ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 10, с. 1325–1332

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.912

К ЗАДАЧЕ О РАЗДЕЛЕНИИ ПЕРЕМЕННЫХ В СИСТЕМАХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2021 г. **В. В. Козлов**

Обсуждаются условия разделения переменных в автономных системах дифференциальных уравнений общего вида. Подход основан на идее Лиувилля о включении такой системы в гамильтонову систему в фазовом пространстве удвоенной размерности. Для разделения переменных используются координаты Штекеля и введённые Якоби эллиптические координаты.

DOI: 10.31857/S0374064121100046

1. Уравнения Лиувилля. Пусть v – гладкое векторное поле на n-мерном многообразии M, порождающее автономную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = v(x). \tag{1.1}$$

Здесь $x = (x_1, \ldots, x_n)$ обозначает набор локальных координат на M. Пусть T^*M – пространство кокасательного расслоения M и $y = (y_1, \ldots, y_n)$ – декартовы координаты в векторном пространстве T_x^*M.

На T^*M инвариантным образом определена функция

$$H(x, y) = (y, v(x)) = \sum y_i v_i(x). \tag{1.2}$$

Скобки $(\, ,)$ обозначают спаривание: значение ковектора на векторе. С другой стороны, на T^*M имеется естественная (каноническая) симплектическая структура – невырожденная замкнутая 2-форма

$$d(y, x) = \sum dy_i \wedge dx_i,$$

которая позволяет поставить в соответствие функции (1.2) (как гамильтониану) систему дифференциальных уравнений Гамильтона

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} = v(x), \quad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^* y. \tag{1.3}$$

Первая группа уравнений совпадает с исходной системой дифференциальных уравнений (1.1), а вторая – это сопряжённая система уравнений в вариациях для системы (1.1).

Эти наблюдения, восходящие к Лиувиллю, позволяют свести исследование системы (1.1) к задаче о гамильтоновой системе (1.3) с линейным по импульсам гамильтонианом. С гамильтонианом (1.2) полезно связать уравнение Гамильтона–Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \left(\frac{\partial S}{\partial x}, v(x)\right) = 0. \tag{1.4}$$

В гамильтоновом формализме S имеет смысл действия по Гамильтону, а для системы (1.1) – это её первый интеграл.

Напомним, что *полным* решением уравнения (1.4) называется функция $S(t, x, \alpha)$ $(\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ – набор параметров), удовлетворяющая уравнению (1.4) при каждом фиксированном α и условию невырожденности

$$\det\left[\frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial \alpha_j}\right] \neq 0. \tag{1.5}$$

Так как поле v не зависит от времени, то можно положить

$$S = -h(\alpha)t + W(x, \alpha),$$

тогда, как легко видеть, функция W подчиняется уравнению

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}, v(x)\right) = h \tag{1.6}$$

и удовлетворяет условию (1.5) (с заменой в нём S на W).

По теореме Якоби, если известно полное решение уравнения (1.4), общее решение соответствующей гамильтоновой системы (1.3) находится из соотношений

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Возможность нахождения переменных $x_1, \ldots, x_n$ как функций времени t и $2n$ произвольных постоянных α_i, β_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ гарантирует теорема о неявных функциях с учётом условия (1.5). Решения сопряжённой линейной системы в вариациях находятся по формулам

$$y_j = \frac{\partial S}{\partial x_j}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n,$$

в которые вместо x следует подставить найденные решения системы (1.1).

Будем говорить, что переменные $x_1, \ldots, x_n$ в системе обыкновенных дифференциальных уравнений *разделяются*, если полное решение уравнения (1.6) имеет вид

$$W(x, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} W_i(x_i, \alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

Это общее определение является ключевым для дальнейшего анализа. В пп. 2 и 3 будут указаны содержательные примеры нелинейных систем, решаемых методом разделения переменных.

Однако уже при $n = 2$ имеются системы дифференциальных уравнений, которые принято относить к системам с разделяющимися переменными и которые не подпадают под наше рассмотрение. Речь идёт о системах следующего вида:

$$\dot{x}_1 = v_1(x_2), \quad \dot{x}_2 = v_2(x_1). \tag{1.7}$$

Чтобы устранить это противоречие, условимся не различать системы, правые части которых отличаются множителем в виде всюду положительной (или отрицательной) гладкой функции. Такие системы имеют одни и те же фазовые траектории и интегрируются (или не интегрируются) в квадратурах одновременно. Так как рассматриваются автономные системы дифференциальных уравнений, то задача отыскания их траекторий (а не решений) представляется даже более естественной. Если разделить правые части (1.7) на произведение $v_1 v_2$ (в области, где система (1.7) не имеет особых точек), то получим систему с разделяющимися переменными в смысле нашего общего определения.

В заключение этого пункта приведём одно соотношение, важное для дальнейшего анализа. Пусть

$$\Phi_1 = (y, w_1(x)) \quad \text{и} \quad \Phi_2 = (y, w_2(x))$$

– две линейные по импульсам функции на T^*M, w_1 и w_2 – гладкие векторные поля на M. Тогда скобка Пуассона $\{\Phi_1, \Phi_2\}$ равна

$$(y, [w_1, w_2]),$$

где $[\,,]$ – коммутатор векторных полей. Следовательно, функции Φ_1 и Φ_2 находятся в инволюции тогда и только тогда, когда поля w_1 и w_2 коммутируют между собой.

Пусть функции

$$F_1 = H = (y, v), \quad F_2 = (y, w_2), \quad \ldots, \quad F_n = (y, w_n) \tag{1.8}$$

находятся попарно в инволюции друг с другом. В частности, все они – интегралы гамильтоновой системы (1.3). Пусть, кроме того, векторные поля $w_1 = v$, w_2, $\ldots$, w_n линейно независимы в каждой точке M и нестеснены на M. Тогда каждая связная компонента многообразия M будет цилиндром (диффеоморфна прямому произведению $\mathbb{R}^k \times \mathbb{T}^{n-k}$, $\mathbb{T}^m$ – m-мерный тор) и на этом цилиндре можно ввести k линейных координат ψ_1, $\ldots$, ψ_k и $n-k$ угловых координат φ_{k+1}, $\ldots$, $\varphi_n \mod 2\pi$ так, что в этих координатах система (1.1) принимает вид

$$\dot{\psi}_i = c_i, \quad \dot{\varphi}_j = \omega_j; \quad c, \omega = \text{const}. \tag{1.9}$$

Сформулированное утверждение – глобальный вариант теоремы о выпрямлении траекторий (см., например, [1, гл. II, § 4]). В компактном случае (т.е. когда $k = 0$) получаем условно-периодические движения на $\mathbb{T}^n$. Сведение системы уравнений к виду (1.9) часто называют её линеаризацией (поскольку переменные ψ_i, $1 \leqslant i \leqslant k$, и φ_j, $k+1 \leqslant j \leqslant n$, линейно меняются со временем).

Применение уравнений Лиувилля к интегрированию нелинейных систем дифференциальных уравнений содержится в работе [2]. Эту заметку следует рассматривать как дополнение к ней.

2. Штекелевы системы. Рассмотрим невырожденную $n \times n$-матрицу

$$[\varphi_{ij}(x_j)], \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n, \tag{2.1}$$

и пусть Φ – её определитель, а Φ_{ij} – алгебраическое дополнение элемента φ_{ij} (зависящего только от координаты x_j). Рассмотрим n систем дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\dot{x}_j = \frac{f_j(x_j)\Phi_{mj}(x)}{\Phi(x)}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n, \tag{2.2}$$

где f_j – не обращающиеся в нуль гладкие функции одного переменного. Целое m $(1 \leqslant m \leqslant n)$ нумерует эти системы. Утверждается, что каждая из этих систем интегрируется методом разделения переменных. Более того, в случае тора (когда $M = \mathbb{T}^n$) все эти нелинейные системы линеаризуются одним и тем же преобразованием.

Уравнение (1.6) в рассматриваемом случае принимает следующий вид:

$$\sum_{j=1}^{n} f_j \Phi_{mj} \frac{\partial W}{\partial x_j} = \alpha_m \Phi \quad (h = \alpha_m), \tag{2.3}$$

или

$$\sum_{j=1}^{n} \Phi_{mj} \left(f_j \frac{\partial W}{\partial x_j} - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_{kj} \right) = 0.$$

Положим

$$W = \sum W_s(x_s, \alpha), \tag{2.4}$$

где W_s (как функция от одной переменной x_s) удовлетворяет уравнению

$$f_s \frac{\partial W_s}{\partial x_s} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_{ks}(x_s). \tag{2.5}$$

Оно тривиально решается, и (поскольку матрица (2.1) невырождена) функция (2.4) даёт полное решение уравнения (2.3).

Подчеркнём, что все n систем (2.2) дифференциальных уравнений одновременно решаются разделением переменных $x_1, \ldots, x_n$. Легко понять, что n функций вида (1.8)

$$F_k = \sum_j \Phi_{kj} f_j y_j / \Phi, \quad 1 \leqslant k \leqslant n,$$

образуют полный набор интегралов в инволюции. Так как по предположению функции $f_1, \ldots$ $\ldots, f_n$ нигде не обращаются в нуль, то

$$\frac{\partial(F_1, \ldots, F_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)} \neq 0.$$

Следовательно, фазовые потоки систем дифференциальных уравнений (2.2) при разных m коммутируют между собой.

Указанный способ разделения переменных впервые применил Штекель для решения уравнений динамики (см., например, монографию [3, п. 2.3] и имеющиеся в ней ссылки). В частности, он указал римановы метрики, геодезические которых находятся с помощью квадратур. Те же переменные разделяются и в соответствующем операторе Лапласа–Бельтрами.

Из уравнения (2.5) следует, что

$$W_s = \int_{x_s^0}^{x_s} \frac{\sum \alpha_k \varphi_{ks}(z)}{f_s(z)}\, dz.$$

Следовательно, по теореме Якоби

$$\sum_s \int_{x_s^0}^{x_s} \frac{\varphi_{ks}(z)}{f_s(z)}\, dz = \beta_k, \quad k \neq m,$$

$$\sum_s \int_{x_s^0}^{x_s} \frac{\varphi_{ms}(z)}{f_s(z)}\, dz = t + \beta_m, \tag{2.6}$$

что даёт общее решение системы дифференциальных уравнений (2.2) с номером m. В качестве произвольных постоянных можно взять $x_1^0, \ldots, x_n^0$ или $\beta_1, \ldots, \beta_n$.

3. Уравнения Абеля. Рассмотрим частный случай системы Штекеля, когда матрица (2.1) является матрицей Вандермонда

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Запишем в явном виде систему дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными (2.2) в самом простом случае, когда $m = n$:

$$\dot{x}_j = f_j(x_j) \Bigg/ \prod_{\substack{s=1 \\ s\neq j}}^{n} (x_j - x_s), \quad 1 \leqslant j \leqslant n. \tag{3.1}$$

Если не принимать во внимание содержание п. 2, то здесь непосредственно не видно, что эта система может быть решена с помощью разделения переменных.

Во многих проинтегрированных задачах механики $f_1 = \ldots = f_n = f$ и

$$f(z) = \sqrt{P(z)}, \tag{3.2}$$

где P – многочлен степени $2n+1$ или $2n+2$ без кратных корней. В частности, при $n = 2$ уравнения (3.1) (функция f определяется равенством (3.2)) возникают при интегрировании уравнений вращения тяжёлого твёрдого тела в случаях Ковалевской и Горячева–Чаплыгина (см., например, [1, гл. II, § 5]).

Уравнения (2.6) примут следующий вид:

$$\begin{gathered}
\sum \int\limits_{x_s^0}^{x_s} \frac{dz}{\sqrt{P(z)}} = \beta_1, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\sum \int\limits_{x_s^0}^{x_s} \frac{z^{n-2}\,dz}{\sqrt{P(z)}} = \beta_{n-1}, \\
\sum \int\limits_{x_s^0}^{x_s} \frac{z^{n-1}\,dz}{\sqrt{P(z)}} = t + \beta_n.
\end{gathered} \tag{3.3}$$

Задача их обращения (нахождение $x_1, \ldots, x_n$) – предмет классических исследований, начатых Абелем, Якоби и Риманом (современный подход изложен, например, в [4]). Если P – многочлен степени $2n-1$, то (как доказал Абель) решение трансцендентной системы (3.3) сводится к алгебраической задаче о решении некоторой системы полиномиальных уравнений. Якоби связал разделяющиеся переменные $x_1, \ldots, x_n$ с эллиптическими координатами в $\mathbb{R}^n$ [5, с. 209]. Связь уравнений Абеля (3.1) с системами Штекеля обсуждалась также в работах [6; 7, гл. 3, § 3] с точки зрения задачи интегрирования уравнений динамики.

4. Системы на торе с многозначными интегралами. Пусть M – n-мерный тор $\mathbb{T}^n = \{x_1, \ldots, x_n \mod 2\pi\}$ и $f\colon \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}$ – гладкая положительная функция. Рассмотрим следующую систему дифференциальных уравнений на $\mathbb{T}^n$:

$$\dot{x}_j = \omega_j / f(x), \quad 1 \leqslant j \leqslant n. \tag{4.1}$$

Здесь $\omega_1, \ldots, \omega_n$ – постоянные числа, отличные от нуля.

Очевидно, система (4.1) интегрируется с помощью квадратур. Более того, она допускает многозначные интегралы

$$F_{ij} = \omega_j x_i - \omega_i x_j, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n.$$

Среди них ровно $n-1$ функционально независимых. Отметим,что при некоторых дополнительных предположениях верно и обратное: если система на торе допускает $n-1$ независимых многозначных интегралов, то в некоторых угловых переменных эта система приводится к виду (4.1) (см. [8]). Случай $n = 3$ рассмотрен В.И. Арнольдом [9]. Система (4.1) допускает инвариантную меру $f(x)\,d^n x$. Как показал А.Н. Колмогоров [10], любая система без особых точек на двумерном торе, допускающая инвариантную меру с положительной гладкой плотностью, приводится к виду (4.1).

Сначала сделаем простое замечание. Если

$$f = \sum f_j(x_j),$$

то система (4.1) решается разделением переменных. Кстати сказать, этот случай реализуется в интегрируемых задачах динамики твёрдого тела: после введения угловых переменных уравнения Абеля (3.1) (при $n = 2$) принимают именно такой вид.

В общем случае уравнение (1.6) имеет простую форму:

$$\sum \omega_j \frac{\partial W}{\partial x_j} = h(\alpha) f. \tag{4.2}$$

Положим $f = \overline{f} + \widetilde{f}$, где $\overline{f}$ – среднее значение функции f и на $\mathbb{T}^n$, а среднее $\widetilde{f} = f - \overline{f}$ равно нулю. Тогда решение уравнения (4.2) представляется как сумма функций $\overline{W}$ и $\widetilde{W}$, где

$$\overline{W} = \alpha_j x_j, \quad \sum \omega_j \alpha_j = h(\alpha) \overline{f},$$

а

$$\sum \omega_j \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial x_j} = h \widetilde{f}. \tag{4.3}$$

Как хорошо известно, для почти всех наборов $(\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \mathbb{R}^n$ уравнение (4.3) допускает гладкое решение (причём единственное, если считать среднее $\widetilde{W}$ нулём).

Тогда $S = -h(\alpha)t + W(x, \alpha)$ и переменные $x_1, \ldots, x_n$ как функции времени находятся из соотношений

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_j} = -\frac{\omega_j}{\overline{f}} t + x_j + \frac{\omega_j}{\overline{f}} W'(x) = \beta_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Здесь $W' = \widetilde{W}/h$. Следовательно, замена переменных

$$x_j + \omega_j' W'(x) = \varphi_j, \quad \omega_j' = \omega_j / \overline{f} \tag{4.4}$$

переводит систему (4.1) в систему

$$\dot{\varphi}_j = \omega_j', \quad 1 \leqslant j \leqslant n, \tag{4.5}$$

задающую условно-периодическое движение по тору. Частоты ω_j' – это средние значения правых частей системы (4.1) относительно инвариантной меры $f\, d^n x$.

Формулы (4.4) указаны в книге [11, с. 156]; этот же результат о приведении системы (4.1) к системе (4.5) для почти всех $\omega \in \mathbb{R}^n$ похожим способом доказан в работе [12]. Доказательство А.Н. Колмогорова [10] для $n = 2$ основано на другой идее.

5. Условия разделения переменных. Следующее утверждение отвечает на вопрос о разделении переменных $x_1, \ldots, x_n$ в системе дифференциальных уравнений (1.1), т.е. в системе

$$\dot{x}_j = v_j(x_1, \ldots, x_n), \quad 1 \leqslant j \leqslant n. \tag{5.1}$$

Теорема. *Переменные $x_1, \ldots, x_n$ в системе (5.1) разделяются тогда и только тогда, когда компоненты векторного поля v удовлетворяют следующим $n(n-1)$ условиям:*

$$v_j v_k \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_k} - v_j \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \quad 1 \leqslant j < k \leqslant n. \tag{5.2}$$

Доказательство основано на известном результате Леви-Чивиты о критерии разделения переменных в уравнении Гамильтона–Якоби с гамильтонианом $H(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$:

$$\frac{\partial H}{\partial y_j} \frac{\partial H}{\partial y_k} \frac{\partial^2 H}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{\partial H}{\partial y_j} \frac{\partial H}{\partial x_k} \frac{\partial^2 H}{\partial x_j \partial y_k} - \frac{\partial H}{\partial x_j} \frac{\partial H}{\partial y_k} \frac{\partial^2 H}{\partial y_j \partial x_k} + \frac{\partial H}{\partial x_j} \frac{\partial H}{\partial x_k} \frac{\partial^2 H}{\partial y_i \partial y_j} = 0 \tag{5.3}$$

для всех $1 \leqslant j < k \leqslant n$ (суммирования по повторяющимся индексам нет). Доказательство этого факта и его обсуждение можно найти, например, в [3, п. 2.3].

Подставляя теперь гамильтониан (1.2) в соотношения (5.3), получаем условия (5.2) разделения переменных в системе дифференциальных уравнений (1.1).

Вряд ли возможно отыскать в самом общем случае все векторные поля, удовлетворяющие системе (5.2). Рассмотрим упоминавшийся в п. 1 частный случай, когда $n = 2$, – систему (1.7). Система (5.2) в этом случае сводится к двум уравнениям в частных производных:

$$v_1 v_2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\left(v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_1}\right) = 0,$$

$$v_1 v_2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\left(v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right) = 0.$$

Они легко преобразуются к следующему виду:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial v_1/\partial x_2}{v_1 v_2} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial v_2/\partial x_1}{v_1 v_2} = 0.$$

Отсюда очевидно вытекают равенства

$$\partial v_1/\partial x_2 = \varphi(x_2) v_1 v_2, \quad \partial v_2/\partial x_1 = \psi(x_1) v_1 v_2 \tag{5.4}$$

с некоторыми гладкими функциями φ и ψ.

Пусть сначала $\varphi \equiv 0$ (случай $\psi \equiv 0$ рассматривается аналогично). Тогда из первого соотношения в (5.4) вытекает, что $v_1 = \alpha(x_1)$, где α – гладкая функция. Но тогда из второго равенства в (5.4) следует, что

$$v_2 = \beta(x_2)\gamma(x_1),$$

где $\gamma_1 = \exp \int \psi(x_1)\alpha(x_1)\, dx_1$. В этом случае уравнение Гамильтона–Якоби (1.6) решается разделением переменных.

Пусть теперь функции φ и ψ не обращаются в нуль. Положим

$$v_1 = w_1/\psi, \quad v_2 = w_2/\varphi. \tag{5.5}$$

Тогда из соотношений (5.4) вытекает, что $\partial w_1/\partial x_2 = \partial w_2/\partial x_1$. Следовательно, поле $w = (w_1, w_2)$ потенциально:

$$w_1 = \partial a/\partial x_1, \quad w_2 = \partial a/\partial x_2, \tag{5.6}$$

причём гладкий потенциал a удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial a}{\partial x_1}\frac{\partial a}{\partial x_2}.$$

Отсюда находим, что

$$\frac{\partial a}{\partial x_1} = c_1(x_1) e^a, \quad \frac{\partial a}{\partial x_2} = c_2(x_2) e^a \tag{5.7}$$

с некоторыми гладкими функциями c_1 и c_2 одной переменной. Значит, согласно равенствам (5.5) и (5.6), будем иметь

$$v_1 = \frac{c_1(x_1)}{\psi(x_1)} e^a, \quad v_2 = \frac{c_2(x_2)}{\varphi(x_2)} e^a. \tag{5.8}$$

Наконец, из первого уравнения в (5.7) получаем

$$-e^{-a} = \int c_1(x_1)\, dx_1 + d(x_2).$$

В итоге представления (5.8) дают следующий вид правых частей нашей системы дифференциальных уравнений:

$$v_1 = \frac{A(x_1)}{C(x_1) + D(x_2)}, \quad v_2 = \frac{B(x_2)}{C(x_1) + D(x_2)},$$

где A, B, C, D – гладкие функции. В этом случае мы имеем систему Штекеля с разделяющимися переменными из п. 2.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 21-71-30011).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Козлов В.В.* Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск, 1995.
2. *Козлов В.В.* Замечания об интегрируемых системах // Нелинейная динамика. 2013. Т. 9. № 3. С. 459–478.
3. *Переломов А.М.* Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли. М., 1990.
4. *Дубровин Б.А.* Тета-функции и нелинейные уравнения // Успехи мат. наук. 1981. Т. 36. № 2. С. 11–80.
5. *Якоби К.* Лекции по динамике. М.; Л., 1936.
6. *Цыганов А.В.* Однородные системы типа систем Штекеля // Теор. и мат. физика. 1998. Т. 115. № 1. С. 3–28.
7. *Борисов А.В., Мамаев И.С.* Современные методы теории интегрируемых систем. М.; Ижевск, 2003.
8. *Козлов В.В.* Динамические системы на торе с многозначными интегралами // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова РАН. 2007. Т. 256. С. 201–218.
9. *Арнольд В.И.* Полиинтегрируемые потоки // Алгебра и анализ. 1992. Т. 4. № 6. С. 54–62.
10. *Колмогоров А.Н.* О динамических системах с интегральным инвариантом на торе // Докл. АН СССР. 1953. Т. 93. № 5. С. 763–766.
11. *Козлов В.В.* Методы качественного анализа в динамике твердого тела. М., 1980.
12. *Herman M.R.* Exemples de flots hamiltoniens dont aucune perturbation en topologie C^∞ n'a d'orbites périodiques sur un ouvert de surfaces d'énergies // Comp. Rend. Acad. Sci. Paris. 1991. Sér. 1. V. 312. № 13. P. 989–994.

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН,
г. Москва,
Ярославский государственный университет
им. П.Г. Демидова

Поступила в редакцию 12.07.2021 г.
После доработки 12.07.2021 г.
Принята к публикации 08.09.2021 г.