ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 10, с. 1384–1396

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.6

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ С УСЛОВИЕМ БИЦАДЗЕ–САМАРСКОГО НА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО РОДА

© 2021 г. М. Мирсабуров, Н. Б. Исломов

Для уравнения смешанного типа второго рода доказаны единственность и существование решения краевой задачи с условием Трикоми на части граничной характеристики и условием Бицадзе–Самарского на граничной и параллельной ей внутренней характеристике.

DOI: 10.31857/S0374064121100101

1. Постановка задачи *A*. Пусть Ω – конечная односвязная область в комплексной плоскости $\mathbb{C}=\{z=x+iy: x,y\in\mathbb{R}\}$, ограниченная при $y>0$ нормальной кривой

$$\Gamma: x^2+\frac{4}{(2-m)^2}y^{2-m}=1$$

с концами в точках $A(-1,0)$ и $B(1,0)$, а при $y<0$ – характеристиками

$$AC: x-\frac{2}{2-m}(-y)^{(2-m)/2}=-1 \quad \text{и} \quad BC: x+\frac{2}{2-m}(-y)^{(2-m)/2}=1$$

уравнения

$$u_{xx}+(\operatorname{sign} y)|y|^m u_{yy}+\alpha|y|^{m-1}u_y=0, \tag{1}$$

где m и α – постоянные, причём

$$0<m<2, \quad m-1<\alpha<m/2. \tag{2}$$

Обозначим через Ω_1 и Ω_2 части области Ω, лежащие соответственно в полуплоскостях $y>0$ и $y<0$, а через C_0 и C_1 – точки пересечения характеристик AC и BC соответственно с характеристикой, выходящей из точки $E(c,0)$, где $(c,0)\in J=\{(x,y): -1<x<1,\ y=0\}$. Через Ω_{21} обозначим характеристический треугольник EC_1B.

Настоящая работа посвящена исследованию краевой задачи с условием Трикоми [1, с. 29] на характеристике AC_0 и условием Бицадзе–Самарского [2] на параллельных характеристиках C_0C и EC_1.

Задача *A*. Найти функцию $u(x,y)$ со следующими свойствами:

1) справедливо включение $u(x,y)\in C(\overline{\Omega})$;

2) функция $u(x,y)$ – регулярное решение уравнения (1) в области Ω_1;

3) функция $u(x,y)$ является обобщённым решением из класса R_2 [3; 4, с. 113] уравнения (1) в области $\Omega_2\setminus(EC_0\bigcup EC_1)$;

4) имеют место включения $y^\alpha u_y(x,y)\in C(\Omega_1\bigcup J_1\bigcup J_2)$, $(-y)^\alpha u_y(x,y)\in C(\Omega_2\bigcup J_1\bigcup J_2)$, и на интервалах $J_1\bigcup J_2$ выполняется условие склеивания

$$\lim_{y\to-0}(-y)^\alpha\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=-\lim_{y\to+0}y^\alpha\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}, \quad (x,0)\in J_1\bigcup J_2, \tag{3}$$

где $J_1=\{(x,y): -1<x<c,\ y=0\}$, $J_2=\{(x,y): c<x<1,\ y=0\}$;

5) функция $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(x,y)|_{\overline{\Gamma}} = \varphi(x,y), \quad (x,y) \in \overline{\Gamma}, \tag{4}$$

$$u(x,y)|_{AC_0} = \psi(x), \quad x \in [-1,(c-1)/2], \tag{5}$$

$$u(\theta(x)) = \mu u(\theta^*(x)) + \rho(x), \quad x \in [c,1], \tag{6}$$

где $\varphi(x,y)$, $\psi(x)$, $\rho(x)$ – заданные функции, причём

$$\varphi(-1,0) = \psi(-1) = 0, \quad \rho(c) = \psi((c-1)/2) = 0, \tag{7}$$

$$\mu = \mathrm{const} < 0, \tag{8}$$

$$\varphi(x,y) = y^{\varepsilon+1}\varphi_1(x,y), \quad \varphi_1(x,y) \in C(\overline{\Gamma}), \quad \varepsilon > 0, \tag{9}$$

$$\rho(x) \in C^1[c,1]\bigcap C^2[c,1), \quad \psi(x) \in C^1[-1,(c-1)/2]\bigcap C^2[-1,(c-1)/2); \tag{10}$$

функции $\rho''(x)$ и $\psi''((x-1)/2)$ при $x \to 1$ и $x \to c$ соответственно могут обращаться в бесконечность, порядок которой меньше $1-\beta$, где $2\beta = (2\alpha-m)/(2-m)$, $2\beta \in (-1,0)$; здесь

$$\theta(x) = \left(\frac{x-1}{2}, -\left(\frac{2-m}{4}(x+1)\right)^{2/(2-m)}\right), \quad \theta^*(x) = \left(\frac{x+c}{2}, -\left(\frac{2-m}{4}(x-c)\right)^{2/(2-m)}\right), \tag{11}$$

$\theta(x)$ $(\theta^*(x))$ – точки пересечения характеристики C_0C (характеристики EC_1) с характеристикой, исходящей из точки $M(x,0)$ где $x \in [c,1]$.

Заметим, что условие (5) является условием Трикоми на характеристике AC_0, а условие (6) – условием Бицадзе–Самарского, заданным на параллельных характеристиках C_0C и EC_1.

Задача A для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом первого рода в случае, когда краевое условие на первой части характеристики задаётся локально, а на второй части и параллельной ей внутренней характеристике задаётся условие типа Бицадзе–Самарского, изучена в работах [2, 5]. Такие задачи для уравнения параболо-гиперболического типа второго рода исследованы в работах [6, 7].

2. Основные функциональные соотношения. При исследовании задачи A важную роль играют функциональные соотношения между функциями $\nu^{\pm}(x)$ и $\tau(x)$, привнесённые на интервал J из эллиптической и гиперболической части области Ω, где

$$u(x,0) = \tau(x), \quad (x,0) \in \overline{J}, \tag{12}$$

$$\lim_{y\to-0}(-y)^{\alpha}\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \nu^-(x), \quad \lim_{y\to+0} y^{\alpha}\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \nu^+(x), \quad (x,0) \in J. \tag{13}$$

Обобщённое решение из класса R_2 задачи Коши с данными (12), (13) для уравнения (1) в области Ω_2 даётся формулой [3; 4, с. 230, формула (27.5)]

$$u(\xi,\eta) = \int\limits_{-1}^{\xi}(\eta-t)^{-\beta}(\xi-t)^{-\beta}T(t)\,dt + \int\limits_{\xi}^{\eta}(\eta-t)^{-\beta}(t-\xi)^{-\beta}N(t)\,dt, \tag{14}$$

в которой

$$\xi = x - \frac{2}{2-m}(-y)^{(2-m)/2}, \quad \eta = x + \frac{2}{2-m}(-y)^{(2-m)/2}, \tag{15}$$

$$N(t) = T(t)/2\cos(\pi\beta) - \gamma_1\nu^-(t), \quad \gamma_1 = \frac{\Gamma(2-2\beta)}{(1-\alpha)\Gamma^2(1-\beta)}\left(\frac{2-m}{4}\right)^{1-2\beta}, \tag{16}$$

$$\tau(x)=\tau(-1)+\int\limits_{-1}^{x}(x-t)^{-2\beta}T(t)\,dt,\quad -1<x<1,\tag{17}$$

функции $T(x)$ и $\nu^-(x)$ непрерывны в $(-1,1)$ и интегрируемы на $[-1,1]$, а функция $\tau(x)$ обращается в нуль, который имеет порядок не меньше -2β при $x\to-1$.

Обобщённое решение из класса R_2 задачи Коши с данными (12), (13) для уравнения (1) в области Ω_{21} даётся формулой

$$u(\xi,\eta)=\int\limits_{c}^{\xi}(\eta-t)^{-\beta}(\xi-t)^{-\beta}T(t)\,dt+\int\limits_{\xi}^{\eta}(\eta-t)^{-\beta}(t-\xi)^{-\beta}N(t)\,dt,\tag{18}$$

где ξ, η и $N(t)$ определяются соответственно равенствами (15) и (16);

$$\tau(x)=\tau(c)+\int\limits_{c}^{x}(x-t)^{-2\beta}T(t)\,dt,\quad c<x<1,\tag{19}$$

функции $T(x)$ и $\nu^-(x)$ непрерывны в $(c,1)$ и интегрируемы на $[c,1]$, а функция $\tau(x)$ обращается в нуль, который имеет порядок не меньше -2β при $x\to c$.

В силу (7), (8) из условий (5) и (6) следует, что

$$\tau(-1)=0,\quad \tau(c)=0.\tag{20}$$

Положив $\xi=-1$, $\eta=x$ и $\xi=c$, $\eta=x$ соответственно в формулах (14) и (18), с учётом равенств (11) после несложных преобразований получим, что

$$u(\theta(x))=\int\limits_{-1}^{x}(x-t)^{-\beta}(1+t)^{-\beta}N(t)\,dt,\quad -1\leqslant x\leqslant 1,\tag{21}$$

$$u(\theta^*(x))=\int\limits_{c}^{x}(x-t)^{-\beta}(t-c)^{-\beta}N(t)\,dt,\quad c\leqslant x\leqslant 1.\tag{22}$$

Дифференцируя тождество (6) по x, а затем применяя к обеим частям полученного равенства оператор $D_{c,x}^{-\beta}[\cdot]$, будем иметь

$$D_{-1,x}^{-\beta}\frac{d}{dx}u(\theta(x))-\frac{1}{\Gamma(1+\beta)}\frac{d}{dx}\int\limits_{-1}^{c}(x-t)^{\beta}\frac{d}{dt}u(\theta(t))\,dt=$$

$$=\mu D_{c,x}^{-\beta}\frac{d}{dx}u(\theta^*(x))+D_{c,x}^{-\beta}\rho'(x),\quad c<x<1,\tag{23}$$

где $D_{c,x}^{\alpha}[\cdot]$ – оператор интегро-дифференцирования дробного порядка α [4, с. 16].

Подставляя представления (21), (22) в равенство (23) с учётом (5), (16) и тождеств

$$D_{-1,x}^{-\beta}D_{-1,x}^{\beta}(x+1)^{-\beta}N(x)=(x+1)^{-\beta}N(x),\quad -1<x<1,$$

$$D_{c,x}^{-\beta}D_{c,x}^{\beta}(x-c)^{-\beta}N(x)=(x-c)^{-\beta}N(x),\quad c<x<1,$$

получаем

$$\gamma_1\nu^-(x)=\frac{T(x)}{2\cos(\pi\beta)}+F_1(x),\quad c<x<1,\tag{24}$$

где

$$F_1(x)=d_0(x)D^{-\beta}_{c,x}\rho'(x)+\frac{d_0(x)}{\Gamma(1+\beta)}\frac{d}{dx}\int\limits_{-1}^{c}(x-t)^{\beta}\psi'((t-1)/2)\,dt, \tag{25}$$

$$d_0(x)=(\Gamma(1-\beta)(\mu(x-c)^{-\beta}-(1+x)^{-\beta}))^{-1}.$$

Равенство (24) представляет собой первое функциональное соотношение между функциями $T(x)$ и $\nu^-(x)$, привнесённое на интервал J_2 из области Ω_{21}.

Точно так же, положив $\xi=-1$ и $\eta=x$ в формуле (14), с учётом условия (5) получим второе функциональное соотношение между функциями $T(x)$ и $\nu^-(x)$, привнесённое на интервал J_1 из области Ω_2:

$$\gamma_1\nu^-(x)=\frac{1}{2\cos(\pi\beta)}T(x)+\frac{(1+x)^{\beta}}{\Gamma(1-\beta)}D^{-\beta}_{-1,x}\psi'(x),\quad -1<x<c. \tag{26}$$

Решение задачи E_α с условиями (4) и (13) для уравнения (1) в области Ω_1 существует, единственно и представимо в виде [4, формула (10.41)]

$$u(x,y)=-\gamma_2\int\limits_{-1}^{1}\nu^+(t)\biggl\{\biggl((t-x)^2+\frac{4}{(2-m)^2}y^{2-m}\biggr)^{-\beta}-\biggl((1-xt)^2+\frac{4t^2}{(2-m)^2}y^{2-m}\biggr)^{-\beta}\biggr\}\,dt-$$

$$-\gamma_2\beta(2-m)(1-R^2)\int\limits_{0}^{l}\varphi[\xi(s),\eta(s)]\eta^{\alpha-1}(s)(r_1^2)^{-\beta-1}F(\beta,\beta+1,2\beta;1-\sigma)\frac{d\xi(s)}{ds}\,ds, \tag{27}$$

где

$$\sigma=\frac{r^2}{r_1^2},\qquad \left.\begin{matrix} r^2\\ r_1^2\end{matrix}\right\}=(\xi-t)^2+\frac{4}{(2-m)^2}(\eta^{(2-m)/2}\mp y^{(2-m)/2})^2,\quad R^2=x^2+\frac{4}{(2-m)^2}y^{2-m},$$

а s – длина дуги кривой Γ, отсчитываемая от точки $B(1,0)$, и l – длина всей дуги кривой Γ.

Используя уравнение нормальной кривой Γ и полагая в формуле (27) $y=0$, с учётом соотношений (12), (9) получаем функциональное соотношение между функциями $\tau(x)$ и $\nu^+(x)$, привнесённое на интервал J из области Ω_1:

$$\tau(x)=-\gamma_2\int\limits_{-1}^{1}(|x-t|^{-2\beta}-(1-xt)^{-2\beta})\nu^+(t)\,dt+F_2(x),\quad (x,0)\in\overline{J}, \tag{28}$$

где

$$F_2(x)=\gamma_2\beta\biggl(\frac{2-m}{2}\biggr)^{(1-2\beta)(\varepsilon+\alpha)/((1-\alpha)+1)}(1-x^2)\int\limits_{-1}^{1}\frac{(1-t^2)^{(1-2\beta)(\varepsilon+\alpha)/(2(1-\alpha))}\varphi_1(t)\,dt}{(1-2xt+x^2)^{1+\beta}}, \tag{29}$$

$$\varphi_1(x)=\varphi\biggl(x,\biggl(\frac{2-m}{2}\biggr)^{2/(2-m)}(1-x^2)^{1/(2-m)}\biggr).$$

Отметим, что соотношение (28) справедливо для всего промежутка J.

3. Единственность решения задачи *A*. Для доказательства единственности решения задачи A важную роль играют следующие три леммы.

Лемма 1. *Если функция* $\tau'(x)$ *удовлетворяет условию Гёльдера с показателем* $k>-2\beta$ *при* $-1<x<1$ *(т.е.* $\tau(x)\in C^{(1,k)}(-1,1)$*), то функция*

$$T(x)=\frac{\sin(2\pi\beta)}{2\pi\beta}\frac{d}{dx}\int\limits_a^x\tau'(t)(x-t)^{2\beta}\,dt \tag{30}$$

представима в виде

$$T(x)=\frac{\sin(2\pi\beta)}{2\pi\beta}\bigg(\tau'(x)(x-a)^{2\beta}+2\beta\int\limits_a^x(\tau'(t)-\tau'(x))(x-t)^{2\beta-1}\,dt\bigg), \tag{31}$$

где a *принимает значение* -1 *или* c.

Доказательство. В силу определения оператора интегро-дифференцирования дробного порядка [4, с. 16] и тождества $\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\pi/\sin(\pi z)$ из представлений (17) и (19) с учётом равенства (20) вытекает, что

$$T(x)=\frac{1}{\Gamma(1-2\beta)}D_{a,x}^{1-2\beta}\tau(x), \tag{32}$$

или

$$T(x)=\frac{\sin(2\pi\beta)}{2\pi\beta}\frac{d^2}{dx^2}\int\limits_a^x\tau(t)(x-t)^{2\beta}\,dt=\frac{\sin(2\pi\beta)}{2\pi\beta}\frac{d}{dx}\int\limits_a^x\tau'(t)(x-t)^{2\beta}\,dt. \tag{33}$$

Рассмотрим функцию

$$T_1(x,\varepsilon)=\int\limits_a^{x-\varepsilon}\tau'(t)(x-t)^{2\beta}\,dt \tag{34}$$

и найдём её производную

$$\frac{dT_1(x,\varepsilon)}{dx}=\tau'(x-\varepsilon)\varepsilon^{2\beta}+2\beta\int\limits_a^{x-\varepsilon}\tau'(t)(x-t)^{2\beta-1}\,dt=$$

$$=2\beta\int\limits_a^x(\tau'(t)-\tau'(x))(x-t)^{2\beta-1}\,dt+(x-a)^{2\beta}\tau'(x)-\varepsilon^{2\beta}(\tau'(x)-\tau'(x-\varepsilon)).$$

Отсюда, поскольку $\tau'(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $k>-2\beta$, при $\varepsilon\to 0$ получим

$$\frac{dT_1(x)}{dx}=\tau'(x)(x-a)^{2\beta}+2\beta\int\limits_a^x(\tau'(t)-\tau'(x))(x-t)^{2\beta-1}\,dt,$$

откуда с учётом определения (34) в силу равенства (33) имеем представление (31). Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия*

$$\tau(x)\in C[-1,1]\bigcap C^{(1,k)}(-1,1),\quad k>-2\beta,\quad -1<2\beta<0, \tag{35}$$

и функция $\tau(x)$ *в точке* $x=x_0$ $(x_0\in(-1,1))$ *принимает наибольшее положительное значение (НПЗ) (наименьшее отрицательное значение (НОЗ)). Тогда функцию* $T(x)$, *определённую равенством (32), в точке* $x=x_0$ *можно представить в виде*

$$T(x_0)=\frac{1}{\Gamma(1-2\beta)}D_{a,x}^{1-2\beta}\tau(x)|_{x=x_0}=$$

$$= \frac{2\beta}{\Gamma(1+2\beta)\Gamma(1-2\beta)}\left((x_0-a)^{2\beta-1}\tau(x_0) + (1-2\beta)\int\limits_a^{x_0} \frac{\tau(x_0)-\tau(t)}{(x_0-t)^{2-2\beta}}\,dt\right), \tag{36}$$

причём

$$T(x_0) < 0 \quad (T(x_0) > 0), \quad x_0 \in (-1,1). \tag{37}$$

Доказательство. Возьмём произвольную точку $x_1 \in (-1, x)$ и запишем интеграл, входящий в представление (31), в виде суммы двух интегралов – по промежуткам (a, x_1) и (x_1, x). Далее используя формулу интегрирования по частям для интеграла по промежутку (a, x_1), получаем

$$T(x) = \frac{\sin(2\pi\beta)}{2\pi\beta}\left\{-2\beta(1-2\beta)\int\limits_a^{x_1}(\tau(t)-\tau(x))(x-t)^{2\beta-2}\,dt + 2\beta(x-a)^{2\beta-1}\tau(x) + \right.$$

$$\left. + 2\beta\int\limits_{x_1}^{x}\frac{\tau'(t)-\tau'(x)}{(x-t)^{1-2\beta}}\,dt + (x-x_1)^{2\beta}\tau'(x) + 2\beta(x-x_1)^{2\beta-1}(\tau(x_1)-\tau(x))\right\}. \tag{38}$$

Полагая в тождестве (38) $x = x_0$ и затем переходя к пределу при $x_1 \to x_0$, с учётом включения (35) придём к представлению (36).

Пусть в точке $(x_0, 0) \in J$ функция $\tau(x)$ достигает своего НПЗ (НОЗ), тогда из (36) с учётом предположений (2) и неравенств $-1 < 2\beta < 0$, $\tau(x_0) - \tau(x) > 0$ $(\tau(x_0) - \tau(x) < 0)$ получим неравенство (37). Лемма доказана.

Следующая лемма представляет собой аналог принципа экстремума А.В. Бицадзе.

Лемма 3. *Если выполнены условия (2) и (8), то решение* $u(x,y)$ *задачи* A *при* $\psi(x) \equiv 0$, $\rho(x) \equiv 0$ *своих НПЗ и НОЗ в замкнутой области* $\overline{\Omega_1}$ *достигает только в точках кривой* $\overline{\Gamma}$.

Доказательство. В силу принципа Хопфа [8, с. 25; 9, 10] решение $u(x,y)$ уравнения (1) внутри области Ω_1 не может достигать своих НПЗ или НОЗ. Допустим, что решение $u(x,y)$ достигает своих НПЗ или НОЗ в точках интервала $(-1,1)$ оси $y = 0$.

Рассмотрим отдельно три случая:

1. Пусть $u(x,y)$ своего НПЗ (НОЗ) достигает в некоторой точке $Q(x_0, 0) \in J_1$. Тогда равенство (26) при $\psi(x) \equiv 0$ принимает вид $\gamma_1\nu^-(x) = T(x)/(2\cos(\pi\beta))$, $-1 < x < c$. Отсюда в силу (2), (3), (13) и (37) заключаем, что в точке $Q(x_0,0)$ НПЗ (НОЗ) выполняется неравенство $\nu^+(x_0) > 0$ $(\nu^+(x_0) < 0)$.

Это неравенство противоречит принципу Заремба–Жиро [4, с. 88, лемма 11.1] (т.е. противоречит неравенству $\nu^+(x_0) < 0$ $(\nu^+(x_0) > 0)$), поэтому $Q(x_0,0) \notin J_1$.

2. Пусть решение $u(x,y)$ своего НПЗ (НОЗ) достигает в некоторой точке $P(x_0,0) \in J_2$. Тогда, положив в (24) $\psi(x) \equiv \rho(x) \equiv 0$, будем иметь $\gamma_1\nu^-(x) = T(x)/(2\cos(\pi\beta))$, $c < x < 1$. Отсюда, принимая во внимание (2), (3), (13) и (37), заключаем, что в точке $P(x_0,0) \in J_2$ НПЗ (НОЗ) справедливо неравенство $\nu^+(x_0) > 0$ $(\nu^+(x_0) < 0)$.

Это неравенство противоречит неравенству $\nu^+(x_0) < 0$ $(\nu^+(x_0) > 0)$ [4, с. 88, лемма 11.1], поэтому $P(x_0,0) \notin J_2$.

3. Пусть $x_0 = c$, тогда из соответствующего однородного условия (5) (с $\varphi(x) \equiv 0$) следует, что $u(c,0) = 0$, тогда в силу (6) (с $\rho(x) \equiv 0$) получаем $u(C_0) = \mu u(E)$, откуда $u(E) = 0$, т.е. $\tau(c) = 0$, или $u(c,0) = 0$. Следовательно, функция $u(x,y)$ не достигает своего экстремума в точке $E(c,0)$, т.е. $x_0 \neq c$.

Таким образом, при выполнении условий леммы 3 функция $u(x,y)$ своих НПЗ и НОЗ достигает в точках кривой $\overline{\Gamma}$. Лемма доказана.

Из леммы 3 вытекает

Теорема 1. *Если выполнены условия (2) и (8), то задача* A *имеет не более одного решения.*

Доказательство. При однородных краевых данных (4)–(6) из леммы 3 следует тождество $u(x,y) \equiv 0$ в области $\overline{\Omega_1}$. Тогда в силу непрерывности решения задачи A в смешанной области

$\overline{\Omega}$ и условия сопряжения (3) имеем

$$u(x,-0)\equiv 0,\quad (x,0)\in \overline{J}_j,\quad \lim_{y\to -0}(-y)^{\alpha}\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\equiv 0,\quad (x,0)\in J_j\quad (j=1,2). \tag{39}$$

Теперь, восстанавливая решение задачи A в области Ω_2 как решение задачи Коши с однородными данными (39) по формуле (14), с учётом (16), (32) получаем, что $u(x,y)\equiv 0$ в $\overline{\Omega_2}$. Следовательно, $u(x,y)\equiv 0$ во всей смешанной области $\overline{\Omega}$. Теорема доказана.

4. Существование решения задачи *A*.

Теорема 2. *Если выполнены условия (2), (7)–(10) и*

$$-1<2\beta<0,\quad \rho'(c)=0,\quad \psi'(-1)=\psi'\left(\frac{c-1}{2}\right)=0, \tag{40}$$

то решение задачи A в области Ω существует.

Доказательство. В силу равенств (19) и (32) из представлений (24) следует, что

$$\frac{1}{\Gamma(1-2\beta)}D_{c,x}^{1-2\beta}\tau(x)=\gamma_3\nu^-(x)-2\cos(\pi\beta)F_1(x),\quad c<x<1, \tag{41}$$

здесь $\gamma_3=2\gamma_1\cos(\pi\beta)$.

Точно так же в силу равенств (17) и (32) из представления (26) вытекает, что

$$\frac{1}{\Gamma(1-2\beta)}D_{-1,x}^{1-2\beta}\tau(x)=\gamma_3\nu^-(x)-F_3(x),\quad -1<x<c, \tag{42}$$

где

$$F_3(x)=\frac{2\cos(\pi\beta)(1+x)^{\beta}}{\Gamma(1-\beta)}D_{-1,x}^{-\beta}\psi'(x). \tag{43}$$

Применяя оператор $\dfrac{1}{\Gamma(1-2\beta)}D_{c,x}^{-2\beta}$ к соотношению (28), с учётом равенства (30) будем иметь

$$\frac{1}{\Gamma(1-2\beta)}D_{c,x}^{1-2\beta}\tau(x)=-\gamma_2(1-\cos(2\pi\beta))\nu^+(x)-\frac{\gamma_2\sin(2\pi\beta)}{\pi}\left\{\int_{-1}^{c}\left(\frac{c-s}{x-c}\right)^{-2\beta}\frac{\nu^+(s)\,ds}{s-x}+\right.$$

$$\left.+\int_{c}^{1}\left(\frac{s-c}{x-c}\right)^{-2\beta}\frac{\nu^+(s)\,dt}{s-x}-\int_{-1}^{1}\left(\frac{1-cs}{x-c}\right)^{-2\beta}\frac{s\nu^+(s)\,ds}{1-xs}\right\}+\frac{1}{\Gamma(1-2\beta)}D_{c,x}^{-2\beta}F_2'(x). \tag{44}$$

Вследствие (44) соотношения (41) и (42) с учётом условия (3) запишем соответственно в виде

$$\nu^+(x)=-\lambda\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+s}{1+x}\right)^{-2\beta}\left[\frac{1}{s-x}-\frac{s}{1-xs}\right]\nu^+(s)\,ds+F_4(x),\quad -1<x<c, \tag{45}$$

$$\nu^+(x)=-\lambda\left\{\int_{-1}^{c}\left(\frac{c-s}{x-c}\right)^{-2\beta}\frac{\nu^+(s)\,ds}{s-x}+\int_{c}^{1}\left(\frac{s-c}{x-c}\right)^{-2\beta}\frac{\nu^+(s)\,ds}{s-x}-\right.$$

$$\left.-\int_{-1}^{1}\left(\frac{1-cs}{x-c}\right)^{-2\beta}\frac{s\nu^+(s)\,ds}{1-xs}\right\}+F_5(x),\quad c<x<1, \tag{46}$$

где

$$\lambda = \frac{\cos(\pi\beta)}{\pi(1+\sin(\pi\beta))},$$

$$F_4(x) = \frac{1}{2\gamma_2(1+\sin(\pi\beta))\sin(\pi\beta)}\left(F_3(x) + \frac{1}{\Gamma(1-2\beta)}D^{-2\beta}_{-1,x}F_2'(x)\right), \tag{47}$$

$$F_5(x) = \frac{1}{2\gamma_2(1+\sin(\pi\beta))\sin(\pi\beta)}\left(2\cos(\pi\beta)F_1(x) + \frac{1}{\Gamma(1-2\beta)}D^{-2\beta}_{c,x}F_2'(x)\right). \tag{48}$$

В силу (7), (9), (10), (40) с учётом равенств (25), (29), (43) из представлений (47) и (48) следует, что функция $F_4(x)$ принадлежит классу $C(-1,c]\bigcap L_1[-1,c]$ и обращается в бесконечность порядка, меньшего -2β при $x\to -1$, а при $x\to c$ ограничена, функция же $F_5(x)$ принадлежит классу $C(c,1]\bigcap L_1[c,1]$ и обращается в бесконечность порядка, меньшего -2β при $x\to c$, а при $x\to 1$ ограничена.

Заметим, что соотношения (45) и (46) имеют место для $x\in(-1,c)$ и $x\in(c,1)$ соответственно. Чтобы рассматривать их на одном промежутке $(-1,1)$, заменим в (45) x на $ax-b$, а в (46) x на $bx+a$ (здесь $a=(c+1)/2$, $b=(1-c)/2$, $a+b=1$, $a-b=c$), тогда получим

$$\nu^+(ax-b) = -\lambda\int\limits_{-1}^{c}\left(\frac{1+s}{a(1+x)}\right)^{-2\beta}\left(\frac{1}{s-ax+b} - \frac{1}{1-(ax-b)s}\right)\nu^+(s)\,ds -$$

$$-\lambda\int\limits_{c}^{1}\left(\frac{1+s}{a(1+x)}\right)^{-2\beta}\left(\frac{1}{s-ax+b} - \frac{1}{1-(ax-b)s}\right)\nu^+(s)\,ds + F_4(ax-b), \quad x\in J, \tag{49}$$

$$\nu^+(bx+a) = -\lambda\left\{\int\limits_{-1}^{c}\left(\frac{c-s}{b(1+x)}\right)^{-2\beta}\frac{\nu^+(s)\,ds}{s-bx-a} + \int\limits_{c}^{1}\left(\frac{s-c}{b(1+x)}\right)^{-2\beta}\frac{\nu^+(s)\,ds}{s-bx-a} -\right.$$

$$\left.-\int\limits_{-1}^{c}\left(\frac{1-cs}{b(1+x)}\right)^{-2\beta}\frac{s\nu^+(s)\,ds}{1-(bx+a)s} - \int\limits_{c}^{1}\left(\frac{1-cs}{b(1+x)}\right)^{-2\beta}\frac{s\nu^+(s)\,ds}{1-(bx+a)s}\right\} + F_5(bx+a), \quad x\in J. \tag{50}$$

Далее в интегралах правой части равенств (49) и (50) сделаем замену переменной интегрирования $s=at-b$ для интегралов по промежутку $(-1,c)$ и $s=bt+a$ для интегралов по промежутку $(c,1)$, в результате получим следующую систему сингулярных интегральных уравнений относительно неизвестных функций $\nu_1(x)$ и $\nu_2(x)$:

$$\nu_1(x) + \lambda\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{1+t}{1+x}\right)^{-2\beta}\left(\frac{1}{t-x} - \frac{a}{1-(ax-b)(at-b)}\right)\nu_1(t)\,dt =$$

$$= -\lambda\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{1+a+bt}{a(1+x)}\right)^{-2\beta}\frac{b\nu_2(t)\,dt}{bt-ax+1} + T_1[\nu_2] + F_6(x), \quad x\in J, \tag{51}$$

$$\nu_2(x) + \lambda\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{1+t}{1+x}\right)^{-2\beta}\left(\frac{1}{t-x} - \frac{b}{1-(bx+a)(bt+a)}\right)\nu_2(t)\,dt =$$

$$= -\lambda\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{a(1-t)}{b(1+x)}\right)^{-2\beta}\frac{a\nu_1(t)\,dt}{at-bx-1} + H_1[\nu_1] + H_2[\nu_2] + F_7(x), \quad x\in J, \tag{52}$$

где

$$T_1[\nu_2] = \lambda \int_{-1}^{1} \frac{(a+bt)b\nu_2(t)\,dt}{1-(ax-b)(bt+a)},$$

$$H_1[\nu_1] = \lambda \int_{-1}^{1} \left(\frac{1-c(at-b)}{b(1+x)}\right)^{-2\beta} \frac{(at-b)a\nu_1(t)\,dt}{1-(bx+a)(at-b)},$$

$$H_2[\nu_2] = \lambda \int_{-1}^{1} \left((bt+a)\left(\frac{1-c(bt+a)}{b(1+x)}\right)^{-2\beta} - \left(\frac{1+t}{1+x}\right)^{-2\beta}\right) \frac{b\nu_2(t)\,dt}{1-(bx+a)(bt+a)}$$

– регулярные операторы; здесь

$$\nu_1(x) = \nu^+(ax-b), \quad \nu_2(x) = \nu^+(bx+a), \quad F_6(x) = F_5(ax-b), \quad F_7(x) = F_6(bx+a).$$

Уравнения системы (51), (52) являются неклассическими сингулярными интегральными уравнениями Трикоми, так как они имеют следующие две особенности:

1) "несингулярные" части ядер имеют некарлемановские сдвиги видов $ax-b$, $at-b$ в (51) и $bx+a$, $bt+a$ в (52);

2) первые интегральные операторы в их правых частях не являются регулярными, поскольку при $x=1$, $t=-1$ в (51) и при $x=-1$, $t=1$ в (52) ядра этих операторов имеют изолированные особенности первого порядка (и поэтому они выделены отдельно).

Временно считая правые части уравнений (51) и (52) известными функциями, систему уравнений (51) и (52) запишем в виде

$$\nu_1(x) + \lambda \int_{-1}^{1} \left(\frac{1+t}{1+x}\right)^{-2\beta} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{a}{1-(ax-b)(at-b)}\right) \nu_1(t)\,dt = g_1(x), \quad x \in J, \tag{53}$$

$$\nu_2(x) + \lambda \int_{-1}^{1} \left(\frac{1+t}{1+x}\right)^{-2\beta} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{b}{1-(bx+a)(bt+a)}\right) \nu_2(t)\,dt = g_2(x), \quad x \in J, \tag{54}$$

где

$$g_1(x) = -\lambda \int_{-1}^{1} \left(\frac{1+a+bt}{a(1+x)}\right)^{-2\beta} \frac{b\nu_2(t)\,dt}{bt-ax+1} + T_1[\nu_2] + F_6(x), \quad x \in J, \tag{55}$$

$$g_2(x) = -\lambda \int_{-1}^{1} \left(\frac{a(1-t)}{b(1+x)}\right)^{-2\beta} \frac{a\nu_1(t)\,dt}{at-bx-1} + H_1[\nu_1] + H_2[\nu_2] + F_7(x), \quad x \in J. \tag{56}$$

Лемма 4. *Если функция $g_1(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера при $x \in (-1,1)$ и принадлежит классу $L_p(-1,1)$, $p>1$, то решение уравнения (53) в классе функций $H(-1,1)$, в котором функция $(1+x)^{-2\beta}\nu_1(x)$ ограничена на левом конце $x=-1$ интервала $(-1,1)$ и может быть неограниченной на его правом конце $x=1$, выражается формулой*

$$\nu_1(x) = \frac{1+\cos(2\theta\pi)}{2} g_1(x) + \frac{\sin(2\theta\pi)}{2\pi} \int_{-1}^{1} \left(\frac{1+t}{1+x}\right)^{2\theta} \left(\frac{1-t}{1-x}\right)^{\theta} \left(\frac{1-c(at-b)}{1-c(ax-b)}\right)^{\theta} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{t-x} - \frac{a}{1-(ax-b)(at-b)}\right) g_1(t)\,dt, \tag{57}$$

где $\theta = -\beta/2$, $0<\theta<1/4$.

Лемма 5. *Если функция $g_2(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера при $x \in (-1,1)$ и принадлежит классу $L_p(-1,1)$, $p>1$, то решение уравнения (54) в классе $H(-1,1)$, в котором функция $(1+x)^{-2\beta}\nu_2(x)$ ограничена на левом конце $x=-1$ интервала $(-1,1)$ и может быть неограниченной на его правом конце $x=1$, выражается формулой*

$$\nu_2(x) = \frac{1+\cos(2\theta\pi)}{2} g_2(x) + \frac{\sin(2\theta\pi)}{2\pi} \int\limits_{-1}^{1} \left(\frac{1+t}{1+x}\right)^{3\theta} \left(\frac{1-t}{1-x}\right)^{2\theta} \times$$

$$\times \left(\frac{1-c(bx+a)}{1-c(bt+a)}\right)^{\theta} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{b}{1-(bx+a)(bt+a)}\right) g_2(t)\, dt. \tag{58}$$

Доказательства лемм 4 и 5 идентичны доказательству соответствующих утверждений из работ [2, 11, 12].

Теперь выражения для функции $g_1(x)$ и $g_2(x)$ из (55) и (56) подставим соответственно в формулы (57) и (58). После стандартных вычислений [5, с. 129] систему уравнений (57) и (58) преобразуем к виду

$$\tilde{\nu}_1(x) = -\int\limits_{-1}^{1} m\left(\frac{1+x}{1+s}\right) \frac{\nu_2(s)\, ds}{1+s} + H_3[\nu_2] + F_7(-x), \tag{59}$$

$$\nu_2(x) = -\int\limits_{-1}^{1} n\left(\frac{1+x}{1+t}\right) \frac{\tilde{\nu}_1(t)\, dt}{1+t} + H_4[\tilde{\nu}_1] + H_5[\nu_2] + F_8(x), \tag{60}$$

где $H_3[\nu_2]$, $H_4[\tilde{\nu}_1]$, $H_5[\nu_2]$ – регулярные операторы и

$$\tilde{\nu}_1(x) = \nu_1(-x), \quad m(y) = \frac{A(ay/b)^{-\theta}}{1+ay/b}, \quad A = \frac{\sin(\theta\pi)}{\pi}, \tag{61}$$

$$n(y) = \frac{B}{1+by/a}, \quad y = \frac{1+x}{1+t}, \quad B = \frac{\sin(\theta\pi)}{\pi}. \tag{62}$$

Таким образом, уравнение (59) совместно с уравнением (60) составляют систему интегральных уравнений относительно неизвестных функций $\tilde{\nu}_1(x)$ и $\nu_2(x)$ с сингулярной особенностью в ядре [2, 12]. Характерной особенностью уравнения (59) является то, что оно разрешено относительно функции $\tilde{\nu}_1(x)$, что позволяет исключить её из уравнения (60).

Подставляя в уравнение (60) выражение для функции $\tilde{v}_1(x)$ из (59), получаем

$$\nu_2(x) = -\int\limits_{-1}^{1} n\left(\frac{1+x}{1+t}\right) \frac{1}{1+t} \left(-\int\limits_{-1}^{1} m\left(\frac{1+t}{1+s}\right) \frac{\nu_2(s)\, ds}{1+s} + H_3[\nu_2(t)] + F_6(-t)\right) dt +$$

$$+ H_4\left[-\int\limits_{-1}^{1} m\left(\frac{1+x}{1+s}\right) \frac{\nu_2(s)\, ds}{1+s} + H_3[\nu_2(x)] + F_6(-x)\right] + H_5[\nu_2(x)] + F_7(x),$$

или

$$\nu_2(x) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{K(x,t)\nu_2(t)\, dt}{1+t} + H_6[\nu_2(x)] + F_8(x), \tag{63}$$

где

$$K(x,t) = \int\limits_{-1}^{1} n\left(\frac{1+x}{1+s}\right) m\left(\frac{1+s}{1+t}\right) \frac{ds}{1+s}, \tag{64}$$

$$H_6[v_2(x)]=-\int\limits_{-1}^{1} n\left(\frac{1+x}{1+t}\right)\frac{H_3[v_2(t)]}{1+t}\,dt+H_4\left[-\int\limits_{-1}^{1} m\left(\frac{1+x}{1+s}\right)\frac{v_2(s)\,ds}{1+s}+H_3[v_2(x)]\right]+H_5[v_2(x)]$$

– регулярный оператор, а

$$F_8(x)=-\int\limits_{-1}^{1} n\left(\frac{1+x}{1+t}\right)\frac{F_6(-t)}{1+t}\,dt+H_4[F_6(-x)]+F_7(x) \tag{65}$$

– известная функция.

Теперь оценим ядро $K(x,t)$. Для этого сделав в интеграле (64) замену $(1+s)/(1+t)=r$, будем иметь

$$K(x,t)=\int\limits_{0}^{2/(1+t)} n\left(\frac{1+x}{r(1+t)}\right)m(r)\frac{dr}{r}=K_1(x,t)-K_2(x,t),$$

где

$$K_1(x,t)=\int\limits_{0}^{+\infty} n\left(\frac{1+x}{r(1+t)}\right)m(r)\frac{dr}{r},\quad K_2(x,t)=\int\limits_{2/(1+t)}^{+\infty} n\left(\frac{1+x}{r(1+t)}\right)m(r)\frac{dr}{r}.$$

Оценим сначала интеграл $K_2(x,t)$. В силу (61) и (62) справедливы оценки

$$n\left(\frac{1+x}{r(1+t)}\right)=B\left(1+\frac{b}{a}\frac{1+x}{r(1+t)}\right)^{-1}\leqslant B,\quad m(r)\leqslant A\left(\frac{b}{a}\right)^{\theta}r^{-\theta},$$

вследствие которых получаем

$$|K_2(x,t)|=\left|\int\limits_{2/(1+t)}^{+\infty} n\left(\frac{1+x}{r(1+t)}\right)m(r)\frac{dr}{r}\right|\leqslant\left|\int\limits_{2/(1+t)}^{+\infty} BA\left(\frac{b}{a}\right)^{\theta}r^{-\theta-1}\,dr\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|BA\left(\frac{b}{a}\right)^{\theta}\frac{r^{-\theta}}{-\theta}\bigg|_{r=2/(1+t)}^{r=\infty}\right|=\frac{BA}{\theta}\left(\frac{b}{a}\right)^{\theta}\left(\frac{1+t}{2}\right)^{\theta}.$$

Следовательно, $K_2(x,t)/(1+t)$ – регулярное ядро.

Теперь вычислим интеграл

$$K_1(x,t)=\int\limits_{0}^{+\infty} n\left(\frac{1+x}{r(1+t)}\right)m(r)\frac{dr}{r}=\int\limits_{0}^{+\infty} n\left(\frac{y}{r}\right)m(r)\frac{dr}{r},$$

где $y=(1+x)/(1+t)$. Тогда в силу (61) и (62) имеем

$$K_1(x,t)=\int\limits_{0}^{+\infty} B\left(1+\frac{by}{ar}\right)^{-1}\frac{A(ar/b)^{-\theta}}{1+ba/r}\frac{dr}{r}=ABa^{1-\theta}b^{1+\theta}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{r^{-\theta}\,dr}{(ar+by)(a+br)}. \tag{66}$$

Вычислим получившийся несобственный интеграл

$$L(y)=\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{r^{-\theta}\,dr}{(ar+by)(a+br)}=\frac{1}{b(y-1)}\left(\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{r^{-\theta}\,dr}{a+br}+\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{r^{-\theta}\,dr}{ar+by}\right). \tag{67}$$

В интегралах правой части равенства (67) сделаем соответственно замену переменных интегрирования $r = bt/a$ и $r = byt/a$, затем, используя интеграл Эйлера [13, с. 168]

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\delta-1}\,dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin\delta\pi} \quad (0 < \delta < 1),$$

найдём, что

$$L(y) = \frac{1}{b^2}\left(\frac{b}{a}\right)^{1-\theta}\frac{\pi}{\sin\theta\pi}\frac{y^\theta - 1}{y^\theta(y-1)}. \tag{68}$$

Учитывая равенства (67), (68), из представления (66) получаем

$$K_1(x,t) = B\frac{y^\theta - 1}{y^\theta(y-1)}, \quad y = \frac{1+x}{1+t}. \tag{69}$$

В силу (66) и (69) уравнение (63) запишем в виде

$$\omega(x) = \int_0^{+\infty}\left(\left(\frac{1+x}{1+t}\right)^\theta - 1\right)\left(\frac{1+x}{1+t} - 1\right)^{-1}\frac{\omega(t)\,dt}{1+t} + H_8[\omega(x)] + F_9(x), \tag{70}$$

где $\omega(x) = (1+x)^\theta\nu_2(x)$, $H_8[\omega(x)] = (1+x)^\theta H_7[\omega(x)]$, $F_9(x) = (1+x)^\theta F_8(x)$, здесь $F_8(x)$ определяется из (65), а

$$H_7[v_2(x)] = H_6[v_2(x)] - \int_{-1}^{1}\frac{K_2(x,t)v_2(t)\,dt}{1+t}$$

– регулярный оператор.

Сделав в уравнении (70) замену переменных $1+t = 2e^{-s}$, $1+x = 2e^{-z}$, получим уравнение Винера–Хопфа [14, с. 55]:

$$\tilde\omega(z) = B\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{sh}(\theta(z-s)/2)\tilde\omega(s)\,ds}{\operatorname{sh}((z-s)/2)} + H_9[\tilde\omega(z)], \tag{71}$$

где $\tilde\omega(z) = \omega(2e^{-z}-1)e^{(\theta-1)z/2}$, $H_9[\tilde\omega] = H_8[e^{(1-\theta)z/2}\omega(z)] + e^{(\theta-1)z/2}F_9(2e^{-z}-1)$.

Обозначим

$$K_3(x) = \frac{B\operatorname{sh}(\theta x/2)}{\operatorname{sh}(x/2)}.$$

Индекс $\varkappa$ уравнения (71) совпадает с индексом выражения $1 - K^*(y)$, взятым с обратным знаком [14, с. 56], где

$$K^*(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iyx}K_3(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty}(\cos(yx) - i\sin(yx))K_3(x)\,dx. \tag{72}$$

В силу формулы [15, с. 518]

$$\int_0^{+\infty}\cos(ax)\frac{\operatorname{sh}(px)}{\operatorname{sh}(qx)}\,dx = \frac{\pi}{2q}\frac{\sin(p\pi/q)}{\operatorname{ch}(a\pi/q) + \cos(p\pi/q)}$$

из (72) с учётом (62) и того, что $0 \leqslant y < \infty$, $0 < \theta < 1/4$, вследствие нечётности функции $\sin(yx)K_3(x)$ получим

$$K^*(y) = 2B \int_0^{+\infty} \cos(xy) \frac{\operatorname{sh}(\theta x/2)}{\operatorname{sh}(x/2)}\, dx = \frac{2\sin^2(\theta\pi)}{\operatorname{ch}(2y\pi) + \cos(\theta\pi)} < 1. \tag{73}$$

Поэтому $\operatorname{Re}(1 - K^*(y)) > 0$.

Из равенства (73) очевидно, что $K^*(y) = O(1/\operatorname{ch}(2\pi y))$ для достаточно больших $|y|$, поэтому [14, с. 56]

$$\varkappa = -\operatorname{Ind}(1 - K^*(y)) = -\frac{1}{2\pi}(\arg(1 - K^*(y)))|_{-\infty}^{+\infty} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}(\arg(1 - K^*(+\infty)) - \arg(1 - K^*(-\infty))) = -\frac{1}{2\pi}(\operatorname{arctg} 0 - \operatorname{arctg} 0) = 0.$$

Следовательно, уравнение (71) так же, как в [2; 5, с. 140], редуцируется к интегральному уравнению Фредгольма второго рода [14, с. 46], однозначная разрешимость которого следует из единственности решения задачи A. Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Трикоми Ф.* О линейных уравнениях в частных производных второго порядка смешанного типа. М.; Л., 1947.
2. *Мирсабуров М.* Краевая задача для одного класса уравнений смешанного типа с условием Бицадзе–Самарского на параллельных характеристиках // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37. № 9. С. 1281–1284.
3. *Кароль И.Л.* Об одной краевой задаче для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа // Докл. АН СССР. 1953. Т. 88. № 2. С. 197–200.
4. *Смирнов М.М.* Уравнения смешанного типа. М., 1985.
5. *Салахитдинов М.С., Мирсабуров М.* Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами. Ташкент, 2005.
6. *Салахитдинов М.С., Исламов Н.Б.* Нелокальная краевая задача с условием Бицадзе–Самарского для уравнения параболо-гиперболического типа второго рода // Изв. вузов. Математика. 2015. № 6. С. 43–52.
7. *Исламов Н.Б.* Аналог задачи Бицадзе–Самарского для одного класса уравнений параболо-гиперболического типа второго рода // Уфимский мат. журн. 2015. Т. 7. № 1. С. 31–45.
8. *Бицадзе А.В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М., 1981.
9. *Сабитов К.Б.* О постановке краевых задач для уравнения смешанного типа с вырождением второго рода на границе бесконечной области // Сиб. мат. журн. 1980. Т. 21. № 4. С. 146–150.
10. *Хайруллин Р.С.* К задаче Трикоми для уравнения смешанного типа второго рода // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35. № 4. С. 927–936.
11. *Михлин С.Г.* Об интегральном уравнении F. Trikomi // Докл. АН СССР. 1948. Т. 59. № 6. С. 1053–1056.
12. *Полосин А.А.* Об однозначной разрешимость задачи Трикоми для специальной области // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32. № 3. С. 394–401.
13. *Фихтенгольц Г.М.* Основы математического анализа. Т. 2. М., 1968.
14. *Гахов Ф.Д., Черский Ю.И.* Уравнения типа свертки. М., 1978.
15. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1971.

Термезский государственный университет,
Узбекистан,
Национальный университет Узбекистана
им. М. Улугбека, г. Ташкент

Поступила в редакцию 04.07.2020 г.
После доработки 05.05.2021 г.
Принята к публикации 08.09.2021 г.