ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 10, с. 1339–1345

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.927.2+517.925.52

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ПУАНКАРЕ ДЛЯ ДВУМЕРНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ И УРАВНЕНИЙ РИККАТИ

© 2021 г. В. И. Мироненко, В. В. Мироненко

Получены формулы вычисления отображения Пуанкаре за период для двумерной линейной периодической системы дифференциальных уравнений и для дифференциального уравнения Риккати.

DOI: 10.31857/S037406412110006X

Введение. Данная работа представляет собой продолжение работы [1]. Ограничимся в ней рассмотрением двумерных линейных периодических по времени дифференциальных систем. Чтобы обратить внимание читателя на тот факт, что основные идеи работы приложимы и к нелинейным системам, мы рассмотрим также и уравнение Риккати.

Далее будем пользоваться понятием отображения Пуанкаре за период [2, с. 209; 3, с. 216].

Напомним вначале необходимые для понимания работы сведения из теории отражающей функции [4–11].

Пусть $n \in \mathbb{N}$ фиксировано и D – открытая область в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим дифференциальную систему

$$\frac{dx}{dt} = X(t,x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in D, \tag{1}$$

задача Коши для которой имеет единственное решение для любой точки $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times D$. Пусть $x = \varphi(t; t_0, x_0)$ – общее решение этой системы в форме Коши. *Отражающая функция* $F(t,x)$ системы (1) определяется формулой $F(t,x) = \varphi(-t; t, x)$. Очевидно, что $F(0,x) \equiv x$, $x \in D$. Для $x \in D$ через $\mathcal{I}_x = (-\alpha_x, \alpha_x)$ обозначим максимальный симметричный относительно нуля интервал существования решения $\varphi(t; 0, x)$. Графики решений $\varphi(t; 0, x)$, $t \in \mathcal{I}_x$, заполняют некоторую открытую область, которая и является областью определения отражающей функции $F(t,x)$.

Главное свойство отражающей функции состоит в том, что для любого решения $x(t)$ системы (1) справедливо тождество $F(t, x(t)) \equiv x(-t)$, $t \in \mathcal{I}_{x(0)}$. Другими словами, отражающая функция каждому будущему состоянию $x(t)$ реальной системы, моделируемой дифференциальной системой (1), ставит в соответствие её прошлое состояние $x(-t)$ в симметричный относительно настоящего $t = 0$ момент времени. Отсюда вытекают следующие утверждения (см. [5, 6]).

1. Если система (1) 2ω-периодична по t и $F(t,x)$ – её отражающая функция, то отображение Пуанкаре на отрезке $[-\omega, \omega]$ для этой системы задаётся правилом $x \mapsto F(-\omega, x)$.

2. Если $F(t,x)$ является отражающей функцией 2ω-периодической системы (1), то продолжимое на $[-\omega, \omega]$ решение $x(t) = \varphi(t; -\omega, x_0)$ будет 2ω-периодическим тогда и только тогда, когда $F(-\omega, x_0) = x_0$. Характер устойчивости этого решения совпадает с характером устойчивости неподвижной точки x_0 отображения Пуанкаре $x \mapsto F(-\omega, x)$.

3. Дифференцируемая функция $F(t,x)$, определённая в некоторой окрестности гиперплоскости $t = 0$ пространства (t,x), является отражающей функцией системы (1) тогда и только тогда, когда она представляет собой решение задачи Коши

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} X(t,x) + X(-t, F) = 0, \quad F(0,x) = x.$$

4. Для линейной системы

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

отражающая функция линейна и имеет вид $\bar{x} = F(t)x$, где матрица $F(t)$ выражается через фундаментальную матрицу $\Phi(t)$ системы (2) формулой $F(t) = \Phi(-t)\Phi^{-1}(t)$. Эта матрица называется *отражающей матрицей* и является решением следующей задачи Коши для линейного матричного дифференциального уравнения:

$$\frac{dF}{dt} + FP(t) + P(-t)F = 0, \quad F(0) = E, \tag{3}$$

где E – единичная матрица.

5. Если система (2) получена из системы $dy/dt = Q(t)y$, имеющей отражающую функцию $\bar{y} = F(t)y$, заменой переменных $x = S(t)y$, то отражающая функция системы (2) задаётся формулой $\bar{x} = S(-t)F(t)S^{-1}(t)x$.

1. Отражающая матрица и периодические решения линейных двумерных систем. Каждую линейную систему (2) с непрерывной матрицей коэффициентов можно записать в виде

$$\frac{dx}{dt} = P_{\rm ev}(t)x + P_{\rm od}(t)x, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{4}$$

где $P_{\rm ev}(t) = (P(t) + P(-t))/2$ и $P_{\rm od}(t) = (P(t) - P(-t))/2$ – соответственно чётная и нечётная непрерывные матрицы. Сделав в системе (4) замену переменных

$$y = x \exp\biggl(-\frac{1}{n}\int\limits_0^t \operatorname{tr} P_{\rm ev}(\tau)\, d\tau\biggr),$$

где tr – след матрицы, получим систему вида (4), у которой матрица чётной части $P_{\rm ev}(t)$ имеет тождественно нулевой след. Поэтому в дальнейшем, рассматривая двумерную систему (4), без нарушения общности считаем, что она имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} p_1(t) & p_2(t) \\ p_3(t) & -p_1(t) \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \alpha(t) & \beta(t) \\ \gamma(t) & \delta(t) \end{pmatrix} x, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^2, \tag{5}$$

здесь

$$P_{\rm ev}(t) := \begin{pmatrix} p_1(t) & p_2(t) \\ p_3(t) & -p_1(t) \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad P_{\rm od}(t) := \begin{pmatrix} \alpha(t) & \beta(t) \\ \gamma(t) & \delta(t) \end{pmatrix}$$

– чётная и нечётная непрерывные матрицы.

В дальнейшем мы будем рассматривать именно эту систему, если не оговорено противное.

Теорема 1. *Пусть в системе (5) при всех $t \in \mathbb{R}$ матрица $P_{\rm ev}(t)$ непрерывно дифференцируема, а матрица $P_{\rm od}(t)$ непрерывна. Пусть также выполнены следующие условия:*

1) при всех $t \in \mathbb{R}$ имеет место неравенство $-\det P_{\rm ev}(t) \equiv p_1^2(t) + p_2(t)p_3(t) > 0$;

2) функции

$$m(t) := \frac{-p_1(t)}{\sqrt{p_1^2(t) + p_2(t)p_3(t)}}, \quad n(t) := \frac{-p_2(t)}{\sqrt{p_1^2(t) + p_2(t)p_3(t)}}, \quad r(t) := \frac{-p_3(t)}{\sqrt{p_1^2(t) + p_2(t)p_3(t)}}$$

удовлетворяют соотношениям

$$\frac{dm}{dt} + n\gamma - \beta r = 0, \quad \frac{dn}{dt} + n(\delta - \alpha) + 2m\beta = 0, \quad \frac{dr}{dt} + r(\alpha - \delta) - 2m\gamma = 0. \tag{6}$$

Тогда отражающая матрица системы (5) задаётся формулой

$$F(t) = E \operatorname{ch} \varphi(t) + M(t) \operatorname{sh} \varphi(t),$$

где

$$M(t) = \begin{pmatrix} m(t) & n(t) \\ r(t) & -m(t) \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \varphi(t) = 2\int\limits_0^t \sqrt{p_1^2(\tau) + p_2(\tau)p_3(\tau)}\, d\tau.$$

Доказательство. Для того чтобы доказать теорему, достаточно проверить справедливость основного соотношения (3) для отражающей матрицы, дифференциальное уравнение в котором в нашем случае принимает вид

$$\frac{dF}{dt} + F(P_{\text{ev}} + P_{\text{od}}) + (P_{\text{ev}} - P_{\text{od}})F =$$

$$= \frac{d}{dt}(E\operatorname{ch}\varphi + M\operatorname{sh}\varphi) + (E\operatorname{ch}\varphi + M\operatorname{sh}\varphi)(P_{\text{ev}} + P_{\text{od}}) + (P_{\text{ev}} - P_{\text{od}})(E\operatorname{ch}\varphi + M\operatorname{sh}\varphi) =$$

$$= E\operatorname{sh}\varphi\frac{d\varphi}{dt} + \frac{dM}{dt}\operatorname{sh}\varphi + M\frac{d\varphi}{dt}\operatorname{ch}\varphi + 2P_{\text{ev}}\operatorname{ch}\varphi + (MP_{\text{ev}} + P_{\text{ev}}M)\operatorname{sh}\varphi + (MP_{\text{od}} - P_{\text{od}}M)\operatorname{sh}\varphi =$$

$$= \left(M\frac{d\varphi}{dt} + 2P_{\text{ev}}\right)\operatorname{ch}\varphi + \left(E\frac{d\varphi}{dt} + MP_{\text{ev}} + P_{\text{ev}}M\right)\operatorname{sh}\varphi + \left(\frac{dM}{dt} + MP_{\text{od}} - P_{\text{od}}M\right)\operatorname{sh}\varphi = 0.$$

Действительно, здесь каждое из выражений в скобках обращается в нуль. В этом легко убедиться, если учесть, что из условия 2 следует тождество

$$P_{\text{ev}} = -M\sqrt{p_1^2 + p_2p_3} = -\frac{1}{2}M\frac{d\varphi}{dt}.$$

Условие $F(0) = E$ очевидно выполнено. Теорема доказана.

Замечание 1. В соответствии с общим положением теории отражающей функции отображение Пуанкаре 2ω-периодической системы (5) на отрезке $[-\omega, \omega]$ задаётся формулой

$$F(-\omega, x) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\varphi(\omega) - m(\omega)\operatorname{sh}\varphi(\omega) & -n(\omega)\operatorname{sh}\varphi(\omega) \\ -r(\omega)\operatorname{sh}\varphi(\omega) & \operatorname{ch}\varphi(\omega) + m(\omega)\operatorname{sh}\varphi(\omega) \end{pmatrix} x.$$

Теорема 2. *Пусть в системе (5) при всех $t \in \mathbb{R}$ матрица $P_{\text{ev}}(t)$ непрерывно дифференцируема, а матрица $P_{\text{od}}(t)$ непрерывна. Пусть также выполнены следующие условия:*

1. При всех $t \in \mathbb{R}$ верно неравенство $-\det P_{\text{ev}}(t) \equiv p_1^2 + p_2(t)p_3(t) < 0$.

2. Функции

$$m(t) := \frac{-p_1(t)}{\sqrt{-p_1^2(t) - p_2(t)p_3(t)}}, \quad n(t) := \frac{-p_2(t)}{\sqrt{-p_1^2(t) - p_2(t)p_3(t)}}, \quad r(t) := \frac{-p_3(t)}{\sqrt{-p_1^2(t) - p_2(t)p_3(t)}}$$

удовлетворяют соотношениям (6).

Тогда отражающая матрица системы (5) задаётся формулой

$$F(t) = E\cos\varphi(t) + M(t)\sin\varphi(t),$$

где

$$M(t) = \begin{pmatrix} m(t) & n(t) \\ r(t) & -m(t) \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \varphi(t) = 2\int\limits_0^t \sqrt{-p_1^2(\tau) - p_2(\tau)p_3(\tau)}\, d\tau.$$

Доказательство. Сведём доказательство теоремы 2 к доказательству теоремы 1, воспользовавшись формулировкой последней. При этом мы будем считать, что в этой формулировке использованы обозначения φ_1, m_1, n_1, r_1 вместо φ, m, n, r соответственно. Тогда

$$\varphi_1(t) = 2\int\limits_0^t \sqrt{p_1^2(\tau) + p_2(\tau)p_3(\tau)}\, d\tau = 2i\int\limits_0^t \sqrt{-p_1^2(\tau) - p_2(\tau)p_3(\tau)}\, d\tau = -i\varphi(t),$$

$$m_1(t)=\frac{m(t)}{i},\quad n_1(t)=\frac{n(t)}{i},\quad r_1(t)=\frac{r(t)}{i},\quad i^2=-1.$$

Поэтому для отражающей матрицы рассматриваемой системы получим соотношение

$$F(t)=E\operatorname{ch}(i\varphi(t))+M(t)\frac{\operatorname{sh}(i\varphi(t))}{i}=E\cos\varphi(t)+M(t)\sin\varphi(t).$$

Отсюда и следует утверждение теоремы 2.

Провести доказательство можно также, непосредственно проверив соотношение (3).

Следствие 1. *Пусть для* 2ω*-периодической системы (5) выполнены все условия теоремы 2 и*

$$\int\limits_0^\omega \sqrt{-p_1^2(\tau)-p_2(\tau)p_3(\tau)}\,d\tau=\pi\frac{q}{p},$$

где $p,q\in\mathbb{N}$ *и* q/p *– несократимая дробь.*

Тогда все решения этой системы являются $2\omega p$*-периодическими.*

Доказательство. Так как функция $\varphi(t)$ из формулировки теоремы 2 является, согласно её определению, нечётной, то функция $\dot\varphi(t)$ чётная и в силу условий следствия 2ω-периодическая. Хорошо известно, что для всякой 2ω-периодической чётной функции $\dot\varphi(t)$ существуют 2ω-периодическая функция $\psi(t)$ и постоянная $c=\frac{1}{2\omega}\int_{-\omega}^{\omega}\dot\varphi(\tau)\,d\tau=\frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}\dot\varphi(\tau)\,d\tau,$ для которых $\int_0^t\dot\varphi(\tau)\,d\tau=ct+\psi(t).$

Поэтому функция

$$\cos\varphi(t)=\cos(ct+\psi(t))=\cos\biggl(t\frac{\pi}{\omega}\frac{q}{p}+\psi(t)\biggr)$$

является $2p\omega$-периодической. Отсюда следует, что отображение Пуанкаре $F(-\omega)x=Ex$ на отрезке $[-\omega p,\omega p]$ является тождественным. Следствие 1 доказано.

Следствие 2. *Пусть выполнены все условия теоремы 2. Тогда все решения* 2ω*-периодической системы (5) ограничены на* $\mathbb{R}$ *и она устойчива не асимптотически.*

Доказательство следует непосредственно из теоремы 1 [11, с. 81].

Замечание 2. Будем рассматривать три дифференциальных соотношения, которым должны удовлетворять функции $m(t)$, $n(t)$, $r(t)$ согласно второму условию теоремы 2, как систему дифференциальных уравнений для этих функций. Легко убедиться в том, что такая система имеет первый интеграл $m^2+rn=\mathrm{const}$, что согласуется с определяющими эти функции формулами, из которых следует, что $m^2+rn=1$. Это означает, что вместо трёх дифференциальных соотношений (6) достаточно требовать выполнения только следующих двух дифференциальных соотношений:

$$\frac{dn}{dt}+n(\delta-\alpha)+2\beta\sqrt{1-rn}=0,\quad \frac{dr}{dt}+r(\alpha-\delta)-2\gamma\sqrt{1-rn}=0.$$

В качестве примера рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt}=\begin{pmatrix}0 & k(t)\\ p^2(t)k(t) & 0\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}\alpha(t) & \beta(t)\\ \gamma(t) & \delta(t)\end{pmatrix}x, \tag{7}$$

где $k(t)$ – чётная непрерывная функция, $p(t)$ – чётная, принимающая только положительные значения, непрерывно дифференцируемая функция, а функции $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, $\delta(t)$ – непрерывные и нечётные.

Для рассматриваемой системы находим: $d\varphi(t)/dt=2\sqrt{p_1^2+p_3p_4}=2p(t)k(t),$

$$m(t)\equiv 0,\quad n(t)\equiv\frac{-p_2}{\dot\varphi}\equiv\frac{-k}{2pk}\equiv\frac{-1}{2p(t)},\quad r(t)\equiv\frac{-p_3}{\dot\varphi}\equiv-\frac{p(t)}{2};\quad M(t)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1/p(t)\\ p(t) & 0\end{pmatrix}.$$

Условия (6), как показывают вычисления, сводятся к следующим двум:

$$\gamma(t) = \beta(t)p^2(t) \quad \text{и} \quad \frac{dp(t)}{dt} = p(t)(\delta(t) - \alpha(t)). \tag{8}$$

Поэтому следствием теоремы 1 является

Следствие 3. *Пусть для системы (7) выполняются следующие условия:*

1) $p(t)$ – чётная дифференцируемая функция на $\mathbb{R}$, принимающая только положительные значения;

2) $k(t)$ – чётная непрерывная на $\mathbb{R}$ функция;

3) справедливы тождества (8).

Тогда отражающая матрица рассматриваемой системы задаётся формулой

$$F(t) = E \operatorname{ch} \varphi(t) + M(t) \operatorname{sh} \varphi(t),$$

где

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = 2\int\limits_0^t p(\tau)k(\tau)\,d\tau, \quad M(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1/p(t) \\ p(t) & 0 \end{pmatrix}.$$

В заключение сделаем следующее важное при практическом использовании полученных результатов

Замечание 3. Рассмотрим двумерную дифференциальную систему

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t)y + P(t,x,y), \quad \frac{dy}{dt} = c(t)x + d(t)y + Q(t,x,y), \tag{9}$$

где $P(t,x,y)$ и $Q(t,x,y)$ – ряды (или многочлены) по степеням x и y с зависящими от времени t коэффициентами.

Если

$$\begin{pmatrix} F_1(t,x,y) \\ F_2(t,x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t) & f_2(t) \\ f_3(t) & f_4(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

– отражающая функция системы линейного приближения

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t)y, \quad \frac{dy}{dt} = c(t)x + d(t)y,$$

то нередко эта отражающая функция является отражающей функцией и всей системы (9). Это происходит тогда и только тогда, когда выполняются соотношения

$$f_1(t)P(t,x,y) + f_2(t)Q(t,x,y) + P(-t, f_1(t)x + f_2(t)y, f_3(t)x + f_4(t)y) \equiv 0,$$

$$f_3(t)P(t,x,y) + f_4(t)Q(t,x,y) + Q(-t, f_1(t)x + f_2(t)y, f_3(t)x + f_4(t)y) \equiv 0.$$

Проверить эти соотношения при известных $f_k(t)$, $k = \overline{1,4}$, можно простыми, хотя и громоздкими при больших степенях у P и Q вычислениями. При этом для однородных по x, y многочленов $P_s(t,x,y)$, $Q_s(t,x,y)$ степени s, для которых

$$P(t,x,y) = \sum_{s=2}^{n} P_s(t,x,y), \quad Q(t,x,y) = \sum_{s=2}^{n} Q_s(t,x,y),$$

вычисления проводятся для каждого s отдельно.

2. Отражающая функция уравнения Риккати. Дифференциальное уравнение Риккати

$$\frac{dx}{dt} = a(t) + b(t)x + c(t)x^2 \tag{10}$$

с дифференцируемыми коэффициентами $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ запишем в виде

$$\frac{dx}{dt} = (a_{\mathrm{ev}}(t) + b_{\mathrm{ev}}(t)x + c_{\mathrm{ev}}(t)x^2) + (a_{\mathrm{od}}(t) + b_{\mathrm{od}}(t)x + c_{\mathrm{od}}(t)x^2),$$

где выражение в первых скобках представляет собой сумму чётных по t слагаемых, а выражение во вторых скобках – сумму нечётных по t слагаемых.

Теорема 3. *Пусть* $b_{\mathrm{ev}}^2(t) - 4a_{\mathrm{ev}}(t)c_{\mathrm{ev}}(t) > 0$ *при всех* $t \in \mathbb{R}$ *и функции*

$$r(t) := \frac{-2a_{\mathrm{ev}}}{\sqrt{b_{\mathrm{ev}}^2 - 4a_{\mathrm{ev}}c_{\mathrm{ev}}}}, \quad s(t) := \frac{2c_{\mathrm{ev}}}{\sqrt{b_{\mathrm{ev}}^2 - 4a_{\mathrm{ev}}c_{\mathrm{ev}}}}, \quad n(t) := \frac{-b_{\mathrm{ev}}}{\sqrt{b_{\mathrm{ev}}^2 - 4a_{\mathrm{ev}}c_{\mathrm{ev}}}}$$

удовлетворяют системе соотношений

$$\frac{dr}{dt} = b_{\mathrm{od}}(t)r - 2a_{\mathrm{od}}(t)n, \quad \frac{ds}{dt} = -b_{\mathrm{od}}(t)s - 2c_{\mathrm{od}}(t)n, \quad \frac{dn}{dt} = c_{\mathrm{od}}(t)r + a_{\mathrm{od}}(t)s. \tag{11}$$

Тогда отражающая функция уравнения (10) задаётся формулой

$$F(t,x) = \frac{(\operatorname{ch}\varphi(t) + n(t)\operatorname{sh}\varphi(t))x + r(t)\operatorname{sh}\varphi(t)}{xs(t)\operatorname{sh}\varphi(t) + \operatorname{ch}\varphi(t) - n(t)\operatorname{sh}\varphi(t)},$$

где $\varphi(t) := \int_0^t \sqrt{b_{\mathrm{ev}}^2 - 4a_{\mathrm{ev}}(\tau)c_{\mathrm{ev}}(\tau)}\,d\tau$.

Доказательство этой теоремы можно провести, проверив основное соотношение для отражающей функции из свойства 3.

Следствие 4. *При выполнении условий теоремы 3 продолжимое на отрезок* $[-\omega,\omega]$ *решение* $x(t;\omega,x(\omega))$ *уравнения (10) является решением краевой задачи*

$$G(x(\omega), x(-\omega)) = 0$$

тогда и только тогда, когда

$$G(x(\omega), F(\omega, x(\omega))) = 0.$$

Это утверждение следует из главного свойства $F(t,x(t)) \equiv x(-t)$ отражающей функции.

В случае $b_{\mathrm{ev}}^2(t) - 4a_{\mathrm{ev}}(t)c_{\mathrm{ev}}(t) < 0$ при всех $t \in \mathbb{R}$ имеем

$$\varphi(t) = i\int\limits_0^t \sqrt{4a_{\mathrm{ev}}c_{\mathrm{ev}} - b_{\mathrm{ev}}^2} =: \psi(t)i,$$

и отражающая функция уравнения (10) принимает вид

$$F(t,x) = \frac{(\cos\varphi(t) + n(t)\sin\varphi(t))x + r(t)\sin\varphi(t)}{xs(t)\sin\varphi(t) + \cos\varphi(t) - n(t)\sin\varphi(t)},$$

где

$$r(t) := \frac{-2a_{\mathrm{ev}}}{\sqrt{4a_{\mathrm{ev}}c_{\mathrm{ev}} - b_{\mathrm{ev}}^2}}, \quad s(t) := \frac{-2c_{\mathrm{ev}}}{\sqrt{4a_{\mathrm{ev}}c_{\mathrm{ev}} - b_{\mathrm{ev}}^2}}, \quad n(t) := \frac{-b_{\mathrm{ev}}}{\sqrt{4a_{\mathrm{ev}}c_{\mathrm{ev}} - b_{\mathrm{ev}}^2}}. \tag{12}$$

Если при этом коэффициенты уравнения (10) 2ω-периодичны, то

$$\int\limits_0^t \sqrt{4a_{\mathrm{ev}}c_{\mathrm{ev}} - b_{\mathrm{ev}}^2}\,d\tau = c_0 t + \theta(t),$$

где постоянная $c_0 = \omega^{-1}\int_0^\omega \sqrt{4a_{\mathrm{ev}}c_{\mathrm{ev}} - b_{\mathrm{ev}}^2}\,d\tau$, а $\theta(t)$ – 2ω-периодическая функция.

Отсюда приходим к следующей теореме.

Теорема 4. *Пусть все непрерывно дифференцируемые коэффициенты уравнения Риккати (10)* 2ω *-периодичны и* $4a_{\mathrm{ev}}(t)c_{\mathrm{ev}}(t)-b_{\mathrm{ev}}^2(t)<0$ *при всех* $t\in\mathbb{R}$. *Пусть также функции (12) удовлетворяют соотношениям (11).*

Тогда все продолжимые на отрезок $[-\omega,\omega]$ *решения уравнения (10) являются* $2\omega p$*-периодическими, если*

$$\int\limits_0^{\omega}\sqrt{4a_{\mathrm{ev}}c_{\mathrm{ev}}-b_{\mathrm{ev}}^2}\,d\tau=\pi\frac{q}{p},$$

где $p,q\in\mathbb{N}$ *и* q/p *– несократимая дробь.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мироненко В.И., Мироненко В.В.* Явное вычисление отображения Пуанкаре линейной периодической системы // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 2. С. 196–202.
2. *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1984.
3. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. М., 1985.
4. *Мироненко В.И.* Отражающая функция и классификация периодических дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20. № 9. С. 1635–1638.
5. *Мироненко В.И.* Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений. Минск, 1986.
6. *Мироненко В.И.* Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем. Гомель, 2004.
7. *Mironenko V.I., Mironenko V.V.* How to construct equivalent differential systems // Appl. Math. Let. 2009. V. 22. P. 1356–1359.
8. *Mironenko V.I., Mironenko V.V.* Time symmetries and in-period transformations // Appl. Math. Let. 2011. V. 24. P. 1721–1723.
9. *Мироненко В.И., Мироненко В.В.* The new method for the searching periodic solutions of periodic differential systems // J. of Appl. Anal. and Comp. 2016. V. 6. № 3. P. 876–883.
10. *Zhou Zhengxin.* The Theory of Reflecting Function of Differential Equations and Applications. Beijing, 2014.
11. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967.

Гомельский государственный университет
им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 09.04.2021 г.
После доработки 09.04.2021 г.
Принята к публикации 08.09.2021 г.