ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 10, с. 1346–1358

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925.51

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ В ЦЕЛОМ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕКОТОРОГО КЛАССА В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

© 2021 г. И. П. Рязанцева

В гильбертовом пространстве для дифференциальных уравнений третьего порядка, линейных относительно производных, с действительнозначными коэффициентами, являющимися функциями независимой переменной, и с нелинейным относительно искомой функции членом, задаваемым сильно монотонным оператором, удовлетворяющим условию Липшица, продемонстрирован метод установления достаточных условий асимптотической устойчивости в целом стационарных решений. Приведены неравенства, позволяющие оценить для указанных уравнений скорость сходимости их решений к стационарному решению.

DOI: 10.31857/S0374064121100071

1. Постановка задачи. Пусть H – вещественное гильбертово пространство, (u,v) – скалярное произведение элементов u и v из H, оператор $A: H\to H$ является, вообще говоря, нелинейным и обладает свойствами:

A – сильно монотонный на H оператор, т.е. справедливо неравенство

$$(Au-Av,u-v)\geqslant M\|u-v\|^2 \quad \text{для всех} \quad u,v\in H, \quad \text{где} \quad M=\mathrm{const}>0; \tag{1}$$

A удовлетворяет на H условию Липшица, т.е.

$$\|Au-Av\|\leqslant L\|u-v\| \quad \text{для всех} \quad u,v\in H, \quad \text{где} \quad L=\mathrm{const}>0. \tag{2}$$

Рассмотрим в пространстве H уравнение

$$Ax=f, \tag{3}$$

в котором f – фиксированный элемент из H. В силу предположений (1) и (2) уравнение (3) имеет единственное решение $x\in H$ при любом элементе $f\in H$ (см., например, [1, теорема 18.5; 2, теорема 1.7.5]). Кроме того, задача Коши

$$y'''(t)+\varphi_1(t)y''(t)+\varphi_2(t)y'(t)+\varphi_3(t)(Ay(t)-f)=0, \quad t\geqslant t_0\geqslant 0, \tag{4}$$

$$y(t_0)=y_0, \quad y'(t_0)=y_0', \quad y''(t_0)=y_0'' \tag{5}$$

однозначно разрешима при любых непрерывных при $t\geqslant t_0$ действительнозначных функциях $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\varphi_3(t)$ и любых элементах y_0, y_0', y_0'' из H (см. [3, § 33.4]).

Тождественно постоянная функция $y(t)=x\in H$ при всех $t\geqslant t_0$, где x – решение уравнения (3), является решением уравнения (4). Это решение называется *стационарным* решением (см. [4, § 1]) уравнения (4). Для приложений представляет интерес поведение решения $y(t)\neq$ $\neq \mathrm{const}$ задачи (4), (5) относительно стационарного решения уравнения (4). Если $H=\mathbb{R}$ и $Ay=ay$, $a=\mathrm{const}>0$, $f=0$, $\varphi_k(t)=\varphi_k=\mathrm{const}$, $k=\overline{1,3}$, то эта задача является линейной и легко решается с помощью критерия Рауса–Гурвица. В наших предположениях уравнение (4) на H в общем случае не является линейным.

Цель данной работы состоит в установлении условий на функции $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\varphi_3(t)$ и параметры M, L, при которых выполняется соотношение

$$\|y(t)-x\|\to 0 \quad \text{при} \quad t\to\infty$$

при любых начальных условиях (5), т.е., другими словами, нас интересуют достаточные условия асимптотической устойчивости в целом стационарного решения x уравнения (4). Решение поставленной задачи получим, используя методику, предложенную в работах [5, 6], для некоторого определяемого ниже класса функций $\varphi_k(t)$, $k=\overline{1,3}$. Для решения построим вспомогательное линейное дифференциальное неравенство третьего порядка относительно некоторой скалярной функции, для которого можно использовать критерий Рауса–Гурвица.

2. Вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть действительнозначная функция* $x(t)\in C^2[t_0,\infty)$ *удовлетворяет линейному дифференциальному неравенству второго порядка*

$$x''(t)+px'(t)+qx(t)\leqslant a(t),\quad t\geqslant t_0,\quad x(t_0)=x_0,\quad x'(t_0)=x_0',$$

где p *и* q *– действительные числа, а функция* $a(t)$, $t\geqslant t_0$, *непрерывна. Пусть также* k_1, k_2 *– корни уравнения*

$$k^2+pk+q=0.$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если k_1 *и* k_2 *– действительные различные числа, то верно неравенство*

$$x(t)\leqslant\frac{1}{k_2-k_1}\bigg((x_0k_2-x_0')\exp\{k_1(t-t_0)\}+(x_0'-k_1x_0)\exp\{k_2(t-t_0)\}+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t}a(s)[\exp\{k_2(t-s)\}-\exp\{k_1(t-s)\}]\,ds\bigg);\tag{6}$$

2) если $k_{1,2}=\alpha\pm i\beta$, α *и* β *– действительные числа, то выполняется оценка*

$$x(t)\leqslant\bigg(\frac{x_0'-\alpha x_0}{\beta}\sin(\beta(t-t_0))+x_0\cos(\beta(t-t_0))\bigg)\exp\{\alpha(t-t_0)\}+$$

$$+\frac{1}{\beta}\int\limits_{t_0}^{t}a(s)\exp\{\alpha(t-s)\}\sin(\beta(t-s))\,ds;\tag{7}$$

3) если $k_1=k_2=\alpha$, *то справедливо неравенство*

$$x(t)\leqslant(x_0(1+\alpha t_0)-t_0x_0')\exp\{\alpha(t-t_0)\}+(x_0'-\alpha x_0)t\exp\{\alpha(t-t_0)\}+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t}a(s)(t-s)\exp\{\alpha(t-s)\}\,ds.\tag{8}$$

Неравенство (6) установлено, например, в [7]. Оценки (7) и (8) можно получить, в частности, следующим образом. Для случаев 2), 3) решим задачу Коши

$$v''(t)+pv'(t)+qv(t)=a(t),\quad v(t_0)=x(t_0)=x_0,\quad v'(t_0)=x'(t_0)=x_0',$$

и на основании результатов [8, § 24.3] запишем неравенство $x(t)\leqslant v(t)$, что приведёт к оценкам (7) и (8).

Лемма 2. *Пусть действительнозначная функция* $x(t)\in C^3[t_0,\infty)$ *удовлетворяет линейному дифференциальному неравенству третьего порядка*

$$x'''(t)+px''(t)+qx'(t)+gx(t)\leqslant\eta(t),\quad t\geqslant t_0,\quad x(t_0)=x_0,\quad x'(t_0)=x_0',\quad x''(t_0)=x_0'',$$

где p, q *и* g *– действительные числа, а функция* $\eta(t)$, $t \geqslant t_0$, *непрерывна. Пусть также* k_1, k_2, k_3 *– корни уравнения*

$$k^3 + pk^2 + qk + g = 0.$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

i) если корни k_1, k_2, k_3 *– действительные попарно различные числа, то верна оценка*

$$x(t) \leqslant \frac{1}{k_2 - k_3}\Bigg(u_1 \exp\{k_2(t-t_0)\} + u_2 \exp\{k_3(t-t_0)\} +$$

$$+ u_0\left[\frac{1}{k_1 - k_2}(\exp\{k_1(t-t_0)\} - \exp\{k_2(t-t_0)\}) - \frac{1}{k_1 - k_3}(\exp\{k_1(t-t_0)\} - \exp\{k_3(t-t_0)\})\right] +$$

$$+ \frac{1}{k_1 - k_2}\int\limits_{t_0}^{t} \eta(\theta)(\exp\{k_1(t-\theta)\} - \exp\{k_2(t-\theta)\})d\theta -$$

$$- \frac{1}{k_1 - k_3}\int\limits_{t_0}^{t} \eta(\theta)(\exp\{k_1(t-\theta)\} - \exp\{k_3(t-\theta)\})d\theta\Bigg),$$

где $u_0 = x_0'' - (k_2 + k_3)x_0' + k_2k_3x_0$, $u_1 = x_0' - k_3x_0$, $u_2 = k_2x_0 - x_0'$;

ii) если k_1 *– действительное число, а* $k_{2,3} = \alpha \pm i\beta$ *– комплексные взаимно сопряжённые числа, то имеет место неравенство*

$$x(t) \leqslant [x_0 \cos(\beta(t-t_0)) + u_3 \sin(\beta(t-t_0))] \exp\{\alpha(t-t_0)\} +$$

$$+ \frac{u_0}{\beta(\bar{k}^2 + \beta^2)}[\beta \exp\{k_1(t-t_0)\} - \exp\{\alpha(t-t_0)\}(\beta \cos(\beta(t-t_0)) + \bar{k} \sin(\beta(t-t_0)))] +$$

$$+ \frac{1}{\bar{k}^2 + \beta^2}\Bigg[\exp(k_1 t)\int\limits_{t_0}^{t} \eta(\xi) \exp(-k_1\xi)\, d\xi -$$

$$- \exp(\alpha t)\int\limits_{t_0}^{t} \eta(\xi) \exp(-\alpha\xi)\bigg(\cos(\beta(t-\xi)) - \frac{\bar{k}}{\beta}\sin(\beta(t-\xi))\bigg)\, d\xi\Bigg],$$

где $u_0 = x_0'' - 2\alpha x_0' + (\alpha^2 + \beta^2)x_0$, $\bar{k} = k_1 - \alpha$, $u_3 = (x_0' - \alpha x_0)/\beta$;

iii) если $k_1 = k_2 = k$, $k_3 \neq k$, *то выполнена оценка*

$$x(t) \leqslant w_1 \exp\{k(t-t_0)\} + w_2 t \exp\{k(t-t_0)\} -$$

$$- \frac{u_0}{k_3 - k}\left[(t-t_0)\exp\{k(t-t_0)\} - \frac{1}{k_3 - k}(\exp\{k_3(t-t_0)\} - \exp\{k(t-t_0)\})\right] +$$

$$+ \frac{1}{k_3 - k}\int\limits_{t_0}^{t} \eta(\xi)\left[(\xi - t)\exp\{k(t-\xi)\} + \frac{1}{k_3 - k}(\exp\{k_3(t-\xi)\} - \exp\{k(t-\xi)\})\right] d\xi,$$

здесь $w_1 = x_0(1 + kt_0) - t_0x_0'$, $w_2 = x_0' - kx_0$, $u_0 = x_0'' - 2kx_0' + k^2x_0$;

iv) если $k_1 = k_2 = k_3 = k$, *то верно неравенство*

$$x(t) \leqslant (v_1 + v_2 t + v_3 t^2)\exp\{k(t-t_0)\} + \frac{\exp(kt)}{2}\int\limits_{t_0}^{t} (s-t)^2 \eta(s) \exp(-ks)\, ds,$$

где $v_1 = (1 + t_0 k + t_0^2 k^2/2)x_0 - t_0(1 + t_0 k)x_0' + t_0^2 x_0''/2$, $v_2 = -k(1 + t_0 k)x_0 + (1 + 2kt_0)x_0' - t_0 x_0''$, $v_3 = (k^2 x_0 - 2kx_0' + x_0'')/2$.

3. Основной результат. Пусть $\varphi_k(t)$, $k = \overline{1,3}$, – действительнозначные положительные четырежды непрерывно дифференцируемые убывающие и выпуклые вниз функции, $t \geqslant t_0 \geqslant \geqslant 0$. Тогда имеют место неравенства (см. [9, гл. 2, § 10])

$$\varphi_k(t) - \varphi_k(\tau) \leqslant \varphi_k'(t)(t - \tau), \quad t \leqslant \tau, \quad k = \overline{1,3}. \tag{9}$$

Кроме того, считаем, что

$$\lim_{t\to\infty} \varphi_k(t) = \varphi_k^0 > 0, \quad k = \overline{1,3}. \tag{10}$$

При исследовании поведения решения задачи (4), (5) при $t \to \infty$ важную роль играет ограниченность норм производных $y^{(k)}(t)$ $(k = \overline{0,2})$. Приведём достаточное условие, при котором эти свойства для решения $y(t)$ уравнения (4) выполняются (см. [5]).

Пусть существует положительное число R_0 такое, что при всех достаточно больших t справедливо неравенство

$$\varphi_1(t)\|y''(t)\|^2 - (y(t) + y''(t), y'(t)) + \varphi_2(t)(y'(t), y''(t)) +$$

$$+ \varphi_3(t)(Ay(t) - f, y''(t)) \geqslant 0, \quad \text{если} \quad \|y(t)\|^2 + \|y'(t)\|^2 + \|y''(t)\|^2 \geqslant R_0 > 0, \tag{11}$$

тогда найдётся постоянная $r_0 > 0$, для которой

$$\|y^{(k)}(t)\| \leqslant r_0, \quad k = \overline{0,2}, \quad t \geqslant t_0. \tag{12}$$

Далее считаем условие (11) выполненым.

Обратимся к задаче (4), (5) и определим скалярную функцию

$$r(t) = \frac{\|y(t) - x\|^2}{2};$$

несложно видеть, что справедливы тождества

$$r'(t) = (y'(t), y(t) - x), \quad r''(t) = \|y'(t)\|^2 + (y''(t), y(t) - x),$$

$$r'''(t) = (y'''(t), y(t) - x) + 3(y''(t), y'(t)).$$

Здесь и всюду далее x – стационарное решение уравнения (4).

Умножив равенство (4) скалярно на $y(t) - x$ и воспользовавшись свойством (1) оператора A, получим неравенство

$$r'''(t) + \varphi_1(t)r''(t) + \varphi_2(t)r'(t) + 2M\varphi_3(t)r(t) \leqslant \varphi_1(t)\|y'(t)\|^2 + 3\|y''(t)\|\|y'(t)\|. \tag{13}$$

Построим следующие вспомогательные функции:

$$\rho(t) = \frac{\|y'(t)\|^2}{2}, \quad R(t) = \frac{\|y''(t)\|^2}{2},$$

для них очевидны тождества

$$\rho'(t) = (y''(t), y'(t)), \quad \rho''(t) = (y'''(t), y'(t)) + \|y''(t)\|^2, \tag{14}$$

$$R'(t) = (y'''(t), y''(t)). \tag{15}$$

Используя числовое неравенство $ab \leqslant a^2/2 + b^2/2$ и определения функций $\rho(t)$ и $R(t)$, от неравенства (13) приходим к неравенству

$$r'''(t) + \varphi_1(t)r''(t) + \varphi_2(t)r'(t) + 2M\varphi_3(t)r(t) \leqslant (2\varphi_1(t) + 3)\rho(t) + 3R(t) \equiv F(t). \tag{16}$$

Найдём оценки сверху функций $\rho(t)$ и $R(t)$. Умножив равенство (4) скалярно на $y'(t)$, будем иметь

$$(y'''(t), y'(t)) + \varphi_1(t)(y''(t), y'(t)) + \varphi_2(t)\|y'(t)\|^2 = -\varphi_3(t)(Ay(t) - Ax, y'(t)). \tag{17}$$

С учётом определения функции $\rho(t)$, тождеств (14) и свойства (2) оператора A от неравенства (17) придём к неравенству

$$\rho''(t) + \varphi_1(t)\rho'(t) + 2\varphi_2(t)\rho(t) \leqslant \|y''(t)\|^2 + L\varphi_3(t)\|y(t) - x\|\|y'(t)\|. \tag{18}$$

Последнее слагаемое в правой части неравенства (18), воспользовавшись указанным выше числовым неравенством и определением функций $r(t)$ и $\rho(t)$, оценим следующим образом:

$$L\varphi_3(t)\|y(t) - x\|\|y'(t)\| \leqslant L\varphi_3(t)(r(t) + \rho(t)). \tag{19}$$

Значит, от неравенства (18) приходим к неравенству

$$\rho''(t) + \varphi_1(t)\rho'(t) + (2\varphi_2(t) - L\varphi_3(t))\rho(t) \leqslant 2R(t) + L\varphi_3(t)r(t).$$

Применяя в последнем неравенстве метод замороженных коэффициентов и учитывая свойства функций $\varphi_k(t)$, получаем, что

$$\rho''(t) + \varphi_1(\tau)\rho'(t) + (2\varphi_2(\tau) - L\varphi_3(\tau))\rho(t) \leqslant 2R(t) + L\varphi_3(t)r(t) +$$
$$+ (\varphi_1(\tau) - \varphi_1(t))\rho'(t) + L(\varphi_3(t) - \varphi_3(\tau))\rho(t), \quad t \leqslant \tau.$$

Отсюда, принимая во внимание оценки (9) и (12), выводим неравенство

$$\rho''(t) + \varphi_1(\tau)\rho'(t) + (2\varphi_2(\tau) - L\varphi_3(\tau))\rho(t) \leqslant 2R(t) + L\varphi_3(t)r(t) + c_1 g_2(t, \tau), \tag{20}$$

в котором $g_2(t, \tau) \equiv (t - \tau)(\varphi_1'(t) + \varphi_3'(t))$, $t \leqslant \tau$. Здесь и далее через c_k, $k \in \mathbb{N}$, обозначаем положительные постоянные.

Умножив равенство (4) скалярно на $y''(t)$, после простых преобразований получим неравенство

$$(y'''(t), y''(t)) + \varphi_1(t)\|y''(t)\|^2 \leqslant \varphi_2(t)\|y'(t)\|\|y''(t)\| + \varphi_3(t)\|Ay(t) - Ax\|\|y''(t)\|.$$

С учётом определения функции $R(t)$ и тождества (15), используя оценку типа (19) для слагаемых в правой части последнего неравенства, будем иметь

$$R'(t) + 2\varphi_1(t)R(t) \leqslant \varphi_2(t)(\rho(t) + R(t)) + L\varphi_3(t)(r(t) + R(t)),$$

или

$$R'(t) + (2\varphi_1(t) - \varphi_2(t) - L\varphi_3(t))R(t) \leqslant \varphi_2(t)\rho(t) + L\varphi_3(t)r(t). \tag{21}$$

Пусть

$$m_1(t) \equiv 2\varphi_1(t) - \varphi_2(t) - L\varphi_3(t) \geqslant m_0 = \text{const} > 1 \quad \text{для всех} \quad t \geqslant t_0, \tag{22}$$

тогда из неравенства (21) вытекает, что

$$R'(t) + m_0 R(t) \leqslant \varphi_2(t)\rho(t) + L\varphi_3(t)r(t),$$

и лемма 1 из [9, гл. 2, § 10] приводит к оценке

$$R(t) \leqslant R(t_0)\exp\{-m_0(t - t_0)\} + \int\limits_{t_0}^{t} (\varphi_2(\xi)\rho(\xi) + L\varphi_3(\xi)r(\xi))\exp\{-m_0(t - \xi)\}\, d\xi.$$

Применив к её интегральному слагаемому правило Лопиталя, будем иметь

$$R(t) \leqslant R(t_0)\exp\{-m_0(t-t_0)\} + \frac{\bar{\alpha}}{m_0}(\varphi_2(t)\rho(t) + L\varphi_3(t)r(t)), \quad \bar{\alpha} > 1, \quad t \geqslant t_0. \tag{23}$$

При этом считаем, что $\bar{\gamma} = 1 - \bar{\alpha}/m_0 > 0$. Значит, верны неравенства

$$1 < \bar{\alpha} < m_0, \quad 0 < \bar{\gamma} < 1. \tag{24}$$

Учитывая в неравенстве (20) оценки (23), (9), (12) и предположение (22), приходим к неравенству

$$\rho''(t) + \varphi_1(\tau)\rho'(t) + (2(1-\bar{\alpha}/m_0)\varphi_2(\tau) - L\varphi_3(\tau))\rho(t) \leqslant$$
$$\leqslant L(1+2\bar{\alpha}/m_0)\varphi_3(t)r(t) + c_2(\exp(-m_0t) + g(t,\tau)), \tag{25}$$

в котором

$$g(t,\tau) \equiv (t-\tau)\sum_{k=1}^{3}\varphi_k'(t), \quad t \leqslant \tau. \tag{26}$$

Для упрощения записи введём обозначение

$$m_2(t) \equiv 2\bar{\gamma}\varphi_2(t) - L\varphi_3(t) \tag{27}$$

и запишем неравенство (25) в следующем виде:

$$\rho''(t) + \varphi_1(\tau)\rho'(t) + m_2(\tau)\rho(t) \leqslant$$
$$\leqslant \gamma_0 L\varphi_3(t)r(t) + c_2(\exp(-m_0t) + g(t,\tau)) \equiv G(t,\tau), \quad \gamma_0 = 1 + 2\bar{\alpha}/m_0. \tag{28}$$

В силу предположения (10) у функций $m_1(t)$ и $m_2(t)$ существуют пределы при $t \to \infty$. На основании неравенства (22) заключаем, что

$$\lim_{t\to\infty} m_1(t) = 2\varphi_1^0 - \varphi_2^0 - L\varphi_3^0 \equiv m_1^0 > 1. \tag{29}$$

Предел функции $m_2(t)$ при $t \to \infty$ считаем положительным, т.е.

$$\lim_{t\to\infty} m_2(t) = 2\bar{\gamma}\varphi_2^0 - L\varphi_3^0 \equiv m_2^0 > 0, \quad \bar{\gamma} = 1 - \bar{\alpha}/m_0, \quad 0 < \bar{\gamma} < 1. \tag{30}$$

Для однородного дифференциального уравнения

$$\rho''(t) + \varphi_1(\tau)\rho'(t) + m_2(\tau)\rho(t) = 0,$$

определяемого левой частью неравенства (28), характеристическое уравнение имеет вид

$$k^2 + \varphi_1(\tau)k + m_2(\tau) = 0. \tag{31}$$

Так как в силу (27) корни уравнения (31) выражаются через функции $\varphi_k(\tau)$ при $k = \overline{1,3}$, которые положительны и непрерывны при $\tau \geqslant t_0$, а также убывают и имеют конечные пределы при $\tau \to \infty$, то модули указанных корней непрерывны и ограничены при $\tau \geqslant t_0$. Кроме того, учитывая соотношение (30), будем считать, что $m_2(\tau) > 0$ при $\tau \geqslant t_0$.

Установим оценки сверху для функции $\rho(t)$ на основании неравенства (28). Прежде всего отметим, что корни уравнения (31) имеют отрицательные действительные части. Пусть $-\mu(\tau)$ – максимальная действительная часть корней уравнения.

Предположим, что

$$|(\varphi_1^0)^2/4 - m_2^0| = D^0 \neq 0. \tag{32}$$

Значит, дискриминант $D(\tau)$ квадратного уравнения (31) не равен нулю при достаточно больших τ, а корни этого уравнения различны и имеют отрицательные действительные части. Тогда в силу (6) и (7) верна оценка

$$\rho(t) \leqslant c_3 \exp(-\mu(\tau)t) + \tilde{\psi}(\tau) \int\limits_{t_0}^{t} G(s,\tau) \exp\{-\mu(\tau)(t-s)\}\, ds, \tag{33}$$

в которой

$$\tilde{\psi}(\tau) \equiv \begin{cases} 1/(2\sqrt{D(\tau)}), & \text{если} \quad D(\tau) > 0, \\ 1/\sqrt{|D(\tau)|}, & \text{если} \quad D(\tau) < 0, \end{cases}$$

а функция $G(t,\tau)$ определена в (28).

Пусть

$$\tilde{\psi}(\tau)/\mu(\tau) \leqslant \psi^0 \quad \text{для всех} \quad \tau \geqslant t_0. \tag{34}$$

Применив к интегралу в (33) правило Лопиталя по переменной t, получим, что при достаточно больших t справедлива следующая оценка:

$$\rho(t) \leqslant c_3 \exp(-\mu(\tau)t) + \alpha\psi^0 G(t,\tau), \quad \alpha > 1, \quad t \leqslant \tau.$$

Отсюда с учётом определения функции $G(t,\tau)$ (см. (28)) приходим к неравенству

$$\rho(t) \leqslant c_4 \Phi(t,\tau) + \alpha\gamma_0\psi^0 L\varphi_3(t) r(t), \tag{35}$$

здесь

$$\Phi(t,\tau) \equiv \exp(-\mu(\tau)t) + \exp(-m_0 t) + g(t,\tau), \tag{36}$$

функция $g(t,\tau)$ определена равенством (26). Теперь, приняв во внимание в оценке (23) неравенство (35), получаем

$$R(t) \leqslant c_5 \Phi(t,\tau) + \frac{\bar{\alpha}}{m_0} L\varphi_3(t)(\alpha\gamma_0\psi^0\varphi_2(t) + 1) r(t). \tag{37}$$

Далее, используя неравенства (35) и (37), построим оценку сверху для функции $F(t)$, определённой в (16):

$$F(t) \leqslant c_6 \Phi(t,\tau) + \frac{\bar{\alpha} L\varphi_3(t)}{m_0} \Psi(t) r(t), \quad t \leqslant \tau,$$

где

$$\Psi(t) \equiv \gamma_0\psi^0(2m_0\varphi_1(t) + 3\alpha\varphi_2(t) + 3m_0) + 3. \tag{38}$$

Таким образом, от неравенства (16) приходим к следующему дифференциальному неравенству третьего порядка:

$$r'''(t) + \varphi_1(t) r''(t) + \varphi_2(t) r'(t) + W(t) r(t) \leqslant c_6 \Phi(t,\tau),$$

в котором

$$W(t) \equiv \varphi_3(t)\left(2M - \frac{\bar{\alpha} L}{m_0}\Psi(t)\right), \quad 1 < \bar{\alpha} < m_0, \quad t \leqslant \tau. \tag{39}$$

Применив в левой части последнего неравенства метод замороженных коэффициентов, придём к неравенству

$$r'''(t) + \varphi_1(\tau) r''(t) + \varphi_2(\tau) r'(t) + W(\tau) r(t) \leqslant c_7 \Phi(t,\tau), \quad t \leqslant \tau, \tag{40}$$

с некоторыми начальными условиями

$$r(t_0) = \|y_0 - x\|^2/2, \quad r'(t_0) = (y_0', y_0 - x), \quad r''(t_0) = \|y_0'\|^2 + (y_0'', y_0 - x). \tag{41}$$

Теперь для скалярной функции $r(t)$, удовлетворяющей неравенству (40) и начальным условиям (41), найдём оценку сверху, зависящую от t и τ $(t \leqslant \tau)$. Используя лемму 2, установим оценку сверху для решения $r(t)$ задачи (40), (41) в зависимости от корней характеристического уравнения

$$k^3 + \varphi_1(\tau)k^2 + \varphi_2(\tau)k + W(\tau) = 0. \tag{42}$$

Так как нас интересуют условия, при которых $r(t) = \|y(t) - x\|^2/2 \to 0$ при $t \to \infty$, то корни уравнения (42) должны иметь отрицательную действительную часть. Согласно критерию Рауса–Гурвица для этого необходимо и достаточно выполнения неравенств

$$\varphi_1(\tau) > 0, \quad \varphi_1(\tau)\varphi_2(\tau) - W(\tau) > 0, \quad W(\tau) > 0 \quad \text{для всех} \quad \tau \geqslant t_0. \tag{43}$$

Далее считаем, что неравенства (43) выполнены.

В наших предположениях коэффициенты уравнения (42) непрерывны, положительны и имеют конечные пределы при $\tau \to \infty$ (см. (10), (38), (39)). Значит, корни уравнения (42) ограничены в совокупности при $\tau \geqslant t_0$.

Для упрощения записи введём некоторые обозначения. Пусть функция $h(t)$ дифференцируема достаточное число раз при $t \geqslant t_0$. Построим функции $G_k(h(t))$ по следующему рекуррентному правилу:

$$G_1(h(t)) = (h(t)t)', \quad G_k(h(t)) = (h(t)t)'G_{k-1}(h(t)) + G'_{k-1}(h(t)), \quad k \geqslant 2. \tag{44}$$

Далее через $-\lambda(\tau)$ будем обозначать максимальную действительную часть корней уравнения (42). Заметим, что $\lambda(\tau) > 0$ при всех $\tau \geqslant t_0$ в силу (43).

а) Сначала предположим, что корни уравнения (42) попарно различные. Тогда вследствие леммы 2 для решения $r(t)$ задачи (40), (41) имеем оценку

$$r(t) \leqslant c_8 \bigg\{ \exp(-\lambda(\tau)t) + \int\limits_{t_0}^{t} \Phi(s,\tau) \exp(-\lambda(\tau)(t-s))\,ds \bigg\}, \quad t \leqslant \tau. \tag{45}$$

Полагая в этой оценке $t = \tau$ и учитывая определение (36) функции $\Phi(t,\tau)$, получаем следующие соотношения:

$$r(\tau) \leqslant c_8 \bigg\{ \exp(-\lambda(\tau)\tau) + \int\limits_{t_0}^{\tau} \Phi(s,\tau) \exp(-\lambda(\tau)(\tau-s))\,ds \bigg\} = c_8 \bigg\{ \exp(-\lambda(\tau)\tau) +$$

$$+ \frac{1}{\exp(\lambda(\tau)\tau)} \bigg[\int\limits_{t_0}^{\tau} \exp(-\mu(\tau)s) \exp(\lambda(\tau)s)\,ds + \int\limits_{t_0}^{\tau} \exp(-m_0 s) \exp(\lambda(\tau)s)\,ds +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{\tau} (s-\tau) \sum_{j=1}^{3} \varphi'_j(s) \exp(\lambda(\tau)s)\,ds \bigg] \bigg\}. \tag{46}$$

Предположим, что выполняются условия

$$\lim_{\tau\to\infty} \tau\lambda(\tau) = \infty, \tag{47}$$

$$\lambda'(\tau) \leqslant 0, \quad \tau \geqslant t_0, \tag{48}$$

тогда первое слагаемое, стоящее в фигурных скобках в (46), является бесконечно малой величиной при $\tau \to \infty$. Применение правила Лопиталя при $\tau \to \infty$ приводит к эквивалентности

$$\frac{1}{\exp(\lambda(\tau)\tau)} \int\limits_{t_0}^{\tau} \exp(-m_0 s) \exp(\lambda(\tau)s)\,ds \sim$$

$$\sim \frac{\exp(-m_0\tau)}{G_1(\lambda(\tau))} + \frac{\lambda'(\tau)}{\exp(\lambda(\tau)\tau)G_1(\lambda(\tau))}\int\limits_{t_0}^{\tau} s\exp(-m_0 s)\exp(\lambda(\tau)s)\,ds. \tag{49}$$

Предположим, что неравенства

$$G_k(\lambda(\tau)) > 0 \quad \text{для всех} \quad \tau \geqslant t_0, \quad k=\overline{1,k_0}, \tag{50}$$

имеют место при $k_0=2$. Тогда из эквивалентности (49) с учётом условия (48) следует, что третье слагаемое, стоящее в фигурных скобках в (46), сходится к нулю при $\tau\to\infty$, если выполнено соотношение

$$\lim_{\tau\to\infty}\frac{\exp(-m_0\tau)}{G_1(\lambda(\tau))}=0, \tag{51}$$

постоянная m_0 в котором удовлетворяет оценке (22).

Далее рассмотрим последнее слагаемое в оценке (46). Применив дважды правило Лопиталя и отбросив отрицательные слагаемые, с учётом определения (44) и неравенств (50) при $k_0=2$ запишем цепочку соотношений:

$$\frac{1}{\exp(\lambda(\tau)\tau)}\int\limits_{t_0}^{\tau}(s-\tau)\sum_{j=1}^{3}\varphi_j'(s)\exp(\lambda(\tau)s)\,ds \sim -\frac{1}{\exp(\lambda(\tau)\tau)G_1(\lambda(\tau))}\int\limits_{t_0}^{\tau}\sum_{j=1}^{3}\varphi_j'(s)\exp(\lambda(\tau)s)\,ds +$$

$$+\frac{\lambda'(\tau)}{\exp(\lambda(\tau)\tau)G_1(\lambda(\tau))}\int\limits_{t_0}^{\tau}(s-\tau)\sum_{j=1}^{3}\varphi_j'(s)\exp(\lambda(\tau)s)s\,ds \leqslant$$

$$\leqslant -\frac{1}{\exp(\lambda(\tau)\tau)G_1(\lambda(\tau))}\int\limits_{t_0}^{\tau}\sum_{j=1}^{3}\varphi_j'(s)\exp(\lambda(\tau)s)\,ds \sim$$

$$\sim -\frac{1}{\exp(\lambda(\tau)\tau)G_2(\lambda(\tau))}\left(\sum_{j=1}^{3}\varphi_j'(\tau)\exp(\lambda(\tau)\tau)+\lambda'(\tau)\int\limits_{t_0}^{\tau}\sum_{j=1}^{3}\varphi_j'(\tau)\exp(\lambda(\tau)s)s\,ds\right)\leqslant$$

$$\leqslant -\frac{1}{G_2(\lambda(\tau))}\sum_{j=1}^{3}\varphi_j'(\tau).$$

Следовательно, последнее слагаемое в (46) стремится к нулю при $\tau\to\infty$, если

$$\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{G_2(\lambda(\tau))}\sum_{j=1}^{3}\varphi_j'(\tau)=0. \tag{52}$$

Теперь предположим, что имеет место равенство

$$\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\exp(\lambda(\tau)\tau)}\int\limits_{t_0}^{\tau}\exp(\varphi_\lambda(\tau)s)\,ds=0, \quad \varphi_\lambda(\tau)=-\mu(\tau)+\lambda(\tau), \tag{53}$$

где $-\mu(\tau)$ – максимальная из действительных частей корней уравнения (31).

Таким образом, при попарно различных корнях уравнения (42) в предположениях (47), (48), (50) при $k_0=2$, (51)–(53) установлено, что решение $r(\tau)$ уравнения (40) стремится к нулю при $\tau\to\infty$.

б) Пусть теперь все корни уравнения (42) действительные, причём $k_1(\tau)=k_2(\tau)=\bar k(\tau)$, $k_3(\tau)\neq\bar k(\tau)$, и неравенства (50) верны при $k_0=3$. Отметим, что в силу предположений (43) справедливы неравенства $k_i(\tau) < 0,\ \ i = \overline{1,3}.$ В данном случае величина $\lambda(\tau) > 0$ определяется равенством $-\lambda(\tau) = \max\{\bar{k}(\tau),\ \ k_3(\tau)\}.$

Если $-\lambda(\tau) = k_3(\tau),$ то оценка (45) и вытекающие из неё соотношения сохраняются.

Пусть $-\lambda(\tau) = \bar{k}(\tau),$ тогда, используя оценку из утверждения iii) леммы 2, приходим к следующей оценке решения $r(t)$ задачи (40), (41):

$$r(t) \leqslant c_9\biggl\{t\exp(-\lambda(\tau)t) + \int\limits_{t_0}^{t}\Phi(s,\tau)(t-s)\exp(-\lambda(\tau)(t-s))\,ds\biggr\},\quad t \leqslant \tau, \tag{54}$$

где функция $\Phi(t,\tau)$ определена равенством (36). Полагая в (54) $t=\tau,$ аналогично (46) получаем оценку

$$r(\tau) \leqslant c_9\biggl\{\tau\exp(-\lambda(\tau)\tau) + \frac{1}{\exp(\lambda(\tau)\tau)}\biggl[\int\limits_{t_0}^{\tau}(\tau-s)\exp(\varphi_\lambda(\tau)s)\,ds +$$

$$+\int\limits_{t_0}^{\tau}(\tau-s)\exp(-m_0 s)\exp(\lambda(\tau)s)\,ds - \int\limits_{t_0}^{\tau}(\tau-s)^2\sum_{j=1}^{3}\varphi_j'(s)\exp(\lambda(\tau)s)\,ds\biggr]\biggr\}. \tag{55}$$

Вследствие предельного равенства (47) и неубывания функции $\lambda(\tau)\tau$ при $\tau \geqslant t_0$ (см. неравенство (50) при $k=1$) с помощью правила Лопиталя заключаем, что первое слагаемое в правой части оценки (55) стремится к нулю при выполнении условия

$$\lim_{\tau\to\infty}\frac{\exp(-\lambda(\tau)\tau)}{G_1(\lambda(\tau))} = 0. \tag{56}$$

Учитывая неравенство (50) при $k=1$ и применяя в правой части оценки (55) правило Лопиталя для третьего слагаемого дважды, а для четвёртого слагаемого трижды и отбрасывая при этом отрицательные члены, устанавливаем сходимость этих слагаемых к нулю при выполнении соответственно следующих предельных равенств:

$$\lim_{\tau\to\infty}\frac{\exp(-m_0\tau)}{G_2(\lambda(\tau))} = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{G_3(\lambda(\tau))}\sum_{j=1}^{3}\varphi_j'(\tau) = 0. \tag{57}$$

Предположим, что

$$\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\exp(\lambda(\tau)\tau)}\int\limits_{t_0}^{\tau}(\tau-s)\exp(\varphi_\lambda(\tau)s)\,ds = 0,\quad \varphi_\lambda(\tau) = -\mu(\tau)+\lambda(\tau), \tag{58}$$

тогда и второе слагаемое в правой части оценки (55) стремится к нулю при $\tau\to\infty.$

Таким образом, если у уравнения (42) ровно два различных корня, то решение $r(\tau)$ уравнения (40) стремится к нулю при $\tau\to\infty$ при выполнении условий (56)–(58) и (50) при $k_0 = 3.$

в) Пусть уравнение (42) имеет корень $k = -\lambda(\tau) < 0$ кратности три. В этом случае лемма 2 обеспечивает следующую оценку для решения задачи (40), (42):

$$r(\tau) \leqslant c_{10}\biggl\{\tau^2\exp(-\lambda(\tau)\tau) + \frac{1}{\exp(\lambda(\tau)\tau)}\int\limits_{t_0}^{\tau}(\tau-s)^2\Phi(s,\tau)\exp(\lambda(\tau)s)\,ds\biggr\}. \tag{59}$$

Считаем, что неравенства (50) выполнены при $k_0 = 4.$ Применение дважды правила Лопиталя при $\tau\to\infty$ приводит к эквивалентности

$$\frac{\tau^2}{\exp(\lambda(\tau)\tau)} \sim \frac{2}{\exp(\lambda(\tau)\tau)G_2(\lambda(\tau))}.$$

Значит, первое слагаемое в правой части оценки (59) стремится к нулю при $\tau \to \infty$, если

$$\lim_{\tau\to\infty} \frac{\exp(-\lambda(\tau)\tau)}{G_2(\lambda(\tau))} = 0. \tag{60}$$

Далее, используя правило Лопиталя, заключаем, что

$$\exp(-\lambda(\tau)\tau) \int\limits_{t_0}^{\tau} (\tau - s)^2 \exp(-m_0 s) \exp(\lambda(\tau)s)\, ds \to 0$$

при $\tau \to \infty$, если выполняется соотношение

$$\lim_{\tau\to\infty} \frac{\exp(-m_0\tau)}{G_3(\lambda(\tau))} = 0. \tag{61}$$

Пусть

$$\lim_{\tau\to\infty} \exp(-\lambda(\tau)\tau) \int\limits_{t_0}^{\tau} (\tau - s)^2 \exp(\varphi_\lambda(\tau)s)\, ds = 0. \tag{62}$$

Применяя четырежды правило Лопиталя и отбрасывая отрицательные слагаемые, приходим к неравенству

$$-\exp(-\lambda(\tau)\tau) \int\limits_{t_0}^{\tau} (\tau - s)^3 \sum_{j=1}^{3} \varphi_j'(s) \exp(\lambda(\tau)s)\, ds \leqslant -\frac{6}{G_4(\lambda(\tau))} \sum_{j=1}^{3} \varphi_j'(\tau).$$

Следовательно, при выполнении условий (60)–(62) и предельного равенства

$$\lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{G_4(\lambda(\tau))} \sum_{j=1}^{3} \varphi_j'(\tau) = 0 \tag{63}$$

решение $r(\tau)$ уравнения (40) стремится к нулю при $\tau \to \infty$ и в условиях п. в).

Подведём итог проведённым рассуждениям, сформулировав доказанное утверждение.

Теорема. *Пусть H – вещественное гильбертово пространство, оператор $A\colon H \to H$ является, вообще говоря, нелинейным и обладает свойствами (1) и (2), а $\varphi_k(t)$, $k = \overline{1,3}$, – действительнозначные положительные функции класса $C[t_0,\infty)$, $t_0 = \mathrm{const} \geqslant 0$. Тогда задача Коши для дифференциального уравнения третьего порядка (4) при любых начальных условиях (5) имеет единственное решение $y\colon [t_0,\infty) \to H$ класса $C^3[t_0,\infty)$.*

Пусть, дополнительно, существует такая постоянная $R_0 > 0$, что при всех достаточно больших t выполняется неравенство (11), а $\varphi_k(t)$, $k = \overline{1,3}$, – убывающие выпуклые вниз функции класса $C^4[t_0,\infty)$, для которых имеют место условия (43) с функцией W, заданной равенством (39). Пусть также функции $m_1(t)$ и $m_2(t)$, определённые в (22) и (27) соответственно, обладают свойствами (29) и (30), и справедливы условия (24), (32) и (34). Пусть, кроме того, $-\mu(\tau)$ и $-\lambda(\tau)$ – максимальные действительные части корней уравнений (31) и (42) соответственно, причём выполнены условия (47), (48), а функции $G_k(\lambda(\tau))$, $k = \overline{1,4}$, определены равенствами (44) при $h(t) = \lambda(t)$. Пусть, наконец, при достаточно больших τ, если корни уравнения (42) попарно различны, выполнены неравенства (50) при $k_0 = 2$ и условия (51)–(53); если совпадают ровно два корня уравнения (42), то имеют место неравенства (50) при $k_0 = 3$ и условия (56)–(58); если же все три корня уравнения (42) совпадают между собой, то справедливы неравенства (50) при $k_0 = 4$ и условия (60)–(63).

Тогда единственное решение задачи Коши для дифференциального уравнения (4) при любых начальных условиях (5) стремится при $t \to \infty$ к единственному стационарному решению уравнения (4), т.е. стационарное решение уравнения (4) асимптотически устойчиво в целом.

4. Замечания. Укажем величину $\mu(\tau)$, равную модулю максимальной действительной части корней уравнения (31):

$$\mu(\tau) = \begin{cases} (\varphi_1(\tau) - \sqrt{\varphi_1^2(\tau) - 4m_2(\tau)})/2, & \text{если} \quad D(\tau) > 0, \\ \varphi_1(\tau)/2, & \text{если} \quad D(\tau) < 0. \end{cases}$$

Отсюда заключаем, что в наших предположениях $\lim\limits_{\tau\to\infty} \mu(\tau) \neq 0$.

Кроме того, нетрудно убедиться, что в наших условиях

$$\lim_{\tau\to\infty} \frac{\tilde{\psi}(\tau)}{\mu(\tau)} = \begin{cases} 1/(\sqrt{D^0}(\varphi_1^0 - \sqrt{(\varphi_1^0)^2 - 4m_2^0})), & \text{если} \quad D(\tau) > 0, \\ 2/(\sqrt{D^0}\varphi_1^0), & \text{если} \quad D(\tau) < 0, \end{cases} \tag{64}$$

причём здесь неравенства $D(\tau) > 0$ или $D(\tau) < 0$ выполняются при достаточно больших τ. Величина D^0 определена равенством (32). Значение предела (64) можно использовать для нахождения величины ψ^0, обеспечивающей оценку (34). Найти величину $\lambda(\tau)$ и проверить условия теоремы, содержащие эту величину, можно с помощью численных расчётов.

Отметим, что в условиях теоремы дифференциальное уравнение (4) при любых начальных условиях (5) определяет приближённый метод нахождения решения уравнения (3).

Уравнения вида (4) возникают в задачах изучения классического движения в соответствии со вторым законом Ньютона при выполнении некоторых дополнительных условий, а также в задачах, уравнения которых получаются из закона изменения энергии во времени.

Пусть коэффициенты в уравнении (4) постоянны, т.е. $\varphi_k(t) = \varphi_k = \text{const}$, $k = \overline{1,3}$. Тогда $\lambda(t) = \lambda > 0$, $G_k(\lambda(t)) = \lambda^k$, $k \geqslant 1$. Значит, условия (47), (48) и (50) теоремы очевидно выполнены. Справедливость предположений (51)–(53), (56)–(58), (60)–(63) при соответствующих значениях k_0 в рассматриваемом случае проверяется без труда.

Заметим, что случаи совпадающих корней квадратного уравнения (31) и наличия хотя бы двух одинаковых корней у кубического уравнения (42) на практике реализуются редко.

Пусть $\eta(t)$ – положительная четырежды непрерывно дифференцируемая убывающая выпуклая вниз функция, для которой

$$\lim_{t\to\infty} \eta(t) = \eta_0 > 0,$$

и для коэффициентов уравнения (4) справедливы равенства

$$\varphi_1(t) = a_1 + \eta(t), \quad \varphi_2(t) = a_2 + a_3\eta(t), \quad \varphi_3(t) = a_4\eta(t),$$

где a_k $(k = \overline{1,4})$ – положительные постоянные. Свойства функций $\varphi_k(t)$ $(k = \overline{1,3})$ определяются значениями параметров η_0 и a_k, $k = \overline{1,4}$. Например, соотношения (9) и (10), очевидно, имеют место, второе неравенство в условиях (43) будет верно, если a_1 и a_2 достаточно велики по сравнению с a_4. Из определения функции $m_1(t)$ (см. (22)) вытекает, что

$$m_1(t) = 2a_1 - a_2 + (2 - a_3 - La_4)\eta(t).$$

Пусть $2 - a_3 - La_4 \geqslant 0$, тогда приходим к неравенству $m_1(t) \geqslant 2a_1 - a_2$, т.е. можно принять, что $m_0 = 2a_1 - a_2$. Таким образом, оценка (22) имеет место, если $2a_1 - a_2 > 1$.

Соотношения (29) и (30) принимают соответственно вид

$$\lim_{t\to\infty} m_1(t) = 2a_1 - a_2 + (2 - a_3 - La_4)\eta_0 = m_1^0 \geqslant m_0 > 0,$$

$$\lim_{t\to\infty} m_2(t) = 2\bar{\gamma}(a_2 + a_3\eta_0) - La_4\eta_0 = m_2^0 > 0,$$

а равенство (26) запишется в виде

$$g(t,\tau) = (1 + a_3 + a_4)(t - \tau)\eta'(t),$$

$$W(t) = a_4\eta(t)\left(2M - \frac{\bar{\alpha}L}{m_0}(\gamma_0\psi^0[\eta(t)(2m_0 + 3\alpha a_3) + 2m_0a_1 + 3\alpha a_2 + 3m_0] + 3)\right).$$

Условие (32) в рассматриваемом случае будет следующим:

$$0 \neq D^0 = \left|\frac{(\varphi_1^0)^2}{4} - m_2^0\right| = \frac{1}{4}|\eta_0^2 + (2a_1 - 8\bar{\gamma}a_3 + 4La_4)\eta_0 + a_1^2 - 8\bar{\gamma}a_2|.$$

Значит, $D^0 \neq 0,$ если действительное число η_0 не является корнем квадратного уравнения

$$z^2 + (2a_1 - 8\bar{\gamma}a_3 + 4La_4)z + a_1^2 - 8\bar{\gamma}a_2 = 0.$$

Предложенная методика применима и для исследования асимптотической устойчивости стационарного решения дифференциального уравнения второго порядка. Для установления же достаточных условий асимптотической устойчивости стационарного решения дифференциального уравнения, линейного относительно производных, порядка выше третьего, необходимо получить утверждения, аналогичные леммам 1 и 2, для скалярных дифференциальных неравенств соответствующих порядков.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вайнберг М.М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений. М., 1972.
2. *Alber Ya., Ryazantseva I.* Nonlinear Ill-Posed Problems of Monotone Type. Dordrecht, 2006.
3. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. М., 1988.
4. *Матвеев Н.М.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. СПб, 1996.
5. *Рязанцева И.П.* О непрерывном методе третьего порядка с постоянными коэффициентами для уравнений с монотонными операторами в гильбертовом пространстве // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 2. С. 267–275.
6. *Ryazantseva I.* Regularized continuous third-order method for monotone operator equations in Hilbert space// Appl. Anal. and Optimization. 2019. V. 3. № 2. P. 231–239.
7. *Рязанцева И.П.* Непрерывный метод решения задач условной минимизации // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1999. Т. 39. № 5. С. 734–742.
8. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. СПб, 2003.
9. *Васильев Ф.П.* Методы решения экстремальных задач. М., 1981.

Нижегородский государственный технический
университет им. Р.Е. Алексеева

Поступила в редакцию 24.03.2021 г.
После доработки 24.03.2021 г.
Принята к публикации 08.09.2021 г.