(1)},\ldots,Y^{(n-1)}-\tilde Y^{(n-1)})\|_{\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^{\alpha}}, \tag{22}$$

где постоянная C может быть выбрана не зависящей от $\mathbf{Y}$, $\widetilde{\mathbf{Y}}\in\mathcal{M}_{T_0}(\mathcal{B}_{T_0})$.

Таким образом, из соотношений (21) и (22) вытекает, что, уменьшив при необходимости значение T_0, можно добиться того, чтобы отображение $\mathcal{M}_{T_0}$ являлось сжимающим в шаре $\mathcal{B}_{T_0}$.

Так как значение T_0 может быть выбрано независимо от заданного начального условия (20), то существует единственное решение уравнения (18) с начальным условием (20) на всём отрезке $[0,1]$. Теорема доказана.

Докажем формулу замены переменных в дифференциальном уравнении (18).

Теорема 2. *Пусть* $\alpha,\beta \in (1/(n+1),1/n]$, $\alpha<\beta$, $\mathbf{X}=(1,\mathbf{X}^1,\ldots,\mathbf{X}^n)\in\mathscr{C}_g^{\beta}([0,T],\mathbb{R})$, $f\in C_b^{n+1}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $x\in\mathbb{R}$, $\mathbf{Y}=(Y,Y^{(1)},\ldots,Y^{(n-1)})\in\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^{\alpha}([0,T],\mathbb{R})$ *– единственное решение уравнения (18) с начальным условием (20). Тогда для любого* $g\in C_b^{n+1}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *имеет место равенство*

$$g(Y_t)-g(Y_s)=\int\limits_s^t Dg(Y_\tau)f(Y_\tau)\,d\mathbf{X}_\tau,\quad s,t\in[0,T], \tag{23}$$

где грубые производные от $Dg(Y)f(Y)$ *определяются по формулам (7).*

Доказательство. Пусть $s<t$, возьмём произвольное конечное разбиение $\mathcal{P}=\{s=t_0< <t_1<\ldots<t_N=t\}$ отрезка $[s,t]$. Разложим $g(Y_t)$ по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$g(Y_t)-g(Y_s)=\sum_{i=0}^{N-1}\biggl(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j!}D^jg(Y_{t_i})Y_{t_i,t_{i+1}}^j+\frac{1}{(n+1)!}D^{n+1}g(Y_{t_i}+\theta_iY_{t_i,t_{i+1}})Y_{t_i,t_{i+1}}^{n+1}\biggr), \tag{24}$$

где $\theta_i\in(0,1)$.

Нетрудно видеть, что справедливо неравенство

$$\biggl|\sum_{i=0}^{N-1}D^{n+1}g(Y_{t_i}+\theta_iY_{t_i,t_{i+1}})Y_{t_i,t_{i+1}}^{n+1}\biggr|\leqslant C\|Y\|_\alpha^{n+1}\sum_{i=0}^{N-1}|t_{i+1}-t_i|^{(n+1)\alpha}=O(|\mathcal{P}|^{(n+1)\alpha-1}). \tag{25}$$

Используя предложение 1, получаем соотношение

$$Y_{t_i,t_{i+1}}=\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}f(Y_\tau)\,d\mathbf{X}_r=\sum_{k=0}^{n-1}Z_{t_i}^{(k)}\mathbf{X}_{t_i,t_{i+1}}^{k+1}+O(|t_{i+1}-t_i|^{(n+1)\alpha}), \tag{26}$$

где $Z^{(k)}$ – грубые производные от $Z=f(Y)$, вычисленные по формулам (7).

Таким образом, из соотношений (24)–(26) следует, что

$$g(Y_t)-g(Y_s)=\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j!}D^jg(Y_{t_i})\biggl(\sum_{k=0}^{n-1}Z_{t_i}^{(k)}\mathbf{X}_{t_i,t_{i+1}}^{k+1}\biggr)^j+o(1)\quad\text{при}\quad|\mathcal{P}|\to0. \tag{27}$$

Приводя подобные и группируя слагаемые в соотношении (27), получаем

$$g(Y_t)-g(Y_s)=\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{X}_{t_i,t_{i+1}}^k\sum_{j=1}^{n}D^jg(Y_{t_i})P_{k,j}(Z_{t_i},Z_{t_i}^{(1)},\ldots,Z_{t_i}^{(n-1)})+o(1)=$$

$$=\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{X}_{t_i,t_{i+1}}^k\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=0}^{n-1}D^jg(Y_{t_i})D^lf(Y_{t_i})Q_{k,j,l}(Y_{t_i},Y_{t_i}^{(1)},\ldots,Y_{t_i}^{(n-1)})+o(1)\quad\text{при}\quad|\mathcal{P}|\to0,$$

где $P_{k,j}(x_0,\ldots,x_{n-1})$, $Q_{k,j,l}(x_0,\ldots,x_{n-1})$ – некоторые многочлены, коэффициенты которых не зависят от f, g, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{X}$.

Пусть $h(Y)=Dg(Y)f(Y)$, обозначим $H_t=h(Y_t)$. Пусть $H^{(j)}$, $j\in\{1,\ldots,n-1\}$, – грубые производные от H, определённые по формулам (7). Если $X_t=t$, $Y\in C^n([0,T],\mathbb{R})$, то

$$g(Y_t)-g(Y_s)=\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{X}_{t_i,t_{i+1}}^kH_{t_i}^{(k-1)}+o(1)=$$

$$= \sum_{i=0}^{N-1}\left(\mathbf{X}^1_{t_i,t_{i+1}}h(Y_{t_i}) + \sum_{k=2}^{n}\mathbf{X}^k_{t_i,t_{i+1}}\sum_{j=1}^{k-1}D^j h(Y_{t_i})B_{k-1,j}(Y^{(1)}_{t_i},\ldots,Y^{(k-j)}_{t_i})\right) + o(1) =$$

$$= \sum_{i=0}^{N-1}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{X}^k_{t_i,t_{i+1}}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=0}^{n-1}D^j g(Y_{t_i})D^l f(Y_{t_i})\widetilde{Q}_{k,j,l}(Y_{t_i},Y^{(1)}_{t_i},\ldots,Y^{(n-1)}_{t_i}) + o(1) \quad \text{при} \quad |\mathcal{P}| \to 0, \tag{28}$$

где $\widetilde{Q}(x_0,\ldots,x_{n-1})$ – некоторые многочлены, коэффициенты которых не зависят от f, g, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{X}$. В силу единственности производных от $Y \in C^n([0,T],\mathbb{R})$ заключаем, что $Q_{k,j,l} = \widetilde{Q}_{k,j,l}$ для любых k, j, l. Так как многочлены $Q_{k,j,l}$ не зависят от $\mathbf{Y}$, $\mathbf{X}$, то соотношения (28) сохраняются для произвольных $\mathbf{Y} \in \mathcal{D}^\alpha_{\mathbf{X}}([0,T],\mathbb{R})$, $\mathbf{X} \in \mathscr{C}^\beta_g([0,T],\mathbb{R})$.

Переходя к пределу при $|\mathcal{P}| \to 0$ в соотношении

$$g(Y_t) - g(Y_s) = \sum_{i=0}^{N-1}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{X}^k_{t_i,t_{i+1}}H^{(k-1)}_{t_i} + o(1),$$

получаем требуемое равенство (23). Теорема доказана.

Наряду с уравнением (18) рассмотрим отвечающее ему ОДУ

$$dZ_t = f(Z_t)\,dt, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{29}$$

Пусть S_t, $t \in \mathbb{R}$, – поток, соответствующий уравнению (29), т.е. $Z_t = S_t Z_0$.

Теорема 3. *Пусть* $\alpha, \beta \in (1/(n+1), 1/n]$, $\alpha < \beta$, $\mathbf{X} = (1, \mathbf{X}^1, \ldots, \mathbf{X}^n) \in \mathscr{C}^\beta_g([0,T],\mathbb{R})$. *Если* $f \in C^{n+1}_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$, *то для любого* $x \in \mathbb{R}$ *единственное решение* $\mathbf{Y} = (Y, Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n-1)})$ *уравнения (18) с начальным условием (20) может быть найдено по формулам*

$$Y_t = S_{X_t - X_0}x, \quad Y^{(i)}_t = D^{i-1}_f f(Y_t), \quad i \in \{1,\ldots,n-1\}, \quad t \in [0,T], \tag{30}$$

где $(D_f h)(z) = f(z)Dh(z)$.

Доказательство. Рассмотрим уравнение

$$dU_t = d\mathbf{X}_t, \quad t \in [0,T], \tag{31}$$

с начальным условием $U_0 = X_0$, $U^{(1)}_0 = 1$, $U^{(2)}_0 = \ldots = U^{(n-1)}_0 = 0$. Очевидно, что единственным решением уравнения (31) является элемент $\mathbf{U}_t = (X_t, 1, 0, \ldots, 0)$.

Применяя теорему 2 к $g(U_t)$, где $g(y) = S_y(S_{X_0})^{-1}x$, $U_t = X_t$, получаем

$$g(U_t) - g(U_s) = \int_s^t f(g(U_\tau))\,d\mathbf{X}_\tau.$$

Таким образом, элемент $\mathbf{Y} = (Y, Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n-1)})$ является единственным решением уравнения (18) с начальным условием (20), где $Y_t = g(X_t)$, $Y^{(1)}_t = f(Y_t)$, $Y^{(2)}_t = Df(Y_t)f(Y_t)$, $Y^{(3)}_t = D^2 f(Y_t)(f(Y_t))^2 + (Df(Y_t))^2 f(Y_t)$ и так далее. Теорема доказана.

Замечание 1. Утверждение теоремы 3 выполняется для произвольной функции $f \in C^{n+1}(\mathbb{R},\mathbb{R})$: решение $\mathbf{Y}$ уравнения (18) с начальным условием (20) существует, единственно и находится по формулам (30) на некотором достаточно малом отрезке $[0,a] \subset [0,T]$, $a > 0$.

Стохастические дифференциальные уравнения, управляемые грубыми траекториями с произвольным показателем Гёльдера. Пусть на полном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с потоком σ-алгебр $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ задан $\mathcal{F}_t$-согласованный случайный процесс X_t, $t \in [0,T]$, такой, что почти все траектории процесса X_t принадлежат пространству

$C^\beta([0,T],\mathbb{R})$, $\beta \in (1/(n+1), 1/n]$. Определим процесс $\mathbf{X}_\cdot = (1, \mathbf{X}^1_{0,\cdot}, \ldots, \mathbf{X}^n_{0,\cdot})$ как случайную величину, принимающую значения в $\mathscr{C}^\beta_g([0,T],\mathbb{R})$ п.н., где $\mathbf{X}^i_{s,t} = (X_{s,t})^i/(i!)$. Выберем и зафиксируем произвольное $\alpha \in (0,\beta)$.

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$dY_t = f(Y_t)\, d\mathbf{X}_t, \quad t \in [0,T]. \tag{32}$$

Определение 3. Пусть $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ – $\mathcal{F}_0$-измеримая случайная величина. *Решением* уравнения (32) с начальным условием $Y_0 = \xi$ будем называть $\mathcal{F}$-измеримую случайную величину $\mathbf{Y} = (Y, Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n-1)})$ со значениями в $\mathcal{D}^\alpha_{\mathbf{X}}([0,T],\mathbb{R})$ п.н. такую, что для почти всех $\omega \in \Omega$ элемент $\mathbf{Y}(\omega)$ является решением детерминированного уравнения $dY_t(\omega) = f(Y_t(\omega))\, d\mathbf{X}_t(\omega)$ в смысле определения 1. Решение уравнения (32) с начальным условием $Y_0 = \xi$ назовём *единственным,* если для любых двух решений $\mathbf{Y}$, $\bar{\mathbf{Y}}$ уравнения (32) с начальным условием $Y_0 = \xi$ выполняется равенство $P(\mathbf{Y} = \bar{\mathbf{Y}}) = 1$.

Теорема 4. *Пусть $\alpha, \beta \in (1/(n+1), 1/n]$, $\alpha < \beta$, $\mathbf{X} = (1, \mathbf{X}^1, \ldots, \mathbf{X}^n) \in \mathscr{C}^\beta_g([0,T],\mathbb{R})$ п.н. Если $f \in C^{n+1}_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$, то для любой $\mathcal{F}_0$-измеримой случайной величины $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ существует единственное решение $\mathbf{Y} = (Y, Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n-1)})$ уравнения (32) с начальным условием $Y_0 = \xi$, и п.н. выполняются равенства*

$$Y_t = S_{X_{0,t}}\xi, \quad Y^{(i)}_t = D^{i-1}_f f(Y_t), \quad i \in \{1,\ldots,n-1\}, \quad t \in [0,T], \tag{33}$$

где S_t, $t \in \mathbb{R}$, – поток, соответствующий уравнению (29).

Доказательство. Пусть $\Omega_0 = \{\omega \in \Omega : \mathbf{X}(\omega) \in \mathscr{C}^\beta_g([0,T],\mathbb{R})\}$. Возьмём произвольное $\omega \in \Omega_0$. Из теоремы 1 вытекает, что существует единственный элемент $\mathbf{Y}(\omega) \in \mathcal{D}^\alpha_{\mathbf{X}}([0,T],\mathbb{R})$, который является решением детерминированного уравнения $dY_t = f(Y_t)\, d\mathbf{X}_t(\omega)$, $t \in [0,T]$, с начальным условием $Y_0 = \xi(\omega)$. Согласно теореме 3 выполняются равенства

$$Y_t(\omega) = S_{X_{0,t}(\omega)}\xi(\omega), \quad Y^{(i)}_t(\omega) = D^{i-1}_f f(Y_t(\omega)), \quad i \in \{1,\ldots,n-1\}, \quad t \in [0,T]. \tag{34}$$

Для каждого $\omega \in \Omega\setminus\Omega_0$ положим $\mathbf{Y}(\omega) = 0$. Из соотношений (34) вытекает, что $\mathbf{Y}_t$ является $\mathcal{F}_t$-согласованным случайным процессом. Так как $P(\Omega_0) = 1$, то процесс $\mathbf{Y}$ является решением уравнения (32) с начальным условием $Y_0 = \xi$. В силу теоремы 1 построенное решение является единственным. Справедливость соотношений (33) вытекает из равенств (34). Теорема доказана.

Замечание 2. В частности, теорема 3 остаётся в силе, если выбрать $X_t = B^H_t$, где B^H_t – дробное броуновское движение с показателем Хёрста $H \in (\beta, 1)$.

Замечание 3. Дифференциальное уравнение, аналогичное уравнению (18), рассматривалось в работах [23–25], в которых под его решением понимался предел последовательности решений уравнений со сглаженным возмущением X_t.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lyons T.* Differential equations driven by rough signals // Rev. Mat. Iberoamericana. 1998. V. 14. № 2. P. 215–310.
2. *Gubinelli M.* Controlling rough paths // J. of Funct. Anal. 2004. V. 216. № 1. P. 86–140.
3. *Harang F.A.* On the theory of rough paths, fractional and multifractional Brownian motion with applications to finance: dissertation ... master of mathematics. Oslo, 2015.
4. *Friz P., Hairer M.* A Course on Rough Paths with an Introduction to Regularity Structures. Cham, 2014.
5. *Coutin L., Qian Z.* Stochastic analysis, rough path analysis and fractional Brownian motions // Probab. Theory Related Fields. 2002. V. 122. № 1. P. 108–140.
6. *Baudoin F., Coutin L.* Operators associated with a stochastic differential equation driven by fractional Brownian motions // Stoch. Proc. and their Appl. 2007. V. 117. P. 550–574.
7. *Neuenkirch A., Nourdin I., Robler A., Tindel S.* Trees and asymptotic expansions for fractional stochastic differential equations // Ann. de Inst. Henri Poincare (B) Probab. and Stat. 2009. V. 45. № 1. P. 157–174.

8. *Васьковский М.М., Качан И.В.* Асимптотические разложения решений стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями // Докл. НАН Беларуси. 2018. Т. 62. № 4. С. 398–405.
9. *Vaskouski M., Kachan I.* Asymptotic expansions of solutions of stochastic differential equations driven by multivariate fractional Brownian motions having Hurst indices greater than 1/3 // Stoch. Anal. and Appl. 2018. V. 36. № 6. P. 909–931.
10. *Васьковский М.М.* Стохастические дифференциальные уравнения смешанного типа со стандартными и дробными броуновскими движениями с индексами Хёрста, большими 1/3 // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2020. Т. 56. № 1. С. 36–50.
11. *Леваков А.А., Васьковский М.М.* Стохастические дифференциальные уравнения и включения. Минск, 2019.
12. *Guerra J., Nualart D.* Stochastic differential equations driven by fractional Brownian motion and standard Brownian motion // Stoch. Anal. and Appl. 2008. V. 26. № 5. P. 1053–1075.
13. *Mishura Y.S., Shevchenko G.M.* Existence and uniqueness of the solution of stochastic differential equation involving Wiener process and fractional Brownian motion with Hurst index $H > 1/2$ // Comm. in Stat. Theory and Methods. 2011. V. 40. № 19-20. P. 3492–3508.
14. *Леваков А.А., Васьковский М.М.* Существование слабых решений стохастических дифференциальных уравнений со стандартным и дробным броуновскими движениями и с разрывными коэффициентами // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 2. С. 187–200.
15. *Леваков А.А., Васьковский М.М.* Существование слабых решений стохастических дифференциальных уравнений со стандартным и дробным броуновскими движениями, с разрывными коэффициентами и с частично вырожденным оператором диффузии // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 8. С. 1060–1076.
16. *Васьковский М.М.* Существование слабых решений стохастических дифференциальных уравнений с запаздыванием и стандартным и дробным броуновскими движениями // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2015. № 1. С. 22–34.
17. *Леваков А.А., Васьковский М.М.* Существование решений стохастических дифференциальных включений со стандартным и дробным броуновскими движениями // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 8. С. 997–1003.
18. *Леваков А.А., Васьковский М.М.* Свойства решений стохастических дифференциальных уравнений со стандартным и дробным броуновскими движениями // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 8. С. 1011–1019.
19. *Васьковский М.М.* Устойчивость и притяжение решений нелинейных стохастических дифференциальных уравнений со стандартным и дробным броуновскими движениями // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 2. С. 160–173.
20. *Васьковский М.М., Качан И.В.* Методы интегрирования стохастических дифференциальных уравнений смешанного типа, управляемых дробными броуновскими движениями // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2019. Т. 55. № 2. С. 135–151.
21. *Comtet L.* Advanced Combinatorics. The Art of Finite and Infinite Expansions. Dordrecht, 1974.
22. *Mishkov R.L.* Generalization of the formula of Faa Di Bruno for a composite function with a vector argument // Int. J. Math. & Math. Sci. 2000. V. 24. № 7. P. 481–491.
23. *Завалищин С.Т., Сесекин А.Н.* Импульсные процессы: модели и приложения. М., 1991.
24. *Kurzweil J.* Generalized ordinary differential equation // Czech. Math. J. 1958. V. 8. № 1. P. 360–388.
25. *Yablonski A.* Differential equations with generalized coefficients // Nonlin. Anal. 2005. V. 63. P. 171–197.

Белорусский государственный университет,
г. Минск

Поступила в редакцию 09.04.2021 г.
После доработки 09.04.2021 г.
Принята к публикации 08.09.2021 г.