ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 10, с. 1359–1366

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.927.25+517.958:621.372.8

МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ ДИСПЕРСИОННЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧЕ О НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛНАХ КРУГЛОГО ВОЛНОВОДА

© 2021 г. Ю. Г. Смирнов

Исследуются ТЕ-поляризованные электромагнитные волны, распространяющиеся в неоднородном диэлектрическом волноводе кругового сечения, заполненном нелинейной средой, в которой нелинейность описывается законом Керра. Доказано существование бесконечного множества нелинейных как поверхностных, так и вытекающих волн. Найдены достаточные условия, при выполнении которых может распространяться несколько волн, и определены области локализации соответствующих постоянных распространения.

DOI: 10.31857/S0374064121100083

Введение. Распространение светового луча в однородной нелинейной среде или волноводной структуре, заполненной нелинейной средой, описывается законом Керра (см. [1]). Впервые уравнения, описывающие распространение волн в нелинейной среде с нелинейностью, выраженной законом Керра, получены в начале 70-х годов прошлого века в пионерских работах П.Н. Елеонского и В.П. Силина (см., например, [2]). Метод дисперсионных уравнений применяется для исследования распространения волн в нелинейном слое [3, 4]. Однако при изучении других структур, например, круглого диэлектрического волновода, применять этот метод уже невозможно.

Аналитические и численные результаты, связанные с распространением ТЕ-поляризованных волн в круглом нелинейном диэлектрическом волноводе, полученные с использованием метода возмущений, представлены в работах [5–8].

В данной работе исследуются электромагнитные волны, распространяющиеся в неоднородном диэлектрическом волноводе кругового сечения, заполненном средой, нелинейность которой описывается законом Керра. В ней получен важный результат, составляющий сущность теории распространения нелинейных волн в открытых металлодиэлектрических волноводах: существует бесконечный спектр нелинейных поверхностных или вытекающих волн.

1. Постановка задачи. Рассмотрим трёхмерное пространство $\mathbb{R}^3$ с цилиндрической системой координат $O\rho\varphi z$, заполненное изотропной средой без источников, имеющей диэлектрическую проницаемость $\varepsilon_c\varepsilon_0 = \mathrm{const}$ и магнитную проницаемость μ_0, где ε_0 и μ_0 – диэлектрическая проницаемость и проницаемость вакуума. Рассмотрим электромагнитные волны, распространяющиеся вдоль линии передачи $\Sigma := \{(\rho,\varphi) : r_0 \leqslant \rho \leqslant r,\ \ 0 \leqslant \varphi < 2\pi\}$, расположенной в $\mathbb{R}^3$, с образующей, параллельной оси Oz. Поперечное сечение волновода состоит из двух концентрических окружностей радиусов r_0 и r, где r_0 – радиус внутреннего идеально проводящего цилиндра, а $r - r_0$ – толщина диэлектрической цилиндрической оболочки.

Предполагаем, что поля зависят гармонически от времени как $\exp(-i\omega t)$, где $\omega > 0$ – круговая частота.

Нахождение поверхностных ТЕ-поляризованных волн сводится [9] к определению нетривиальных решений однородной системы уравнений Максвелла с зависимостью от координаты z (вдоль которой структура регулярна) в виде $e^{i\gamma z}$,

$$\nabla \times \mathbf{H} = -i\omega\tilde{\varepsilon}\mathbf{E}, \quad \nabla \times \mathbf{E} = i\omega\mathbf{H},$$

$$\mathbf{E} = (0, E_\varphi(\rho)e^{i\gamma z}, 0), \quad \mathbf{H} = (H_\rho(\rho)e^{i\gamma z}, 0, H_z(\rho)e^{i\gamma z}),$$

удовлетворяющих условиям сопряжения для тангенциальных составляющих электрического и магнитного полей на поверхности разрыва диэлектрической проницаемости $(\rho = r_0$ и $\rho = r)$

$$[E_\varphi]|_{\rho=r_0} = 0, \quad [H_z]|_{\rho=r_0} = 0, \quad [E_\varphi]|_{\rho=r} = 0, \quad [H_z]|_{\rho=r} = 0, \tag{1}$$

где $[f]|_{\rho=\rho_0} = \lim\limits_{\rho\to\rho_0-0} f(\rho) - \lim\limits_{\rho\to\rho_0+0} f(\rho)$. Решение также должно быть ограниченным и удовлетворять условиям на бесконечности. Для поверхностных волн электромагнитное поле должно убывать как $O(1/\rho)$ при $\rho\to\infty$, а для вытекающих волн оно должно возрастать при $\rho\to\infty$. Ниже будут рассмотрены оба случая.

Предполагаем, что относительная диэлектрическая проницаемость во всём пространстве имеет вид $\widetilde{\varepsilon} = \varepsilon(\rho) + \alpha(\rho)|\mathbf{E}|^2$ при $r_0 \leqslant \rho \leqslant r$, и $\widetilde{\varepsilon} = \varepsilon_c$ при $\rho > r$ и $\rho < r_0$, где $\alpha(\rho)$ и $\varepsilon(\rho)$ – непрерывные функции при $\rho\in[r_0, r]$ и

$$|\mathbf{E}|^2 = |(\mathbf{E}e^{-i\omega t}, \mathbf{e}_\rho)|^2 + |(\mathbf{E}e^{-i\omega t}, \mathbf{e}_\varphi)|^2 + |(\mathbf{E}e^{-i\omega t}, \mathbf{e}_z)|^2.$$

Задача о распространении волн является задачей на собственные значения для уравнений Максвелла со спектральным параметром γ, который является постоянной распространения волновода. Пусть $\lambda = \gamma^2$ – новый спектральный параметр. Задача нахождения ТЕ-поляризованных волн в круговом волноводе может быть сведена к следующей краевой задаче. Требуется найти $\lambda > \omega^2\varepsilon_c$ такие, что для заданной константы $A \neq 0$ существует нетривиальная функция $u(\rho;\lambda) := E_\varphi$, удовлетворяющая уравнению

$$(\rho u')' + \left(\omega^2\rho(\varepsilon(\rho) + \alpha(\rho)u^2) - \frac{1}{\rho}\right)u - \lambda\rho u = 0 \tag{2}$$

и граничным условиям

$$u(r_0) = 0, \tag{3}$$

$$u'(r_0) = A > 0, \tag{4}$$

$$u'(r) = \beta u(r), \tag{5}$$

в которых

$$\beta := \kappa\frac{K_1'(\kappa r)}{K_1(\kappa r)}, \quad \beta < 0,$$

для поверхностных волн, $\kappa = \sqrt{\lambda - \omega^2\varepsilon_c}$ (>0), и

$$\beta := \kappa\frac{I_1'(\kappa r)}{I_1(\kappa r)}, \quad \beta > 0,$$

для вытекающих волн. Здесь $K_1(x)$ и $I_1(x)$ – соответственно функции Макдональда и Инфельда, т.е. модифицированные функции Бесселя (см. [10, гл. 9.6]). Так как $K_1(x) > 0$ и $I_1(x) > 0$ для $x > 0$, то $\beta = \beta(\lambda)$ непрерывно дифференцируемая функция на $(\omega^2\varepsilon_c, \infty)$ и $\beta(\omega^2\varepsilon_c) = -1/r$ для поверхностных волн, $\beta(\omega^2\varepsilon_c) = 1/r$ для вытекающих волн (см. [10, гл. 9.6]).

Замечание 1. Постоянная β определяется из решения уравнения (2) в области $\rho \geqslant r$ при $\alpha = 0$:

$$u(\rho) = \widetilde{C}K_1(\kappa\rho), \quad \rho \geqslant r,$$

с учётом условий на бесконечности и условий сопряжения (1) для поверхностных волн [11]. Постоянная β также определяется из решения уравнения (2) в области $\rho \geqslant r$ при $\alpha = 0$:

$$u(\rho) = \widetilde{C}I_1(\kappa\rho), \quad \rho \geqslant r,$$

с учётом условия возрастания решения на бесконечности и условий сопряжения (1) для вытекающих волн.

2. Интегральное дисперсионное уравнение для нелинейной задачи на собственные значения. Введём новую неизвестную функцию $v = \sqrt{\rho}u$ и выберем функции ε и α такими, чтобы выполнялись равенства

$$\varepsilon(\rho,\omega) = \epsilon + \frac{3}{4\rho^2\omega^2} \quad \text{и} \quad \alpha(\rho,\omega) = \frac{\alpha_0\rho}{\omega^2},$$

где ϵ и α_0 – вещественные положительные постоянные. Тогда задача (2)–(5) переходит в следующую задачу: найти решение уравнения

$$v'' + \omega^2 \epsilon v + \alpha_0 v^3 = \lambda v \tag{6}$$

с краевыми условиями

$$v(r_0) = 0, \tag{7}$$

$$v'(r_0) = A\sqrt{r_0}, \tag{8}$$

$$v'(r) = \beta_0 v(r),$$

где $\beta_0 = 1/(2r) + \beta$. Так как $1/2x + K_1'(x)/K_1(x) = -1/2x - K_0(x)/K_1(x) < 0$ при $x > 0$ (см. [10, гл. 9.6]), то $\beta_0 < 0$ для поверхностных волн. Очевидно, что $\beta_0 > 0$ для вытекающих волн.

Умножая уравнение (6) на v', получаем

$$v'v'' + \omega^2 \epsilon v'v + \alpha_0 v'v^3 - \lambda v'v = 0,$$

или, равносильно,

$$((v')^2)' + \omega^2 \epsilon (v^2)' + \frac{\alpha_0}{2}(v^4)' - \lambda (v^2)' = 0,$$

что приводит к равенству

$$(v')^2 + \omega^2 \epsilon v^2 + \frac{\alpha_0}{2} v^4 - \lambda v^2 = C_0, \tag{9}$$

где C_0 – константа. Это первый интеграл уравнения (6).

Принимая во внимание непрерывную дифференцируемость функции $u(\rho)$, в силу условий (7) и (8) находим

$$C_0 = A^2 r_0 > 0.$$

Отсюда и из равенства (9) следует, что

$$v' = \pm\sqrt{A^2 r_0 - (\omega^2 \epsilon - \lambda) v^2 - \frac{\alpha_0}{2} v^4}. \tag{10}$$

Замечание 2. Так как функция $v(\rho)$ может изменять знак на отрезке $[r_0, r]$, то выбор знака в уравнении (10) пока не определён. Имеем

$$A^2 r_0 - (\omega^2 \epsilon - \lambda) v^2 - \frac{\alpha_0}{2} v^4 = -\frac{\alpha_0}{2}(v^2 - z_1)(v^2 - z_2), \tag{11}$$

где

$$z_1 = \frac{\lambda - \omega^2 \epsilon + \sqrt{D}}{\alpha_0} > 0, \quad z_2 = \frac{\lambda - \omega^2 \epsilon - \sqrt{D}}{\alpha_0} < 0,$$

и $D := (\omega^2 \epsilon - \lambda)^2 + 2\alpha_0 A^2 r_0$. Из (9) вытекает, что левая часть равенства (11) неотрицательна. Поэтому, принимая во внимание неравенство $z_2 < 0$, имеем $v^2 - z_1 \leqslant 0$. Следовательно, $|v| \leqslant z_1$.

Пусть $r_i \in (r_0, r)$, $i = \overline{1, N}$, – точки экстремума функции v. В силу дифференцируемости этой функции необходимо, чтобы $v'(r_i) = 0$. Из (10) и (11) следует, что в точках r_i экстремума функции v выполняется равенство $|v(r_i)| = \sqrt{z_1}$. Более того, с учётом условия $v'(r_0) > 0$ заключаем, что r_{2j-1} и r_{2j} являются соответственно точками максимума и минимума функции $v(\rho)$, т.е. $v(r_{2j-1}) = \sqrt{z_1}$, $v(r_{2j}) = -\sqrt{z_1}$.

Таким образом, интервалами возрастания функции $v(\rho)$ являются (r_0, r_1), (r_2, r_3) и т.д., а интервалами убывания – (r_1, r_2), (r_3, r_4) и т.д. Общее число интервалов возрастания и убывания функции $v(\rho)$ равно $N + 1$. Знание поведения функции на этих интервалах позволяет определить знак на них в уравнении (10).

Теперь рассмотрим биквадратное уравнение

$$\beta_0^2 v^2(r) + (\omega^2 \epsilon - \lambda) v^2(r) + \frac{\alpha_0}{2} v^4(r) - A^2 r_0 = 0.$$

Обозначая в нём $v^2(r) = t \geqslant 0,$ получаем квадратное уравнение

$$\frac{\alpha_0}{2}t^2 + (\beta_0^2 + \omega^2\epsilon - \lambda)t - A^2 r_0 = 0$$

с дискриминантом $d = (\beta_0^2 + \omega^2\epsilon - \lambda)^2 + 2\alpha_0 A^2 r_0.$ Корни этого квадратного уравнения имеют вид

$$t_1 = \frac{\lambda - \beta_0^2 - \omega^2\epsilon + \sqrt{d}}{\alpha_0} > 0, \quad t_2 = \frac{\lambda - \beta_0^2 - \omega^2\epsilon - \sqrt{d}}{\alpha_0} < 0.$$

Положим $v_\pm := \pm\sqrt{t_1}.$ Тогда получаем следующие краевые условия:

$$v(r_0) = 0, \quad v'(r_0) = A\sqrt{r_0}, \quad v(r) = v_\pm.$$

Обозначим

$$w = \left(A^2 r_0 + (\lambda - \omega^2\epsilon)v^2 - \frac{\alpha_0}{2}v^4\right)^{-1/2} (> 0).$$

Интегрируем уравнение (10) на интервале (r_0, r_1) с учётом выбора знака "+" перед квадратным корнем в (10) в силу условия $v'(r_0) > 0.$ Имеем

$$\int\limits_0^{v(\rho)} w\,dv = C_1 + \rho - r_0, \quad \rho \in (r_0, r_1),$$

где C_1 – константа. Подставляя в это тождество вместо ρ значение r_0 (и вычисляя предел), находим, что $C_1 = 0.$ Следовательно,

$$\int\limits_0^{v(\rho)} w\,dv = \rho - r_0, \quad \rho \in (r_0, r_1). \tag{12}$$

Затем, заменяя в тождестве (12) ρ на $r_1,$ приходим к равенству

$$\int\limits_0^{\sqrt{z_1}} w\,dv = r_1 - r_0. \tag{13}$$

Далее повторяем те же действия на всех интервалах $(r_i, r_{i+1}),$ выбирая знак " + " или " − " производной функции $v(\rho)$ перед радикалом в (10) в зависимости от того, возрастает или убывает функция на этом интервале. Повторяя процедуру для интервалов (r_{2j-1}, r_{2j}) $(j \geqslant 1),$ получаем

$$-\int\limits_{\sqrt{z_1}}^{v(\rho)} w\,dv = \rho + C_{2j}, \quad \rho \in (r_{2j-1}, r_{2j}),$$

с некоторыми константами $C_{2j}.$ Подставляя в это тождество вместо ρ значение r_{2j-1} (и вычисляя предел), находим, что $C_{2j} = -r_{2j-1}.$ Следовательно,

$$-\int\limits_{\sqrt{z_1}}^{v(\rho)} w\,dv = \rho - r_{2j-1}, \quad \rho \in (r_{2j-1}, r_{2j}). \tag{14}$$

Затем, заменяя в тождестве (14) ρ на r_{2j}, приходим к равенству

$$\int\limits_{-\sqrt{z_1}}^{\sqrt{z_1}} w\,dv = r_{2j} - r_{2j-1}. \tag{15}$$

Повторяя эту процедуру для интервалов (r_{2j}, r_{2j+1}) $(j \geqslant 1)$, получаем

$$\int\limits_{-\sqrt{z_1}}^{v(\rho)} w\,dv = \rho + C_{2j+1}, \quad \rho \in (r_{2j}, r_{2j+1}),$$

с некоторой константой C_{2j+1}. Подставляя в это тождество вместо ρ значение r_{2j} (и вычисляя предел), находим, что $C_{2j+1} = -r_{2j}$, и поэтому

$$\int\limits_{-\sqrt{z_1}}^{v(\rho)} w\,dv = \rho - r_{2j}, \quad \rho \in (r_{2j}, r_{2j+1}). \tag{16}$$

Далее, заменяя в тождестве (16) ρ на r, получаем равенство

$$\int\limits_{-\sqrt{z_1}}^{\sqrt{z_1}} w\,dv = r_{2j+1} - r_{2j}. \tag{17}$$

На последнем интервале (r_N, r) в случае чётного N будем иметь

$$\int\limits_{-\sqrt{z_1}}^{v(\rho)} w\,dv = \rho + C_{N+1}, \quad \rho \in (r_N, r),$$

с некоторой константой C_{N+1}. Подставляя в это тождество вместо ρ значение r_N (и вычисляя предел), находим, что $C_{N+1} = -r_N$ и, значит,

$$\int\limits_{-\sqrt{z_1}}^{v(\rho)} w\,dv = \rho - r_N, \quad \rho \in (r_N, r). \tag{18}$$

Затем, заменяя в тождестве (18) ρ на r, получаем равенство

$$\int\limits_{-\sqrt{z_1}}^{v(r)} w\,dv = r - r_N. \tag{19}$$

В случае нечётного N на последнем интервале (r_N, r) будем иметь

$$-\int\limits_{\sqrt{z_1}}^{v(\rho)} w\,dv = \rho + C_{N+1}, \quad \rho \in (r_N, r),$$

с некоторой константой C_{N+1}. Подставляя в это тождество вместо ρ значение r_N (и вычисляя предел), находим, что $C_{N+1} = -r_N$. Следовательно,

$$-\int\limits_{\sqrt{z_1}}^{v(\rho)} w\,dv = \rho - r_N, \quad \rho \in (r_N, r). \tag{20}$$

Затем, заменяя в тождестве (20) ρ на r, приходим к равенству

$$\int\limits_{v(r)}^{\sqrt{z_1}} w\,dv = r - r_N. \tag{21}$$

Теперь, суммируя равенства (13), (15), (17) и (19) (или (21)), получаем интегральное дисперсионное уравнение

$$\mp\int\limits_{0}^{v_+} w\,dv + NT = r - r_0 \quad (N \geqslant 1), \tag{22}$$

в котором

$$T = \int\limits_{-\sqrt{z_1}}^{\sqrt{z_1}} w\,dv;$$

в формуле (22) знак “$-$” соответствует поверхностным волнам, а знак “$+$” – вытекающим волнам. В (22) учтено, что $v(r)$ и $v'(r)$ имеют разные знаки для поверхностных волн, потому что $\beta_0 < 0$, и одинаковые знаки для вытекающих волн, потому что в этом случае $\beta_0 > 0$.

Замечание 3. Все встречающиеся выше интегралы являются либо собственными, либо абсолютно сходящимися несобственными, в силу равенства (11).

3. Теоремы о существовании бесконечного множества собственных значений. Учитывая, что $z_1 z_2 = -2A^2 r_0/\alpha_0$, и изменяя переменную в интеграле (22), получаем

$$T = \int\limits_{-\sqrt{z_1}}^{\sqrt{z_1}} w\,dv = 2\sqrt{2}\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{\alpha_0 z_1 \sin^2 t + 2A^2 r_0/z_1}}.$$

Последний интеграл можно оценить сверху следующим образом:

$$\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{\alpha_0 z_1 \sin^2 t + 2A^2 r_0/z_1}} \leqslant \int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{2Ar_0\sqrt{2\alpha_0}\sin t}} = M,$$

где M – константа, не зависящая от z_1. Отсюда следует, что существуют пределы

$$\lim_{z_1\to 0} T(z_1) = 0, \quad \lim_{z_1\to +\infty} T(z_1) = 0.$$

Так как

$$z_1 = z_1(\lambda) = \frac{\lambda - \omega^2\epsilon + \sqrt{(\lambda-\omega^2\epsilon)^2 + 2\alpha_0 A^2 r_0}}{\alpha_0} = \frac{2A^2 r_0}{-\lambda + \omega^2\epsilon + \sqrt{(\lambda-\omega^2\epsilon)^2 + 2\alpha_0 A^2 r_0}},$$

то $z_1(\lambda) \to +\infty$ при $\lambda \to +\infty$ и $z_1(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to -\infty$. Значит, существуют пределы

$$\lim_{\lambda\to-\infty} T(\lambda) = 0, \quad \lim_{\lambda\to+\infty} T(\lambda) = 0. \tag{23}$$

Очевидно, что функция $T(\lambda)$ положительна и непрерывна для $\lambda \in (-\infty, +\infty)$. В силу соотношений (23) существует $H = \max\limits_{\lambda \in (-\infty,+\infty)} T(\lambda)$.

Рассмотрим функцию $v_+ = v_+(\lambda)$ на $[\omega^2\varepsilon_c, \infty)$. Так как $v_+ \leqslant \sqrt{z_1}$, то

$$\int\limits_0^{v_+} w\,dv \leqslant T/2.$$

Для поверхностных волн получаем

$$\left(N - \frac{1}{2}\right)T \leqslant -\int\limits_0^{v_+} w\,dv + NT \leqslant NT \quad (N \geqslant 1). \tag{24}$$

Зафиксируем $N \geqslant 1$. Из двойного неравенства (24) следует, что если $r - r_0 < (N - 1/2) \times T(\omega^2\varepsilon_c)$, то существует по крайней мере одно решение уравнения (22). Следовательно, верна

Теорема 1. *Существует число $N^* \geqslant 1$ такое, что для любого $N \geqslant N^*$ уравнение (22) имеет по крайней мере одно решение, и решения различны для разных N. Существует бесконечно много решений λ_N^+ уравнения (22), соответствующих поверхностным волнам и таких, что $\lambda_N^+ > \omega^2\varepsilon_c$ и $\lambda_N^+ \to \infty$ для $N \to \infty$.*

Доказательство. Для достаточно большого N справедливо неравенство $r - r_0 < (N - 1/2)T(\omega^2\varepsilon_c)$. Поэтому достаточно выбрать $N^* > 1/2 + (r - r_0)/T(\omega^2\varepsilon_c)$. Предположение о совпадении решений для различных N_1 и N_2 сразу же приводит к противоречию с неравенствами (24).

Далее, в силу соотношений (23) собственное значение λ_N^+ больше $\omega^2\varepsilon_c$ и стремится к $+\infty$ при $N \to +\infty$. Теорема доказана.

Для вытекающих волн получаем

$$NT \leqslant \int\limits_0^{v_+} w\,dv + NT \leqslant \left(N + \frac{1}{2}\right)T \quad (N \geqslant 1). \tag{25}$$

Зафиксируем $N \geqslant 1$. Из двойного неравенства (25) следует, что если $r - r_0 < NT(\omega^2\varepsilon_c)$, то существует по крайней мере одно решение уравнения (22). Следовательно, верна

Теорема 2. *Существует число $N^{**} \geqslant 1$ такое, что для любого $N \geqslant N^{**}$ уравнение (22) имеет по крайней мере одно решение, и решения различны для разных N. Существует бесконечно много решений λ_N^{++} уравнения (22), соответствующих вытекающим волнам и таких, что $\lambda_N^{++} > \omega^2\varepsilon_c$ и $\lambda_N^{++} \to \infty$ для $N \to \infty$.*

Доказательство. Для достаточно большого N справедливо неравенство $r - r_0 < NT(\omega^2\varepsilon_c)$. Поэтому достаточно выбрать $N^{**} > (r - r_0)/T(\omega^2\varepsilon_c)$. Предположение о совпадении решений для различных N_1 и N_2 сразу же приводит к противоречию с неравенствами (25).

Далее, в силу соотношений (23) собственное значение λ_N^{++} больше $\omega^2\varepsilon_c$ и стремится к $+\infty$ при $N \to +\infty$. Теорема доказана.

Легко проверить, что $v_+ = \sqrt{t_1} < \sqrt{z_1}$, поэтому

$$0 < \int\limits_0^{v_+} w\,dv < T/2.$$

Тогда в неравенствах (24) и (25) все нестрогие знаки можно заменить на строгие. Отсюда следует, что собственные значения $\lambda_{N_1}^+$ и $\lambda_{N_2}^{++}$ для поверхностных и вытекающих волн не совпадают ни при каких N_1 и N_2.

С помощью более детального анализа функции $T(\lambda)$ можно установить более точное асимптотическое поведение собственных значений, но в данной статье результаты по асимптотическому поведению не представлены.

Аналогичные результаты для нелинейных задач на собственные значения для плоских структур получены в работе [12].

Заключение. В статье доказано существование бесконечного множества нелинейных как поверхностных, так и вытекающих ТЕ-поляризованных электромагнитных волн в цилиндрическом волноводе, заполненном керр-нелинейной средой. Найдены достаточные условия, при выполнении которых могут распространяться несколько волн, определены области локализации соответствующих постоянных распространения.

Разработанный метод может быть эффективно применён и для расчёта ТЕ-волн в цилиндрическом нелинейном волноводе, а также для численного определения постоянных распространения поляризованных волн в многослойных открытых металлодиэлектрических цилиндрических круглых волноводах с более сложными нелинейностями.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 20-11-20087).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Akhmediev N.N., Ankiewicz A.* Solitons, Nonlinear Pulses and Beams. London, 1997.
2. *Eleonskii P.N., Oganes'yants L.G., Silin V.P.* Cylindrical nonlinear waveguides // Soviet Physics Jetp. 1972. V. 35. P. 44–47.
3. *Smirnov Y.G., Valovik D.V.* Nonlinear effects of electromagnetic TM wave propagation in anisotropic layer with Kerr nonlinearity // Adv. in Math. Phys. 2012. P. 609765.
4. *Smirnov Y.G., Valovik D.V.* Calculation of the propagation constants of TM electromagnetic waves in a nonlinear layer // J. of Commun. Tech. and Electronics. 2008. V. 53. № 8. P. 883–889.
5. *Kupriyanova S.N., Smirnov Y.G.* Propagation of electromagnetic waves in cylindrical dielectric waveguides filled with a nonlinear medium // Comput. Math. and Math. Phys. 2004. V. 44. № 10. P. 1762–1772.
6. *Smirnov Y.G.* Propagation of electromagnetic waves in cylindrical dielectric waveguides filled with a nonlinear medium // J. of Commun. Tech. and Electronics. 2005. V. 50. № 2. P. 179–185.
7. *Smirnov Y.G., Schurmann H.-W., Schestopalov Y.V.* Integral equation approach for the propagation of te-waves in a nonlinear dielectric cylinrical waveguide // J. of Nonlin. Math. Phys. 2004. V. 11. № 2. P. 256–268.
8. *Schurmann H.-W., Smirnov Y.G., Shestopalov Y.V.* Propagation of TE-waves in cylindrical nonlinear dielectric waveguides // Phys. Rev. E. 2005. V. 71. № 1. P. 016614-1016614-10.
9. *Smirnov Y.G., Smol'kin E.Y., Valovik D.V.* Nonlinear transmission eigenvalue problem describing TE wave propagation in two-layered cylindrical dielectric waveguides // Comput. Math. and Math. Phys. 2013. V. 53. № 7. P. 973–983.
10. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М., 1979.
11. *Smirnov Y.G.* Eigenvalue transmission problems describing the propagation of TE and TM waves in two-layered inhomogeneous anisotropic cylindrical and planar waveguides // Comput. Math. and Math. Phys. 2015. V. 55. № 3. P. 461–469.
12. *Смирнов Ю.Г.* Метод интегральных дисперсионных уравнений для решения нелинейных задач на собственные значения // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 10. Р. 1331–1338.

Пензенский государственный университет

Поступила в редакцию 02.03.2021 г.
После доработки 02.03.2021 г.
Принята к публикации 08.09.2021 г.