ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 10, с. 1333–1338

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925.52+517.926.4

О ГЕНЕРАЛЬНЫХ ПОКАЗАТЕЛЯХ УСЛОВНО-ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ

© 2021 г. Ю. Д. Козлов

Доказано, что верхние генеральные показатели всех систем из Н-класса системы линейных дифференциальных уравнений с условно-периодическими коэффициентами равны между собой. Указана их связь со спектральным радиусом оператора монодромии этой системы.

DOI: 10.31857/S0374064121100058

Введение. Рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений

$$x' = a(t)x. \tag{1}$$

Здесь a – действительная условно-периодическая матричная функция, т.е. $a(t) = A(et)$, где $A = A(\varphi)$ – непрерывная $n \times n$-матричная функция переменного $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m) \in \mathbb{R}^m$, являющаяся ω_j-периодической по φ_j $(j = \overline{1,m})$, $e = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^m$, $m \geqslant 2$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ и частоты $\beta_i = 2\pi/\omega_i$, $i = \overline{1,m}$, рационально независимы. Обозначим $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_m)$ и $\hat\omega = (\omega_2, \ldots, \omega_m)$.

Введём ещё несколько обозначений. Пусть $P_n(\hat\omega)$ – банахово пространство ω_j-периодических по φ_j $(j = \overline{2,m})$ непрерывных вектор-функций $u\colon \mathbb{R}^{m-1} \to \mathbb{C}^n$ переменного $\hat\varphi = (\varphi_2, \ldots, \varphi_m)$ с нормой $\|u\|_{\hat\omega} = \max\limits_{\hat\varphi \in \mathbb{R}^{m-1}} \|u(\hat\varphi)\|$, где $\|\cdot\|$ – какая-либо норма вектора в конечномерном пространстве (согласованная с ней норма матрицы обозначается также через $\|\cdot\|$), $\hat e = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^{m-1}$; E – единичная $n \times n$-матрица. Если $\varphi, \varphi' \in \mathbb{R}^m$, то запись $\varphi = \varphi'$ $(\mathrm{mod}\ \omega)$ (или $\|\varphi - \varphi'\| < \epsilon$ $(\mathrm{mod}\ \omega)$) означает, что найдутся целые числа $r_1, \ \ldots, \ r_m$ такие, что $\varphi = \varphi' + (r_1\omega_1, \ldots, r_m\omega_m)$ (или $\|\varphi - \varphi' + (r_1\omega_1, \ldots, r_m\omega_m)\| < \epsilon$). В этом же смысле следует понимать запись $\varphi^j \to \varphi$ $(\mathrm{mod}\ \omega)$ при $j \to \infty$.

Пусть $n \times n$-матричная функция X является решением матричного уравнения

$$X(\varphi) = \int\limits_0^{\varphi_1} A(\varphi - e\xi) X(\varphi - e\xi)\, d\xi + E,$$

тогда X невырождена при всех $\varphi \in \mathbb{R}^m$, а матричные функции X и X^{-1} непрерывны на $\mathbb{R}^m$ и ω_j-периодичны по φ_j $(j = \overline{2,m})$ [1, 2].

Рассмотрим систему

$$X(\omega_1, \hat\varphi) u(\hat\varphi - \hat e\omega_1) - \lambda u(\hat\varphi) = g(\hat\varphi) \tag{2}$$

относительно неизвестной вектор-функции u. Мы используем следующее условие разрешимости этой системы (не претендуя на его новизну, возможно, в теории операторов взвешенного сдвига имеется результат, из которого оно следует). Система (2) для любой функции $g \in P_n(\hat\omega)$ имеет единственное решение $u \in P_n(\hat\omega)$, если $|\lambda| > \nu(\hat\varphi)$ для некоторого $\hat\varphi \in \mathbb{R}^{m-1}$, где

$$\nu(\hat\varphi) = \varlimsup_{j,s\to\infty} \sqrt[j+1]{\|X_{j+s} \cdots X_s\|} \tag{3}$$

и $X_j = X(\omega_1, \hat\varphi + j\omega_1\hat e)$ (этот предел конечен, так как функция $X(\omega_1, \cdot\,)$ ограничена).

С помощью этого условия мы показываем, что все системы из Н-класса системы (1) на полуоси $t \geqslant 0$ имеют один и тот же верхний генеральный показатель $\mu = \omega_1^{-1} \ln\rho$, где ρ –

спектральный радиус оператора монодромии системы (1). Последнее равенство является аналогом классического результата для периодической системы (см. теорему 1.1 из [3, с. 282]).

Аналогичное соотношение между генеральным показателем H-класса системы (1) и спектральным радиусом оператора монодромии ранее было получено в работе [4]. Множество систем из H-класса системы (1) можно рассматривать как одно дифференциальное уравнение в пространстве $P_n(\hat{\omega})$. Генеральный показатель κ этого уравнения – это и есть генеральный показатель H-класса, для него справедлива формула [4]

$$\kappa = \varlimsup_{t,\xi\to\infty} t^{-1}\ln \sup_{\hat{\varphi}\in\mathbb{R}^{m-1}} \|X(t+\xi,\hat{e}(t+\xi)+\hat{\varphi})X^{-1}(\xi,\hat{e}\xi+\hat{\varphi})\|.$$

Если в этой формуле под знаком логарифма убрать операцию $\sup$, то для каждого $\hat{\varphi}\in\mathbb{R}^{m-1}$ получим выражение верхнего генерального показателя некоторой системы из H-класса (см. [4, формула (5)]). При этом выражение под знаком логарифма (без значка $\sup$) зависит от $\hat{\varphi}$, а предел – нет. Кроме того, оказывается, что и $\nu(\hat{\varphi})$ не зависит от $\hat{\varphi}$, а именно, $\nu(\hat{\varphi})=\rho$ для всех $\hat{\varphi}\in\mathbb{R}^{m-1}$.

Понятие генерального показателя введено П.Г. Болем (см. [5, с. 456–486]). Он же является одним из основателей теории условно периодических функций. В работе мы опираемся на его идею периодического пространственного расширения этих функций. Мы также используем идеи и технику, которые применяются для исследования периодических систем в монографии [3].

Обзор теории показателей линейных систем, включая условно-периодические системы, можно найти в [6]. Отметим, что устойчивость системы (1) при постоянно действующих возмущениях равносильна отрицательности её верхнего генерального показателя [5]. Следовательно, необходимым и достаточным условием устойчивости при постоянно действующих возмущениях всех систем из H-класса системы (1) является условие $\rho<1$.

1. Решение системы (2). Зафиксируем произвольные векторы $\hat{\varphi}\in\mathbb{R}^{m-1}$ и $u_{-1}\in\mathbb{C}^n$, положим $u_k=u(\hat{\varphi}+k\omega_1\hat{e})$, $g_k=g(\hat{\varphi}+k\omega_1\hat{e})$ и найдём u_k $(k=0,1,\ldots)$ из системы (2):

$$u_0=\lambda^{-1}(X_0u_{-1}-g_0),\quad \ldots$$

$$\ldots,\quad u_k=\lambda^{-1}(X_ku_{k-1}-g_k)=\lambda^{-(k+1)}X_k\cdots X_0u_{-1}-\sum_{s=1}^{k}\lambda^{-(k-s+2)}X_k\cdots X_sg_{s-1}-\lambda^{-1}g_k. \quad (4)$$

Исследуем полученную последовательность $\{u_k\}$.

Лемма 1. *Пусть функция $\nu(\hat{\varphi})$ определяется формулой (3) и $|\lambda|>\nu(\hat{\varphi})$, тогда последовательность $\{u_k\}$ ограничена.*

Доказательство. Поскольку $|\lambda|>\nu(\hat{\varphi})$, то по определению верхнего предела для произвольного $\varepsilon\in(0,|\lambda|-\nu(\hat{\varphi}))$ возьмём $s_0\in\mathbb{N}$ такое, что из неравенств $k>s>s_0$ следует

$$|\lambda|^{-(k-s+1)}\|X_k\cdots X_s\|\leqslant\alpha^{k-s+1}\quad (\alpha=|\lambda|^{-1}(\nu(\hat{\varphi})+\varepsilon)<1).$$

Кроме того, существует $c>0$ такое, что $|\lambda|^{-(s_0-s+1)}\|X_{s_0}\cdots X_s\|\leqslant c$ для $s=\overline{0,s_0}$. Тогда

$$\|u_k\|\leqslant|\lambda|^{-k-1}\|X_k\cdots X_{s_0+1}X_{s_0}\cdots X_0u_{-1}\|+\sum_{s=s_0+1}^{k}|\lambda|^{-(k-s+2)}\|X_k\cdots X_s\|\|g_{s-1}\|+$$

$$+|\lambda|^{-1}\sum_{s=1}^{s_0}|\lambda|^{-(k-s_0)}\|X_k\cdots X_{s_0+1}\||\lambda|^{-(s_0-s+1)}\|X_{s_0}\cdots X_s\|\|g_{s-1}\|+|\lambda|^{-1}\|g_k\|\leqslant$$

$$\leqslant\alpha^{k-s_0}c\|u_{-1}\|+|\lambda|^{-1}\|g\|_{\hat{\omega}}\bigg(\sum_{s=s_0+1}^{k}\alpha^{k-s+1}+\alpha^{k-s_0}cs_0+1\bigg)\leqslant$$

$$\leqslant c\|u_{-1}\| + |\lambda|^{-1}\|g\|_{\hat\omega}((1-\alpha)^{-1} + cs_0 + 1).$$

Эта оценка завершает доказательство леммы.

Вследствие рациональной независимости частот β_i, $i = \overline{1,m}$, по теореме Кронекера [7, с. 68] для произвольного $\hat\eta \in \mathbb{R}^{m-1}$ найдётся возрастающая последовательность натуральных чисел $\{k_j\}$ такая, что

$$\hat\varphi + k_j\omega_1\hat e \to \hat\eta \pmod{\hat\omega}$$

при $j \to \infty$. Для краткости назовём её *$\hat\varphi\hat\eta$-последовательностью.*

Лемма 2. *Пусть $\{k_j\}$ является $\hat\varphi\hat\eta$-последовательностью и выполняются условия леммы 1, тогда подпоследовательность $\{u_{k_j}\}$ последовательности $\{u_k\}$ из леммы 1 сходится.*

Доказательство. Используя представления (4), докажем, что последовательность $\{u_{k_j}\}$ фундаментальна. Для этого запишем k_j в виде $k_j = p_0 + q_j + r_j$, где $p_0, q_j, r_j \in \mathbb{N}$ и $p_0 + q_j$ также является членом последовательности $\{k_j\}$. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Благодаря ограниченности $\{u_k\}$, так же, как в лемме 1, найдутся $r_0, p_0 \in \mathbb{N}$ такие, что

$$|\lambda|^{-(p_0+1)}\|X_{p_0+q_j+r_j}\cdots X_{q_j+r_j}u_{q_j+r_j-1}\| < \varepsilon/4, \quad |\lambda|^{-(p_0+1)}\|X_{p_0+q_j}\cdots X_{q_j}u_{q_j-1}\| < \varepsilon/4$$

для $q_j > r_0$ и $r_j \in \mathbb{N}$.

Зафиксируем p_0. Принимая во внимание, что матричная $X(\omega_1,\cdot)$ и векторная g функции непрерывны и ω_j-периодичны по φ_j $(j = \overline{2,m})$, мы можем выбрать r_0 так, чтобы для $q_j > r_0$ и $r_j \in \mathbb{N}$ расстояние между точками $\hat\varphi + (p_o + q_j + r_j)\omega_1\hat e$ и $\hat\varphi + (p_o + q_j)\omega_1\hat e$ по $\bmod\ \hat\omega$ было настолько малым, что выполняются неравенства

$$\sum_{s=1}^{p_0} |\lambda|^{-(p_0+s+2)}\|X_{p_0+q_j+r_j}\cdots X_{q_j+r_j+s}g_{q_j+r_j+s-1} - X_{p_0+q_j}\cdots X_{q_j+s}g_{q_j+s-1}\| < \varepsilon/4$$

и

$$|\lambda|^{-1}\|g_{p_0+q_j+r_j} - g_{p_0+q_j}\| < \varepsilon/4.$$

Подставляя $\hat\varphi + q\omega_1\hat e$ вместо $\hat\varphi$ в (4), получаем

$$u_{p+q} = u_p(\hat\varphi + q\omega_1\hat e) = \lambda^{-(p+1)}X_p(\hat\varphi + q\omega_1\hat e)\cdots X_0(\hat\varphi + q\omega_1\hat e)u_{-1}(\hat\varphi + q\omega_1\hat e) -$$

$$-\sum_{s=1}^{p}\lambda^{-(p-s+2)}X_p(\hat\varphi + q\omega_1\hat e)\cdots X_s(\hat\varphi + q\omega_1\hat e)g_{s-1}(\hat\varphi + q\omega_1\hat e) - \lambda^{-1}g_p(\hat\varphi + q\omega_1\hat e) =$$

$$= \lambda^{-(p+1)}X_{p+q}\cdots X_q u_{q-1} - \sum_{s=1}^{p}\lambda^{-(p-s+2)}X_{p+q}\cdots X_{q+s}g_{q+s-1} - \lambda^{-1}g_{p+q}$$

для $p, q \in \mathbb{N}$.

Используя это соотношение и предыдущие оценки, имеем неравенство

$$\|u_{p_0+q_j+r_j} - u_{p_0+q_j}\| = \|u_{p_0}(\hat\varphi + (q_j + r_j)\omega_1\hat e) - u_{p_0}(\hat\varphi + q_j\omega_1\hat e)\| < \varepsilon$$

при $q_j > r_0$, $r_j \in \mathbb{N}$. Следовательно, последовательность $\{u_{k_j}\}$ сходится. Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть $|\lambda| > \nu(\hat\varphi)$ $(\nu(\hat\varphi)$ определено формулой (3)) для некоторого $\hat\varphi \in \mathbb{R}^{m-1}$, тогда система (2) для любой функции $g \in P_n(\hat\omega)$ имеет единственное решение $u \in P_n(\hat\omega)$.*

Доказательство. Существование. Пусть $\hat\eta \in \mathbb{R}^{m-1}$ произвольно и $\{k_j\}$ является $\hat\varphi\hat\eta$-последовательностью. В силу леммы 2 можно положить $u(\hat\eta) = \lim\limits_{j\to\infty} u_{k_j}$. Если взять другую $\hat\varphi\hat\eta$-последовательность $\{r_j\}$, то $u_{r_j} \to u(\hat\eta)$. Действительно, если допустить, что $u_{r_j} \to v \neq \neq u(\hat\eta)$, то последовательность u_{k_1}, u_{r_1}, u_{k_2}, u_{r_2}, $\ldots$ сходится и расходится одновременно. Это противоречие доказывает наше утверждение.

Только что определённая вектор-функция является ω_r-периодической по φ_r, так как не только $\hat\varphi + k_j\omega_1\hat e \to \hat\eta \pmod{\hat\omega}$, но и $\hat\varphi + k_j\omega_1\hat e \to \hat\eta + (\underbrace{0,\ldots,0,\omega_r}_{r},0,\ldots,0) \pmod{\hat\omega}$ при $j\to\infty$ $(r=\overline{2,m})$. Поэтому $u(\hat\eta) = u(\hat\eta + (0,\ldots,0,\omega_r,0,\ldots,0))$.

Докажем, что эта функция непрерывна. Возьмём произвольное $\hat\eta\in\mathbb{R}^{m-1}$ и последовательность $\{\hat\varphi^j\}$, сходящуюся к $\hat\eta$ по $\operatorname{mod}\,\hat\omega$ при $j\to\infty$. Согласно определению $u(\hat\varphi^j)$, для каждого натурального j выберем $l_j\in\mathbb{N}$ такое, что $\|\hat\varphi^j - l_j\omega_1\hat e - \hat\varphi\| < j^{-1} \pmod{\hat\omega}$ и $\|u(\hat\varphi^j) - u_{l_j}\| < j^{-1}$. Тогда $\hat\varphi + l_j\omega_1\hat e\to\hat\eta \pmod{\hat\omega}$ и $\lim\limits_{j\to\infty} u(\hat\varphi^j) = \lim\limits_{j\to\infty} u(l_j\omega_1\hat e + \hat\varphi) = u(\hat\eta)$. Это доказывает, что вектор-функция u непрерывна на $\mathbb{R}^{m-1}$.

Так как матричная $X(\omega_1,\cdot)$ и векторная g функции непрерывны и периодичны и $\hat\varphi + k_j\omega_1\hat e\to\hat\eta \pmod{\hat\omega}$, то $g_{k_j} = g(\hat\varphi + k_j\omega_1\hat e)\to g(\hat\eta)$ и $X_{k_j} = X(\omega_1,\hat\varphi + k_j\omega_1\hat e)\to X(\omega_1,\hat\eta)$ при $j\to\infty$. Кроме того, $\hat\varphi + (k_j-1)\omega_1\hat e \to \hat\eta - \hat e\omega_1 \pmod{\hat\omega}$ и $X_{k_j}u_{k_j-1} - \lambda u_{k_j} = g_{k_j}$. Поэтому, переходя к пределу в предыдущем равенстве, получаем, что $X(\omega_1,\hat\eta)u(\hat\eta - \hat e\omega_1) - \lambda u(\hat\eta) = g(\hat\eta)$ для $\hat\eta\in\mathbb{R}^{m-1}$. Существование решения доказано.

Единственность. Допустим противное. Тогда существует нетривиальное решение $u\in P_n(\hat\omega)$ системы

$$X(\omega_1,\hat\eta)u(\hat\eta - \hat e\omega_1) - \lambda u(\hat\eta) = 0.$$

Пусть $u_k = u(\hat\varphi + k\omega_1\hat e)$, тогда $u_k = \lambda^{-(k+1)}X_k\cdots X_0u_{-1}$. Покажем, что $u_k\to 0$. Пусть ε, s_0 и c будут такими же, как в лемме 1. Для $\delta>0$ найдём $s_1\in\mathbb{N}$ такое, что

$$|\lambda|^{-(k-s+1)}\|X_k\cdots X_s\|\|u_{-1}\| < \delta$$

для $k>s>s_1$. Тогда будем иметь

$$\|u_k\| \leqslant |\lambda|^{-(k-s_1)}\|X_k\cdots X_{s_1+1}\||\lambda|^{-(s_1-s_0)}\|X_{s_1}\cdots X_{s_0+1}\||\lambda|^{-(s_0+1)}\|X_{s_0}\cdots X_0\|\|u_{-1}\| < \delta\cdot 1\cdot c = \delta c$$

для $k>s_1>s_0$ и

$$\|u_k\| \leqslant |\lambda|^{-(k-s_0)}\|X_k\cdots X_{s_0+1}\||\lambda|^{-(s_0+1)}\|X_{s_0}\cdots X_0\|\|u_{-1}\| < \delta c$$

для $k>s_0\geqslant s_1$. Следовательно, последовательность $\{u_k\}$ является бесконечно малой. Взяв произвольное $\hat\eta\in\mathbb{R}^{m-1}$ и $\hat\varphi\hat\eta$-последовательность $\{k_j\}$, получим, что $u(\hat\eta) = \lim\limits_{j\to\infty} u_{k_j} = 0$. Это противоречит нетривиальности вектор-функции u и завершает доказательство теоремы.

2. Верхние генеральные показатели систем из Н-класса системы (1). Рассмотрим систему

$$x' = b(t)x,$$

принадлежащую Н-классу системы (1), т.е. существует последовательность $\{et_k\}$, сходящаяся по $\operatorname{mod}\omega$, и $a(t+t_k)\to b(t)$ равномерно на действительной прямой.

Так как матричная функция A периодична и непрерывна, то она равномерно непрерывна на $\mathbb{R}^m$. Поэтому, если $et_k\to\varphi \pmod{\omega}$, где $\varphi\in\mathbb{R}^m$, то $a(t+t_k) = A(e(t+t_k))\to A(et+\varphi)$ равномерно по $t\in\mathbb{R}$ при $k\to\infty$. Значит, в нашем случае H-классом системы (1) является множество систем

$$x' = A(et+\varphi)x,$$

где $\varphi\in\mathbb{R}^m$.

Характеристические и генеральные показатели системы (1) инвариантны относительно сдвига аргумента матрицы a. Следовательно, множество генеральных показателей систем

$$x' = A(t,\hat e t + \hat\varphi)x, \tag{5}$$

где $\hat\varphi\in\mathbb{R}^{m-1}$, совпадает с множеством генеральных показателей систем из Н-класса системы (1). Поэтому далее будем рассматривать систему (5).

Для каждого $\hat\varphi \in \mathbb{R}^{m-1}$ матрица $X(t, \hat e t + \hat\varphi)$ является нормированной фундаментальной матрицей системы (5) [2]. Поэтому, следуя теореме 4.4 из [3, с. 175], верхний генеральный показатель этой системы на полуоси $t \geqslant 0$ можно представить в виде

$$\mu(\hat\varphi) = \varlimsup_{t,\xi\to\infty} t^{-1} \ln \|X(t+\xi, \hat e(t+\xi) + \hat\varphi) X^{-1}(\xi, \hat e\xi + \hat\varphi)\|. \tag{6}$$

Кроме того, функция X обладает свойством

$$X(\varphi_1 + l\omega_1, \hat\varphi) = X(\varphi) X(l\omega_1, \hat\varphi - \varphi_1 \hat e), \tag{7}$$

где $\varphi_1 \in \mathbb{R}$, $\hat\varphi \in \mathbb{R}^{m-1}$ и $l \in \mathbb{Z}$ [1, 2]. Это равенство является аналогом известного свойства фундаментальной матрицы периодической системы.

Лемма 3. *Пусть $\mu(\hat\varphi)$ – верхний генеральный показатель системы (5) на полуоси $t \geqslant 0$ и $\nu(\hat\varphi)$ определяется формулой (3). Тогда равенство $\mu(\hat\varphi) = \omega_1^{-1} \ln \nu(\hat\varphi)$ справедливо для всех $\hat\varphi \in \mathbb{R}^{m-1}$.*

Доказательство. Используя равенство (7) (для $l = 1$), получаем

$$X(p\omega_1, \hat\varphi + p\omega_1\hat e) = X((p-1)\omega_1, \hat\varphi + p\omega_1 \hat e) X(\omega_1, \hat\varphi + \omega_1\hat e) = \ldots$$

$$\ldots = X(\omega_1, \hat\varphi + p\omega_1\hat e) X(\omega_1, \hat\varphi + (p-1)\omega_1\hat e) \cdots X(\omega_1, \hat\varphi + \omega_1\hat e) = X_p \cdots X_1.$$

Следовательно,

$$X_{j+s} \cdots X_s = X_{j+s} \cdots X_1 (X_{s-1} \cdots X_1)^{-1} =$$

$$= X((j+s)\omega_1, \hat\varphi + (j+s)\omega_1\hat e) X^{-1}((s-1)\omega_1, \hat\varphi + (s-1)\omega_1 \hat e).$$

Пусть $t + \xi = (j+s)\omega_1 + \gamma$ и $\xi = (s-1)\omega_1 + \delta$, где $\gamma, \delta \in [0, \omega_1]$ и $j, s \in \mathbb{N}$, тогда в силу (7) имеем

$$X(t+\xi, (t+\xi)\hat e + \hat\varphi) = X(\gamma, (j+s+\gamma)\omega_1\hat e + \hat\varphi) X((j+s)\omega_1, \hat\varphi + (j+s)\omega_1\hat e)$$

и

$$X(\xi, \xi\hat e + \hat\varphi) = X(\delta, (s-1+\delta)\omega_1\hat e + \hat\varphi) X((s-1)\omega_1, \hat\varphi + (s-1)\omega_1\hat e).$$

Вследствие непрерывности функций X и X^{-1} и их периодичности по φ_r $(r = \overline{2, m})$ найдётся число $\beta > 0$ такое, что $\|X^{-1}(\gamma, \hat\varphi)\| < \beta$ и $\|X(\gamma, \hat\varphi)\| < \beta$, а значит, $\|X^{-1}(\gamma, \hat\varphi) y\| > > \beta^{-1}\|y\|$ и $\|X(\gamma, \hat\varphi)y\| > \beta^{-1}\|y\|$ для $\gamma \in [0, \omega_1]$, $\hat\varphi \in \mathbb{R}^{m-1}$ и $y \in \mathbb{R}^n$.

Таким образом, справедливы оценки

$$\beta^{-2}\|X_{j+s} \cdots X_s\| = \beta^{-2}\|X((j+s)\omega_1, \hat\varphi + (j+s)\omega_1\hat e) X^{-1}((s-1)\omega_1, \hat\varphi + (s-1)\omega_1\hat e)\| \leqslant$$

$$\leqslant \|X(t+\xi, (t+\xi)\hat e + \hat\varphi) X^{-1}(\xi, \hat e\xi + \hat\varphi)\| \leqslant$$

$$\leqslant \beta^2 \|X((j+s)\omega_1, \hat\varphi + (j+s)\omega_1\hat e) X^{-1}((s-1)\omega_1, \hat\varphi + (s-1)\omega_1\hat e)\| = \beta^2 \|X_{j+s} \cdots X_s\|$$

и, следовательно,

$$t^{-1} \ln(\beta^{-2}\|X_{j+s}\cdots X_s\|) \leqslant t^{-1} \ln \|X(t+\xi, (t+\xi)\hat e + \hat\varphi) X^{-1}(\xi, \hat e\xi + \hat\varphi)\| \leqslant$$

$$\leqslant t^{-1} \ln(\beta^2 \|X_{j+s} \cdots X_s\|), \tag{8}$$

$t = (j+1)\omega_1 + \gamma - \delta$.

Переходя к верхнему пределу в этих неравенствах при j и s, стремящихся к бесконечности, приходим к нужному результату, так как левая и правая части неравенства (8) стремятся к $\omega_1^{-1} \ln \nu(\hat\varphi)$, а средняя часть – к $\mu(\hat\varphi)$. Лемма доказана.

Рассмотрим оператор монодромии L [1, 2] системы (1), определённый на $P_n(\hat\omega)$ равенством $Lu = X(\omega_1, \hat\varphi) u(\hat\varphi - \hat e\omega_1)$, $u \in P_n(\hat\omega)$.

Теорема 2. *Пусть ρ – спектральный радиус оператора L и $\mu(\hat{\varphi})$ – верхний генеральный показатель системы (5) на полуоси $t \geqslant 0$. Тогда для всех $\hat{\varphi} \in \mathbb{R}^{m-1}$ справедлива формула $\mu(\hat{\varphi}) = \omega_1^{-1} \ln \rho$.*

Доказательство. Во-первых, заметим, что $\nu(\hat{\varphi}) \geqslant \rho$ и, следовательно, $\mu(\hat{\varphi}) \geqslant \omega_1^{-1} \ln \rho$ для всех $\hat{\varphi} \in \mathbb{R}^{m-1}$. В противном случае, если допустить, что $\nu(\hat{\varphi}) < \rho$ для некоторого $\hat{\varphi} \in \mathbb{R}^{m-1}$, то система (2), согласно теореме 1, имеет единственное решение $u \in P_n(\hat{\omega})$, как только $g \in P_n(\hat{\omega})$ и $|\lambda| = \rho$. Следовательно, окружность $|\lambda| = \rho$ состоит из регулярных точек оператора L. Это противоречит тому, что значение ρ является спектральным радиусом этого оператора.

В работе [4] доказано соотношение

$$\omega_1^{-1} \ln \rho = \lim_{t,\xi \to \infty} t^{-1} \ln \max_{\hat{\varphi} \in \mathbb{R}^{m-1}} \|\mathfrak{X}(t+\xi, \hat{e}(t+\xi) + \hat{\varphi}; \xi)\|, \tag{9}$$

в котором $\mathfrak{X}(t+\xi, \hat{e}(t+\xi)+\hat{\varphi};\xi) = X(t+\xi, \hat{e}(t+\xi)+\hat{\varphi})X^{-1}(\xi, \hat{e}\xi+\hat{\varphi})$. Сравнивая равенства (9) и (6), заключаем, что $\mu(\hat{\varphi}) \leqslant \omega_1^{-1} \ln \rho$ и, следовательно, $\mu(\hat{\varphi}) = \omega_1^{-1} \ln \rho$. Теорема доказана.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Программы государственной поддержки ведущих университетов Российской Федерации (соглашение № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013 между Министерством образования и науки Российской Федерации и Уральским федеральным университетом).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Козлов Ю.Д.* О приводимости системы л.д.у. с условно-периодическими коэффициентами. Екатеринбург, 1995. Деп. в ВИНИТИ 06.05.95, N1278-B95.
2. *Козлов Ю.Д.* О дихотомии системы линейных дифференциальных уравнений с условно-периодическими коэффициентами // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 3. С. 294–299.
3. *Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М., 1970.
4. *Козлов Ю.Д.* О показателях H-класса условно-периодической системы дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 10. С. 1402–1405.
5. *Боль П.* Собр. тр. Рига, 1974.
6. *Изобов Н.* Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ. Т. 12. М., 1974. С. 71–146.
7. *Корнфельд Н.П., Синай Я.Г., Фомин С.В.* Эргодическая теория. М., 1980.

Уральский федеральный университет
им. Первого Президента России Б.Н. Ельцина,
г. Екатеринбург

Поступила в редакцию 08.01.2020 г.
После доработки 08.06.2020 г.
Принята к публикации 08.09.2021 г.