ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 10, с. 1318–1324

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.927.2+517.984.46

УТОЧНЕНИЕ ОЦЕНОК СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ДЛЯ СТРУНЫ С СИНГУЛЯРНЫМ ВЕСОМ

© 2021 г. А. С. Иванов

Рассматривается линейный дифференциальный пучок $A(\lambda)\equiv L-\lambda V,$ где $L\equiv -y''+q(x)y$ – оператор Штурма–Лиувилля с сингулярным потенциалом $q(x),$ V – оператор умножения на сингулярный вес $\rho(x),$ $x\in(0,\pi),$ а $\lambda\in\mathbb{C}$ – спектральный параметр. Предполагается, что потенциал q и вес ρ принадлежат пространству Соболева $W_2^{-1}[0,\pi]$ с отрицательным индексом гладкости, причём q – вещественно-, а ρ – комплекснозначные функции. Доказано, что для собственных значений $\lambda_n,$ $n\in\mathbb{N},$ пучка $A(\lambda)$ при всех $n\in\mathbb{N}$ выполняется оценка $|\lambda_n|\geqslant Cn,$ где C – постоянная, не зависящая от номера $n.$

DOI: 10.31857/S0374064121100034

Введение. В статье изучается дифференциальное уравнение

$$-y''(x)+q(x)y(x)=\lambda\rho(x)y(x),\quad x\in(0,\pi),\tag{1}$$

и ассоциированный с ним линейный операторный пучок $A(\lambda):=L-\lambda V,$ где L – оператор Штурма–Лиувилля, порождённый дифференциальным выражением $l(y):=-y''+q(x)y$ и краевыми условиями типа Штурма, V – оператор умножения на функцию $\rho,$ а λ – спектральный параметр. Здесь функции q и ρ являются распределениями первого порядка сингулярности (т.е. обобщёнными производными функций из класса $L_2[0,\pi]$). Уравнение (1) представляет собой математическую модель для описания малых поперечных колебаний нагруженной струны. Функция $y(x)$ показывает отклонение струны от положения равновесия, $q(x)$ – функция, задающая плотность внешних сил, действующих на струну в точке $x,$ а $\rho(x)$ – функция плотности струны.

Изучение задачи о колебаниях нагруженной струны имеет большую историю. В частности, связанные с этой задачей вопросы изучались в работах [1–7]. Данная статья является продолжением работы [8], по которой можно более подробно ознакомиться с историей вопроса и актуальностью темы. Один из результатов статьи [8] состоял в доказательстве для операторного пучка $A(\lambda)$ оценок его собственных значений $\lambda_n,$ $n\in\mathbb{N},$ вида $|\lambda_n|\geqslant Cn/\ln n.$ Целью настоящей работы является уточнение этих оценок. Именно, в теореме 2 доказано, что $|\lambda_n|\geqslant Cn,$ здесь и выше C – постоянная, не зависящая от $n.$

1. Предварительные сведения. Прежде чем переходить к изложению результатов работы, дадим точное определение операторного пучка $A(\lambda):=L-\lambda V.$ Подробное описание этого пучка и его свойств приведено в работе [8]. Для замкнутости изложения в данном пункте повторим, следуя [9], определения нужных в дальнейшем функциональных пространств и действующих в них операторов, а также отметим необходимые их свойства (подробности можно найти в работе [9]).

1.1. Определения пространств. Через $\mathcal{H}$ будем обозначать пространство $L_2[0,\pi],$ через $(\,\cdot\,,\cdot\,)$ – скалярное произведение в $\mathcal{H},$ а через $\|\cdot\|$ – L_2-норму.

Далее, $W_2^1[0,\pi]$ – классическое пространство Соболева, $W_2^1[0,\pi]=\{f\in AC[0,\pi]:f'\in\mathcal{H}\},$ с нормой $\|f\|_1:=(\|f\|^2+\|f'\|^2)^{1/2}$ и соответствующим скалярным произведением $(\,\cdot\,,\cdot\,)_1.$ Введём подпространства пространства $W_2^1[0,\pi],$ отвечающие трём различным типам краевых условий: Дирихле, Дирихле–Неймана и Неймана–Дирихле, именно, положим

$$W_{2,D}^1[0,\pi]=\{f\in AC[0,\pi]:f'\in H,\quad f(0)=f(\pi)=0\},$$

$$W_{2,DN}^1[0,\pi]=\{f\in AC[0,\pi]:f'\in H,\quad f(0)=0\},$$

$$W_{2,ND}^1[0,\pi]=\{f\in AC[0,\pi]:f'\in H,\quad f(\pi)=0\}.$$

Для четвёртого типа условий – условий Неймана – через $W_{2,N}^1[0,\pi]$ обозначим всё пространство $W_2^1[0,\pi]$.

Поясним, что мы понимаем под соответствием описанных выше пространств и краевых условий. Зададим оператор T, действующий в пространстве $\mathcal{H}$, любым из следующих способов. Положим

$$Ty = -y'', \quad \mathfrak{D}(T) = \{y \in W_2^2[0,\pi] : y(0) = y(\pi) = 0\}, \tag{2}$$

$$Ty = -y'', \quad \mathfrak{D}(T) = \{y \in W_2^2[0,\pi] : y(0) = y'(\pi) = 0\}, \tag{3}$$

$$Ty = -y'', \quad \mathfrak{D}(T) = \{y \in W_2^2[0,\pi] : y'(0) = y(\pi) = 0\}, \tag{4}$$

$$Ty = -y'' + y, \quad \mathfrak{D}(T) = \{y \in W_2^2[0,\pi] : y'(0) = y'(\pi) = 0\}. \tag{5}$$

В каждом из этих случаев оператор T самосопряжён и равномерно положителен, а значит, корректно определён его квадратный корень $T^{1/2}$.

Гильбертово пространство с нормой графика $(\|T^{1/2}x\|^2 + \|x\|^2)^{1/2}$ обозначим через $\mathcal{H}_1$. Несложно видеть, что пространства $\mathcal{H}_1$ в случаях (2)–(5) совпадают с пространствами $W_{2,D}^1[0,\pi]$, $W_{2,DN}^1[0,\pi]$, $W_{2,ND}^1[0,\pi]$ и $W_{2,N}^1[0,\pi]$ соответственно.

Введём пространство $W_2^{-1}[0,\pi]$ как пространство распределений, дуальное к пространству Соболева $W_2^1[0,\pi]$ относительно действия $(\,\cdot\,,\cdot\,)$. Любой линейный непрерывный функционал F на пространстве $W_2^1[0,\pi]$ допускает представление

$$F(\varphi) = \langle f, \varphi\rangle = f_0\varphi(0) + f_\pi\varphi(\pi) - \int_0^\pi \varphi'(x)w(x)\,dx, \quad f \in W_2^{-1}[0,\pi], \quad \varphi \in W_2^1[0,\pi], \quad w \in \mathcal{H}.$$

Такое представление неоднозначно, поскольку тройки (w, f_0, f_π) и $(w + c, f_0 - c, f_\pi + c)$ порождают одинаковые функционалы. Функцию w, определённую таким образом с точностью до константы, будем называть *обобщённой первообразной* функции $f \in W_2^{-1}$.

Будем также рассматривать пространства распределений над подпространствами $\mathcal{H}_1$ пространства $W_2^1[0,\pi]$. Их мы введём аналогично – как дуальные к $\mathcal{H}_1$ относительно действия $(\,\cdot\,,\cdot\,)$ и будем обозначать через $\mathcal{H}_{-1}$.

1.2. Определения операторов. Перейдём к определению операторов. Опишем сначала оператор L. Пусть $u \in \mathcal{H}$ – обобщённая первообразная потенциала q. Всюду далее считаем потенциал q вещественным. Отметим, что оператор L может быть корректно определён и для комплексного потенциала, однако это требует иной техники. Строго говоря (см. [10]),

$$Ly = l(y) = -(y^{[1]}(x))' - u(x)y^{[1]}(x) - u^2(x)y(x), \quad y^{[1]}(x) := y'(x) - u(x)y(x),$$

$$\mathfrak{D}(L) = \{y, y^{[1]} \in AC[0,\pi] : l(y) \in \mathcal{H}, \;\; y^{[1]}(0) + h_0 y(0) = y^{[1]}(\pi) + h_\pi y(\pi) = 0\}. \tag{6}$$

Условимся, что равенство $h_0 = \infty$ (или $h_\pi = \infty$) означает, что первое (или второе) краевое условие принимает вид $y(0) = 0$ (соответственно, $y(\pi) = 0$).

В работе [10] получено представление для квадратичной формы (Ly, y) и доказана её замкнутость. Тогда, согласно второй теореме о представлении (см., например, [11, гл. VI, теорема 2.23]), форма $(Ly, y)+c$ для любого достаточно большого $c > 0$ порождает в $\mathcal{H}$ самосопряжённый оператор (совпадающий, естественно, с оператором $L + c$), причём $\mathfrak{D}((L + c)^{1/2}) = \mathfrak{D}((Ly, y)) = \mathcal{H}_1$, а $(L + c)^{1/2}$ является изоморфизмом между пространствами $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}$. Переходя к дуальным пространствам, получаем, что оператор $(L + c)^{1/2}$ является также изоморфизмом между пространствами $\mathcal{H}$ и $\mathcal{H}_{-1}$, а $L + c$ – изоморфизмом между пространствами $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_{-1}$.

Обратимся к оператору V. Определим его действие следующим правилом:

$$\langle Vy, \varphi\rangle = \langle \rho, y\varphi\rangle = \rho_0 y(0)\varphi(0) + \rho_\pi y(\pi)\varphi(\pi) - \int_0^\pi v(x)(y(x)\varphi(x))'\,dx. \tag{7}$$

Таким образом, оператор $V : W_2^1 \to W_2^{-1}$ корректно определён. Пользуясь неравенством $\|\cdot\|_C \leqslant C_{\mathrm{abs}}\|\cdot\|_1$, проведём оценку

$$|\langle Vy,\varphi\rangle| \leqslant (|\rho_0|+|\rho_\pi|)\|y\|_C\|\varphi\|_C + \|v\|_{L_2}(\|y\|_C\|\varphi'\|_{L_2} + \|y'\|_{L_2}\|\varphi\|_C) \leqslant$$
$$\leqslant C_{\mathrm{abs}}(|\rho_0|+|\rho_\pi|+\|v\|_{L_2})\|y\|_1\|\varphi\|_1 \leqslant C_{\mathrm{abs}}\|\rho\|_{-1}\|y\|_1\|\varphi\|_1,$$

из которой следует ограниченность оператора $V : W_2^1 \to W_2^{-1}$.

Ограничив оператор $Vy = \rho y$ на подпространство $\mathcal{H}_1 \subseteq W_2^1$ (это эквивалентно проектированию векторов Vy на $\mathcal{H}_{-1}$), получим ограниченный оператор из W_2^1 в $\mathcal{H}_{-1}$. Этот оператор в свою очередь можно ограничить на подпространство $\mathcal{H}_1 \ni y$ и получить ограниченный оператор из $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_{-1}$.

Итак, для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ нами определён ограниченный оператор $A(\lambda) = L - \lambda V$, действующий из $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_{-1}$. Отметим, что для каждого фиксированного λ квадратичная форма оператора $A(\lambda)$, заданная на пространстве H_1, имеет вид

$$\langle Ay,\overline{y}\rangle = \|y\|^2 - (h_0+\lambda\rho_0)|y(0)|^2 + (h_\pi - \lambda\rho_\pi)|y(\pi)|^2 + \int\limits_0^\pi (\lambda v(x) - u(x))(y(x)\overline{y}(x))'\,dx$$

(с описанными выше корректировками в случае $h_0 = \infty$ или $h_\pi = \infty$). Согласно [10] эта форма определяет замкнутый оператор

$$Ay = -(y' + (\lambda v - u)y)' + (\lambda v - u)y'$$

в пространстве $\mathcal{H}$ с областью определения

$$\mathfrak{D}(A) = \{y, y' + (\lambda v - u)y \in AC : Ay \in \mathcal{H},$$
$$(y' + (\lambda v - u)y + (h_0 + \lambda\rho_0)y)(0) = (y' + (\lambda v - u)y + (h_\pi - \lambda\rho_\pi)y)(\pi) = 0\}. \qquad (8)$$

Таким образом, пучок $A(\lambda) = L - \lambda V$ можно рассматривать и как семейство замкнутых плотно определённых неограниченных операторов в $\mathcal{H}$. При этом, однако, область определения $\mathfrak{D}(A)$ может изменяться в зависимости от значения параметра λ.

1.3. Спектральные свойства операторов. Спектр оператора L, действующего в пространстве $\mathcal{H}$, описан в работе [10]. Он дискретен и имеет единственную точку накопления $+\infty$. Далее будем предполагать, что $0 \notin \sigma(L)$. Все собственные значения μ_n вещественны, их геометрическая и алгебраическая кратности совпадают друг с другом и равны единице.

Обозначим через $\{\varphi_n\}_1^\infty$ систему соответствующих собственных функций оператора L, нормированных условием $\|\varphi_n\| = 1$. Из [10, теорема 2.9] вытекает, что система $\{\varphi_n\}_1^\infty$ является ортонормированным базисом в пространстве $\mathcal{H}$.

Спектральные свойства оператора V следуют из его компактности. Они приведены и доказаны в работе [9].

2. Вспомогательные утверждения. Нам понадобится хорошо известная лемма Гронуолла, формулируемая в классическом случае для класса непрерывных функций. В работе [1] эта лемма обобщена на существенно более широкий класс функций, чем непрерывные.

Лемма Гронуолла. *Пусть (a,b) – интервал вещественной прямой, а ω – положительная борелевская мера на (a,b). Если $c \in (a,b)$ и вещественнозначная функция $v \in L_{1,\mathrm{loc}}((a,b);\omega)$ удовлетворяет неравенству*

$$0 \leqslant v(x) \leqslant K + \int\limits_c^x v(\xi)\,d\omega(\xi), \quad x \in [c,b),$$

с некоторой вещественной постоянной K, то для функции v справедлива оценка

$$v(x) \leqslant Ke^{\int_c^x dw(\xi)}.$$

Далее эта лемма применяется для функций, суммируемых по Лебегу на конечном отрезке.

Напомним некоторые факты из теории целых функций. Подробно они изложены, например, в монографии [12]. Пусть $f(z)$ – целая функция. Обозначим $M_f(r) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$. Если существует такое положительное число k, что

$$M_f(r) < e^{r^k},$$

то такую функцию называют функцией *конечного порядка*, а точную нижнюю грань таких k – *порядком* целой функции $f(z)$. *Типом* целой функции $f(z)$ порядка ρ называется точная нижняя грань чисел A, для которых выполнено неравенство

$$M_f(r) < e^{Ar^\rho}.$$

Нам понадобится следующее утверждение (см. [13, гл. I, теорема 2.3]), дающее оценку роста нулей целой функции в терминах её порядка и типа.

Теорема 1. *Пусть $f(z)$ – целая функция порядка ρ, $0 < \rho < \infty$, и конечного типа σ, имеющая бесконечно много нулей λ_1, λ_2, ..., λ_n, ..., причём $\lambda_k \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда*

$$\varlimsup_{n\to\infty} (n|\lambda_n|^{-\rho}) \leqslant \sigma e \rho.$$

Целые функции, имеющие порядок $\rho = 1$ и конечный тип, принято называть *целыми функциями экспоненциального типа*. Для данного класса функций неравенство теоремы 1 принимает вид

$$\varlimsup_{n\to\infty} (n|\lambda_n|^{-1}) \leqslant \sigma e,$$

откуда следует оценка $|\lambda_n| \geqslant Cn$ роста нулей целой функции экспоненциального типа, в которой C – константа, не зависящая от номера n.

3. Оценки собственных значений. Теперь мы готовы сформулировать и доказать основную теорему настоящей работы.

Теорема 2. *Пусть функции $q(x)$ и $\rho(x)$ принадлежат пространству H_{-1}, а операторы L и V определены соотношениями (6) и (7) соответственно. Тогда собственные значения операторного пучка $A(\lambda)$ удовлетворяют при всех $n \in \mathbb{N}$ оценке $|\lambda_n| \geqslant Cn$, где C – постоянная, не зависящая от номера n.*

Доказательство. В исходном дифференциальном уравнении $-y'' + q(x)y = \lambda\rho(x)y$ произведём замену переменных

$$y_1 = \lambda y, \quad y_2 = y' + \lambda v y - u y. \tag{9}$$

Вычислим производные введённых функций:

$$y_1' = \lambda y' = \lambda y_2 - \lambda^2 v y + \lambda u y = \lambda y_2 - \lambda v y_1 + u y_1 = \lambda(y_2 - v y_1) + u y_1,$$

$$y_2' = y'' + \lambda \rho y + \lambda v y' - q y - u y'.$$

В силу исходного уравнения имеем

$$y_2' = (\lambda v - u) y' = (\lambda v - u)(y_2 - \lambda v y + u y) = \lambda v y_2 - \lambda^2 v^2 y + \lambda v u y - u y_2 + \lambda v u y - u^2 y =$$

$$= \lambda v y_2 - \lambda v^2 y_1 + 2 v u y_1 - u y_2 - \lambda^{-1} u^2 y_1 = \lambda(v y_2 - v^2 y_1) + (2 v u y_1 - u y_2) - \lambda^{-1} u^2 y_1.$$

Отметим, что вследствие (8) выполняется включение $y_1, y_2 \in AC[0,\pi]$.

В результате получаем систему дифференциальных уравнений

$$Y' = \lambda T(x) Y + Q(x) Y + \lambda^{-1} S(x) Y, \tag{10}$$

где

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} -v & 1 \\ -v^2 & v \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 2vu & -u \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -u^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что поскольку обобщённые первообразные u, v принадлежат пространству $\mathcal{H}$, каждая из матриц T, Q, S является суммируемой на отрезке $[0,\pi]$.

Далее для системы (10) будем рассматривать задачу Коши с некоторым начальным условием

$$Y(0) = Y_0. \tag{11}$$

Задача (10), (11), вообще говоря, не эквивалентна в силу произвольности выбора вектора Y_0 исходной дифференциальной задаче, но эквивалентна интегральному уравнению

$$Y(x) = Y_0 + \int\limits_0^x (\lambda T(\xi) + Q(\xi) + \lambda^{-1} S(\xi)) Y(\xi)\, d\xi. \tag{12}$$

Через $R(\xi)$ обозначим 2×2-матричнозначную функцию $\lambda T(\xi) + Q(\xi) + \lambda^{-1}S(\xi)$; пусть $R(\xi) = (r_{ij}(\xi))_{i,j=1}^2$. Пусть также $Y_0 = \mathrm{col}\,(y_{0_1}, y_{0_2})$.

Нам необходимо оценить левую часть уравнения (12). Рассмотрим отдельно первую компоненту функционального вектора $Y(x)$, т.е. функцию, определяемую равенством

$$y_1(x) = y_{0_1} + \int\limits_0^x (r_{1,1}(\xi) y_1(\xi) + r_{1,2}(\xi) y_2(\xi))\, d\xi. \tag{13}$$

Возьмём модуль от обеих частей равенства (13) и воспользуемся свойствами интеграла и неравенством треугольника:

$$|y_1(x)| \leqslant |y_{0_1}| + \Big|\int\limits_0^x (r_{11}(\xi) y_1(\xi) + r_{12}(\xi) y_2(\xi))\, d\xi\Big| \leqslant |y_{0_1}| + \int\limits_0^x (|r_{11}(\xi)||y_1(\xi)| + |r_{12}(\xi)||y_2(\xi)|)\, d\xi.$$

Аналогично для второй компоненты $Y(x)$ получаем

$$|y_2(x)| \leqslant |y_{0_2}| + \int\limits_0^x (|r_{21}(\xi)||y_1(\xi)| + |r_{22}(\xi)||y_2(\xi)|)\, d\xi.$$

Сложив два последних неравенства, будем иметь

$$|y_1(x)| + |y_2(x)| \leqslant |y_{0_1}| + |y_{0_2}| + \int\limits_0^x (|y_1(\xi)|(|r_{11}(\xi)| + |r_{21}(\xi)|) + |y_2(\xi)|(|r_{12}(\xi)| + |r_{22}(\xi)|))\, d\xi.$$

Ослабим это неравенство, заменяя в нём каждую из сумм $|r_{i1}(\xi)| + |r_{i2}(\xi)|$, $i = 1, 2$, не меньшей величиной $\tilde{R}(\xi) := \sum_{i,j=1}^2 |r_{ij}(\xi)|$ – l_1-нормой матрицы $R(\xi)$; придём к неравенству

$$|y_1(x)| + |y_2(x)| \leqslant |y_{0_1}| + |y_{0_2}| + \int\limits_0^x (|y_1(\xi)| + |y_2(\xi)|) \Big(\sum_{i,j=1}^2 |r_{ij}(\xi)|\Big)\, d\xi. \tag{14}$$

Обозначим $\tilde{Y}(x) := |y_1(x)| + |y_2(x)|$, $\tilde{Y}_0 := |y_{0_1}| + |y_{0_2}|$, тогда с учётом введённого выше обозначения $\tilde{R}(\xi)$ неравенство (14) примет вид

$$\tilde{Y}(x) \leqslant \tilde{Y}_0 + \int\limits_0^x \tilde{Y}(\xi)\tilde{R}(\xi)\, d\xi.$$

Так как каждая из матричнозначных функций $T,$ Q и S является суммируемой на $[0,\pi],$ матричнозначная функция $\tilde{R}$ также суммируема на $[0,\pi].$ Поэтому последнее неравенство можно записать в виде

$$\tilde{Y}(x) \leqslant \tilde{Y}_0 + \int\limits_0^x \tilde{Y}(\xi)\, d\omega(\xi).$$

Компоненты векторнозначной функции Y принадлежат пространству $AC[0,\pi]$ и неотрицательны. Таким образом, функция $\tilde{Y}$ удовлетворяет условиям леммы Гронуолла. Следовательно,

$$\tilde{Y}(x) \leqslant \tilde{Y}_0 e^{\int_0^x \tilde{R}(\xi)\, d\xi}. \tag{15}$$

Воспользуемся определением матрицы R и оценим в (15) каждое из слагаемых в показателе экспоненты, используя суммируемость функциональных матриц $T,$ Q и $S;$ имеем

$$\tilde{Y}(x) \leqslant \tilde{Y}_0 \exp\left\{|\lambda| \int\limits_0^x \sum_{i,j=1}^2 |t_{i,j}(\xi)|\, d\xi + \int\limits_0^x \sum_{i,j=1}^2 |q_{i,j}(\xi)|\, d\xi + \frac{1}{|\lambda|}\int\limits_0^x \sum_{i,j=1}^2 |s_{i,j}(\xi)|\, d\xi\right\} \leqslant e^{C_1|\lambda|+C_2},$$

где $C_1,$ C_2 – функции переменной $x,$ не зависящие от $|\lambda|.$ Так как $\tilde{Y}(x) = |y_1(x)| + |y_2(x)| \leqslant$ $\leqslant e^{C_1|\lambda|+C_2},$ то и каждая компонента вектора $Y(x)$ удовлетворяет неравенству

$$|y_i(x)| \leqslant e^{C_1|\lambda|+C_2}, \quad i=1,2. \tag{16}$$

Поставим теперь для системы (10) краевую задачу. Граничные условия при этом выберем таким образом, чтобы при подстановке в эту систему y_1 и y_2 в соответствии с заменой (9) получить в точности равенства, описывающие область определения оператора A согласно (8):

$$\lambda^{-1}(h_0 + \lambda\rho_0)y_1(0) + y_2(0) = 0, \quad \lambda^{-1}(h_\pi + \lambda\rho_\pi)y_1(\pi) + y_2(\pi) = 0. \tag{17}$$

Для краевой задачи (10), (17) составим характеристический определитель $\Delta(\lambda).$ Пусть

$$\Phi = \begin{pmatrix}\phi_1(x)\\ \phi_2(x)\end{pmatrix}, \quad \Psi = \begin{pmatrix}\psi_1(x)\\ \psi_2(x)\end{pmatrix}$$

– фундаментальная система решений линейной системы (10). Тогда

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix}\lambda(h_0+\lambda\rho_0)\phi_1(0)+\phi_2(0) & \lambda(h_0+\lambda\rho_0)\psi_1(0)+\psi_2(0)\\ \lambda(h_\pi+\lambda\rho_\pi)\phi_1(\pi)+\phi_2(\pi) & \lambda(h_\pi+\lambda\rho_\pi)\psi_1(\pi)+\psi_2(\pi)\end{vmatrix}. \tag{18}$$

Раскрывая определитель в (18), видим, что каждое слагаемое состоит из произведения $|\phi_i(x)|,$ $|\psi_j(x)|,$ $i,j=1,2,$ в точках $x=0$ или $x=\pi,$ и сомножителей, содержащих $|\lambda|$ в степени не выше 2, поэтому вследствие оценки (16) порядок по $|\lambda|$ каждого слагаемого характеристического определителя $\Delta(\lambda)$ равняется в точности 1. Тогда и сам характеристический определитель $\Delta(\lambda)$ – целая функция комплексного переменного λ порядка $\rho=1$ и конечного типа.

Согласно утверждению теоремы 1 нули характеристического определителя $\Delta(\lambda)$ удовлетворяют неравенству $\lambda_n \geqslant Cn,$ где C – константа, не зависящая от номера $n.$

Благодаря выбору граничных условий, характеристический определитель краевой задачи (10), (17) в точности совпадает с характеристическим определителем оператора $A(\lambda).$ Из этого следует, что собственные значения пучка $A(\lambda)$ совпадают с корнями характеристического определителя (18), что и завершает доказательство теоремы.

Отметим, что в работе [3] построена последовательность весов $\rho_n(x),$ для которых при тривиальном потенциале m-е собственное значение задачи мажорируется величиной $Cm\ln m,$ где C – постоянная, не зависящая от номера $m.$ Однако построение предельного веса из пространства W_2^{-1}, для которого полученная в настоящей работе оценка достигается, остаётся нерешённой задачей.

Автор выражает благодарность проф. И.В. Садовничей и проф. А.М. Савчуку за постоянное внимание к работе и ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Eckhardt J., Teschl G.* Sturm–Liouville operators with measure-valued coefficients // J. Anal. Math. 2013. V. 120. № 1. P. 151–224.
2. *Владимиров А.А., Шейпак И.А.* Асимптотика собственных значений задачи Штурма–Лиувилля с дискретным самоподобным весом // Мат. заметки. 2010. Т. 88. № 5. С. 662–672.
3. *Владимиров А.А.* Некоторые замечания об интегральных характеристиках винеровского процесса // Дальневост. мат. журн. 2015. Т. 15. № 2. С. 156–165.
4. *Садовничий В.А., Подольский В.Е.* Следы операторов // Успехи мат. наук. 2006. Т. 61. Вып. 5 (371). С. 89–156.
5. *Constantin A., Gerdjikov V.S., Ivanov R.I.* Inverse scattering transform for the Camassa–Holm equation // Inverse Problems. 2006. V. 22. P. 2197–2207.
6. *Eckhardt J., Kostenko A.* An isospectral problem for global conservative multi-peakon solutions of the Camassa–Holm equation // Comm. in Math. Phys. 2014. V. 329. № 3. P. 893–918.
7. *Назаров А.И.* Логарифмическая асимптотика малых уклонений для некоторых гауссовских процессов в L_2-норме относительно самоподобной меры // Зап. науч. сем. ПОМИ. 2004. Т. 311. С. 190–213.
8. *Иванов А.С., Савчук А.М.* След порядка (-1) для струны с сингулярным весом // Мат. заметки. 2017. Т. 102. № 2. С. 197–215.
9. *Иванов А.С.* Следы высших отрицательных порядков для струны с сингулярным весом // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 10. С. 1338–1348.
10. *Савчук А.М., Шкаликов А.А.* Операторы Штурма–Лиувилля с потенциалами-распределениями // Тр. Моск. мат. о-ва. 2003. Т. 64. С. 159–212.
11. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М., 1972.
12. *Левин Б.Я.* Распределение корней целых функций. М., 1956.
13. *Леонтьев А.Ф.* Целые функции. Ряды экспонент. М., 1983.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 13.04.2021 г.
После доработки 13.04.2021 г.
Принята к публикации 08.09.2021 г.