ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 10, с. 1397–1406

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.951

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОБРАТИМЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ВИДЕ КОМПОЗИЦИИ ТРЕУГОЛЬНЫХ

© 2021 г. В. Н. Четвериков

Исследуются обратимые линейные дифференциальные операторы по двум переменным. Задача их описания актуальна вследствие её связи с задачами преобразования систем уравнений в частных производных. В работе применяются алгебраические методы теории спектральных последовательностей цепных комплексов. Доказывается, что любой обратимый линейный дифференциальный оператор с двумя независимыми переменными в прямой сумме с тождественным отображением представляется в виде композиции не более чем четырёх треугольных обратимых операторов. Сформулирован алгоритм разложения в такую композицию, который продемонстрирован на примере.

DOI: 10.31857/S0374064121100113

Введение. В работе рассматриваются обратимые дифференциальные операторы, обратные к которым также являются дифференциальными операторами. Такие операторы возникают при решении многих математических задач (см., например, [1, § 2.3]). Среди них – задачи преобразования систем дифференциальных уравнений в случае, когда используются обратимые преобразования, в которых переменные одной системы выражаются не только через переменные другой системы, но и через производные до какого-либо конечного порядка зависимых переменных по независимым. Такие преобразования называются C-*преобразованиями* [2, п. 6.3.6]. Отсутствие законченной теории C-преобразований затрудняет их применения к задачам преобразования дифференциальных уравнений. C-преобразования линейных систем являются обратимыми линейными дифференциальными операторами. В случае нелинейных систем линеаризации C-преобразований интерпретируются как обратимые линейные дифференциальные операторы. Поэтому актуальна задача описания обратимых линейных дифференциальных операторов.

Настоящая работа продолжает исследования, начатые в работах [3–6]. В [3] доказано, что действие любого обратимого дифференциального оператора по двум переменным можно расширить на больший модуль так, что полученный оператор будет композицией треугольных обратимых операторов. В данной работе этот результат уточняется и показывается, что существует композиция, состоящая не более чем из четырёх треугольных обратимых операторов. Указанный результат доказывается более прозрачным (по сравнению с [3]) методом с целью обобщения его на случай большего количества переменных. Используемый подход аналогичен подходу, применявшемуся ранее в работах [4–6] в случае одной независимой переменной, и основан на анализе спектральных последовательностей цепных комплексов, связанных с обратимым дифференциальным оператором.

Статья организована следующим образом. В п. 1 определяются обратимые линейные дифференциальные операторы и приводится пример такого оператора. Таблицы чисел, классифицирующие обратимые операторы, вводятся в п. 2. Определение треугольных обратимых операторов и основной результат формулируются в п. 3, п. 4 посвящён последовательностям Спенсера, необходимым для доказательства основной теоремы. Само доказательство, а также алгоритм разложения обратимых операторов в виде композиции треугольных обратимых операторов приводятся в п. 5. В заключении обосновывается, почему обобщение на большее число переменных полученных результатов представляется весьма правдоподобным.

1. Обратимые линейные дифференциальные операторы. Имея в виду возможные дальнейшие обобщения, мы используем наиболее общее (алгебраическое) определение линейных дифференциальных операторов (подробное изложение алгебраической теории таких операторов см. в [2, гл. 1]).

Пусть A – $\mathbb{R}$-алгебра, P и Q – два A-модуля, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(P,Q)$ – линейное пространство $\mathbb{R}$-гомомофизмов из P в Q. В этом пространстве введём две A-модульные структуры, определённые умножениями

$$(a\Delta)(p)=a\Delta(p),\quad (a^{+}\Delta)(p)=\Delta(ap),\quad a\in A,\quad p\in P,\quad \Delta\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(P,Q). \tag{1}$$

Обозначим

$$\delta_a(\Delta)=a^{+}\Delta-a\Delta,\quad \delta_{a_0,\ldots,a_k}=\delta_{a_0}\circ\ldots\circ\delta_{a_k},\quad a_0,\ldots,a_k\in A.$$

$\mathbb{R}$-гомоморфизм $\Delta\colon P\to Q$ называют *линейным дифференциальным оператором* порядка, не превосходящего k, над алгеброй A, если $\delta_{a_0,\ldots,a_k}(\Delta)=0$ для всех $a_0,\ldots,a_k\in A$.

Линейный дифференциальный оператор из A в A называют *скалярным*.

Через $\operatorname{ord}\Delta$ будем обозначать *порядок* дифференциального оператора Δ, т.е. $k=\operatorname{ord}\Delta$, если Δ – оператор порядка, не превосходящего k, но не $k-1$.

В случае, когда $A=C^{\infty}(\mathcal{M})$ – $\mathbb{R}$-алгебра гладких (бесконечно дифференцируемых) функций на многообразии $\mathcal{M}$, а P и Q – модули гладких сечений двух локально тривиальных векторных расслоений ξ и ζ над $\mathcal{M}$ соответственно (о теории расслоений см. [7, гл. 2 и 3]), сформулированное определение эквивалентно обычному определению линейного дифференциального оператора. В частности, скалярный такой оператор на двумерном многообразии $\mathcal{M}$ представляет собой конечную сумму производных по координатам x_1, x_2 на $\mathcal{M}$ с коэффициентами из A:

$$\Delta=\sum_{i+j\leqslant k}a_{ij}(x_1,x_2)\partial_1^i\partial_2^j,\quad a_{ij}(x_1,x_2)\in A,\quad \partial_1=\frac{\partial}{\partial x_1},\quad \partial_2=\frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Если расслоения ξ и ζ тривиальны и многомерны, то P и Q – модули векторных функций на $\mathcal{M}$ соответствующей размерности, а любой оператор представляет собой матрицу скалярных операторов.

Множество всех линейных дифференциальных операторов порядка, не превосходящего k, действующих из P в Q, представляет собой A-модуль относительно и того, и другого умножения из (1). Обозначим через $\mathrm{Diff}_k^{+}(P,Q)$ A-модуль относительно второго умножения, и пусть

$$\mathrm{Diff}_*^{+}(P,Q)=\bigcup_{k=0}^{\infty}\mathrm{Diff}_k^{+}(P,Q).$$

Заметим, что если P, Q, R – A-модули, $\Delta\in\mathrm{Diff}_k^{+}(P,Q)$, $\nabla\in\mathrm{Diff}_l^{+}(Q,R)$, то $\nabla\circ\Delta\colon P\to R$ – оператор порядка, не большего $k+l$. Это утверждение вытекает из формулы

$$\delta_a(\nabla\circ\Delta)=\delta_a(\nabla)\circ\Delta+\nabla\circ\delta_a(\Delta)$$

и того факта, что отображение δ_a уменьшает порядок оператора на единицу, т.е.

$$\delta_a\colon \mathrm{Diff}_s^{+}(P,Q)\to\mathrm{Diff}_{s-1}^{+}(P,Q),\quad s>0,\quad a\in A.$$

Отметим также, что в общем случае композиция линейных дифференциальных операторов некоммутативна, даже если операторы скалярные.

Дифференциальный оператор $\Delta\colon P\to Q$ называют (*двусторонне*) *обратимым*, если существует такой дифференциальный оператор $\Delta^{-1}\colon Q\to P$, что композиция $\Delta^{-1}\circ\Delta$ является тождественным отображением модуля P, а композиция $\Delta\circ\Delta^{-1}$ – тождественным отображением модуля Q. В этом случае оператор Δ^{-1} называют *обратным* к Δ.

Отметим, что приведённое определение симметрично относительно замены Δ на Δ^{-1}. Поэтому оператор Δ^{-1} также обратим, а Δ – обратный к нему оператор.

В данной работе рассматриваются обратимые линейные дифференциальные операторы по двум переменным, т.е. на двумерном многообразии $\mathcal{M}$. Рассуждения локальны, поэтому можно считать, что $\mathcal{M}=\mathbb{R}^2$ – плоскость, а P и Q – модули векторных функций на $\mathbb{R}^2$.

Нетрудно показать, что если существует обратимый линейный дифференциальный оператор из P в Q, то векторные функции из P и Q имеют одинаковую размерность, которую мы обозначаем через m, т.е. $P = A^m = Q$, $A = C^\infty(\mathcal{M})$.

Приведём пример обратимого оператора рассматриваемого типа.

Пример 1. Рассмотрим в случае $m = 2$ операторы Δ и Δ^{-1}, которые заданы матрицами

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 - \partial_1\partial_2^2 + \partial_1^4\partial_2 & \partial_2^3 - \partial_1^2 - \partial_1^3\partial_2^2 \\ -\partial_1^2\partial_2 & 1 + \partial_1\partial_2^2 \end{pmatrix}, \quad \Delta^{-1} = \begin{pmatrix} 1 + \partial_1\partial_2^2 & -\partial_2^3 + \partial_1^2 + \partial_1^3\partial_2^2 \\ \partial_1^2\partial_2 & 1 - \partial_1\partial_2^2 + \partial_1^4\partial_2 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно убедиться в том, что эти операторы являются обратными друг к другу.

2. Таблицы чисел обратимых операторов. Пусть $\mathcal{M}$ – двумерное многообразие, $A = C^\infty(\mathcal{M})$, P, Q – A-модули гладких сечений двух локально тривиальных векторных расслоений, $\Delta\colon P \to Q$ – дифференциальный оператор порядка l. Рассмотрим следующие A-модули:

$$G_p = \mathrm{Diff}_p^+(A, Q), \quad F_k = \{\alpha \in \mathrm{Diff}_{k+l}^+(A, Q) : \alpha = \Delta \circ \beta, \ \ \beta \in \mathrm{Diff}_k^+(A, P)\}, \quad p, k \geqslant 0.$$

Так как G_p и F_k – подмодули модуля $\mathrm{Diff}_s^+(A, Q)$, где $s = \max(p, k + l)$, то их пересечение $F_k \bigcap G_p$ – также подмодуль модуля $\mathrm{Diff}_s^+(A, Q)$. Модули G_p и F_k являются модулями гладких сечений локально тривиальных векторных расслоений над $\mathcal{M}$. Обозначим соответствующие расслоения через ξ_p и ζ_k. Слои этих расслоений над точкой $\theta \in \mathcal{M}$ состоят из линейных дифференциальных операторов в точке θ, и размерность слоёв не зависит от точки. Пересечение модулей $F_k \bigcap G_p$ является модулем гладких сечений пересечения векторных расслоений ξ_p и ζ_k. Слои пересечения векторных расслоений могут иметь разную размерность, зависящую от точки $\theta \in \mathcal{M}$. Такой объект называют *векторным расслоением с особенностями*. Под *размерностью модуля* R гладких сечений векторного расслоения с особенностями над многообразием $\mathcal{M}$ мы понимаем целочисленную функцию, которая точке $\theta \in \mathcal{M}$ ставит в соответствие размерность слоя этого расслоения над θ. Обозначим её через $\dim R$. Набор элементов $\beta_1, \ldots, \beta_k$ модуля сечений векторного расслоения ξ будем называть *базисом* этого модуля в окрестности $\mathcal{U}$ точки $\theta \in \mathcal{M}$, если в каждой точке $\tilde\theta \in \mathcal{U}$ ограничения $\beta_{1,\tilde\theta}, \ldots, \beta_{k,\tilde\theta}$ этих элементов образуют базис слоя расслоения ξ над точкой $\tilde\theta$.

Пусть оператор $\Delta\colon P \to Q$ обратим, $l = \operatorname{ord}\Delta$, а L – порядок обратного оператора. Точку $\theta \in \mathcal{M}$ назовём *d-регулярной* точкой обратимого оператора Δ, если в некоторой окрестности этой точки пересечение слоёв расслоений ξ_p и ζ_k имеет постоянную размерность для любых $p = \overline{0, l}$ и $k = \overline{0, L}$. Таким образом, в окрестности d-регулярной точки функция $\dim(F_k \bigcap G_p)$ постоянна для указанных k и p. Далее будем рассматривать обратимые операторы только в окрестности d-регулярных точек.

В работах [4–6] использовался поход к классификации обратимых операторов на одномерном $\mathcal{M}$, основанный на исследовании размерностей $d_{k,p} = \dim(F_k \bigcap G_p)$. А именно, считалось, что одному классу принадлежат те и только те обратимые операторы, которые имеют одинаковые наборы чисел $d_{k,p}$, $k, p \geqslant 0$. Этот подход применим и к рассматриваемому в данной работе случаю двумерного многообразия $\mathcal{M}$. В частности, важную роль играют наборы чисел

$$\varkappa_{k,p} = d_{k,p} - d_{k-1,p} - d_{k,p-1} + d_{k-1,p-1}, \quad d_{-1,p} = 0 = d_{k,-1} = \varkappa_{-1,p} = \varkappa_{k,-1},$$

которые совпадают с размерностями модулей, исследуемых далее.

3. Треугольные обратимые операторы. Пусть $A = C^\infty(\mathcal{M})$, а P, Q – A-модули гладких сечений локально тривиальных векторных расслоений. Линейный дифференциальный оператор $\nabla\colon P \to Q$ называется *треугольным обратимым оператором* в окрестности точки $\theta \in \mathcal{M}$, если в этой окрестности существуют базисы модулей Q и P, в которых матрица оператора ∇ имеет верхнетреугольный вид, т.е. на диагонали стоят единицы, под ней – нули, а над ней – скалярные операторы.

Из определений композиции операторов и умножения матриц легко вытекает, что любой треугольный обратимый оператор обратим и что обратный к нему оператор также является треугольным. Заметим, кроме этого, что если M – матрица оператора $\nabla\colon P\to Q$ в некоторых базисах модулей Q и P, а R – какой-либо A-модуль и id_R – его тождественное отображение, то матрица оператора $\nabla\bigoplus\mathrm{id}_R\colon P\bigoplus R\longrightarrow Q\bigoplus R, (\nabla\bigoplus\mathrm{id}_R)(p\bigoplus r)=\nabla(p)\bigoplus r$ имеет блочный вид

$$\begin{pmatrix} M & 0\\ 0 & E\end{pmatrix}, \tag{2}$$

где 0 – нулевые матрицы, E – единичная матрица.

Теорема. *Пусть $\mathcal{M}$ – двумерное многообразие, $A=C^\infty(\mathcal{M})$, $P=A^m=Q$. Тогда для любого обратимого линейного дифференциального оператора $\Delta\colon P\to Q$ ненулевого порядка существует модуль R такой, что в окрестности d-регулярной точки оператора Δ оператор $\Delta\bigoplus\mathrm{id}_R$ является композицией не более чем четырёх треугольных обратимых операторов.*

4. Последовательности Спенсера модуля. Введём алгебраические структуры, необходимые для описания модулей $F_k\bigcap G_p$ и доказательства теоремы. $\mathbb{R}$-линейное отображение $\nabla\colon A\to P$ называется *дифференцированием* алгебры A со значениями в A-модуле P, если $\nabla(ab)=a\nabla(b)+b\nabla(a)$ для любых $a,b\in A$. $\mathbb{R}$-линейное отображение $\nabla\colon A\bigotimes A\to P$ называется *кососимметричным 2-дифференцированием* алгебры A со значениями в A-модуле P, если

$$\nabla(a_1,a_2)+\nabla(a_2,a_1)=0,\quad \nabla(ab,a_2)=a\nabla(b,a_2)+b\nabla(a,a_2)\quad \text{для любых}\quad a,b,a_1,a_2\in A.$$

Через $\mathrm{D}_1(P)$ обозначим множество всех дифференцирований алгебры A со значениями в A-модуле P, а через $\mathrm{D}_2(P)$ – множество всех кососимметричных 2-дифференцирований алгебры A со значениями в P. Так как любое дифференцирование является дифференциальным оператором порядка 1, то $\mathrm{D}_1(P)\subset\mathrm{Diff}_1^+(A,P)$.

В рассматриваемом нами случае любой элемент из $\mathrm{D}_1(G_p)$ имеет вид $\nabla_1\partial_1+\nabla_2\partial_2$, где $\nabla_1,\nabla_2\in G_p$, а любой элемент из $\mathrm{D}_2(G_p)$ – вид $\nabla\partial_1\wedge\partial_2$, где $\nabla\in G_p$. Определим операторы

$$S_0\colon G_p\to Q,\quad S_1\colon \mathrm{D}_1(G_p)\to G_{p+1},\quad S_2\colon\mathrm{D}_2(G_p)\to\mathrm{D}_1(G_{p+1}),$$

называемые *операторами Спенсера* [2, п. 1.1.8], соотношениями

$$S_0(\nabla)=\nabla(1),\quad S_1(\nabla_1\partial_1+\nabla_2\partial_2)=\nabla_1\circ\partial_1+\nabla_2\circ\partial_2,\quad S_2(\nabla\partial_1\wedge\partial_2)=(\nabla\circ\partial_1)\partial_2-(\nabla\circ\partial_2)\partial_1,$$

в которых $\nabla,\nabla_1,\nabla_2\in\mathrm{Diff}_*^+(A,Q)$. Последовательность

$$0\longrightarrow\mathrm{D}_2(G_{p-1})\xrightarrow{S_2}\mathrm{D}_1(G_p)\xrightarrow{S_1}G_{p+1}\xrightarrow{S_0}Q\longrightarrow 0$$

точна и называется Diff*-комплексом Спенсера порядка* $p+1$ модуля Q [2, п. 1.1.9].

В [2, п. 1.2.16] сформулированы условия на $\mathbb{R}$-алгебру A, при выполнении которых имеют место изоморфизмы A-модулей

$$\frac{\mathrm{D}_i(G_p)}{\mathrm{D}_i(G_{p-1})}\simeq\mathrm{D}_i\biggl(\frac{G_p}{G_{p-1}}\biggr),\quad i=1,2,\quad p\geqslant 1. \tag{3}$$

Показано также, что эти изоморфизмы имеются в случае $A=C^\infty(\mathcal{M})$.

Модуль G_p/G_{p-1} называется *модулем символов порядка* p модуля Q. Факторизуя Diff-комплекс Спенсера порядка $p+1$ модуля Q по Diff-комплексу Спенсера порядка p этого модуля, получаем точную последовательность

$$0\longrightarrow\mathrm{D}_2\biggl(\frac{G_{p-1}}{G_{p-2}}\biggr)\xrightarrow{S_2}\mathrm{D}_1\biggl(\frac{G_p}{G_{p-1}}\biggr)\xrightarrow{S_1}\frac{G_{p+1}}{G_p}\longrightarrow 0, \tag{4}$$

которая называется *δ-последовательностью Спенсера порядка* $p+1$ модуля Q для символов [2, п. 1.2.16]. Отображения S_1 и S_2 этой последовательности являются гомоморфизмами модулей [2, п. 1.5.10].

5. Доказательство теоремы. Для описания модулей $F_k\bigcap G_p$ применим теорию цепных комплексов и их спектральных последовательностей (см. [8, гл. 4, § 1 и гл. 9, § 1]). По возможности далее будем формулировать используемые понятия и доказывать необходимые факты этой теории.

Обозначим $L=\operatorname{ord}\Delta^{-1}$. Тогда $G_p\subset F_{p+L}$ для любого $p\geqslant 0$, так как если $\alpha\in G_p$, то $\alpha=\Delta\circ\beta$, где $\beta=\Delta^{-1}\circ\alpha\in\operatorname{Diff}^+_{p+L}(A,P)$. Модули G_p/G_{p-1} имеют фильтрацию

$$\frac{G_p}{G_{p-1}}\supset\frac{G_p\bigcap F_{p+L-1}+G_{p-1}}{G_{p-1}}\supset\ldots\supset\frac{G_p\bigcap F_k+G_{p-1}}{G_{p-1}}\supset\ldots\supset\frac{G_p\bigcap F_0+G_{p-1}}{G_{p-1}}.$$

Так как

$$S_1\colon \mathrm{D}_1(F_k)\to F_{k+1},\quad S_2\colon \mathrm{D}_2(F_k)\to \mathrm{D}_1(F_{k+1}),$$

то для $p\geqslant 0$, $k=\overline{0,p+L}$, определены последовательности

$$0\longrightarrow \mathrm{D}_2\biggl(\frac{G_{p-1}\bigcap F_{k-1}+G_{p-2}}{G_{p-2}}\biggr)\xrightarrow{S_2}\mathrm{D}_1\biggl(\frac{G_p\bigcap F_k+G_{p-1}}{G_{p-1}}\biggr)\xrightarrow{S_1}\frac{G_{p+1}\bigcap F_{k+1}+G_p}{G_p}\longrightarrow 0.$$

Это означает, что мы имеем фильтрацию комплексов (4), $p\geqslant 0$, и их спектральные последовательности (см. [8, гл. 9, § 1, п. 2]). Обозначим

$$E_{k,p}=\frac{G_p\bigcap F_k+G_{p-1}}{G_p\bigcap F_{k-1}+G_{p-1}}. \tag{5}$$

Тогда последовательности (E^0,d^0) (см. [8, гл. 9, § 1, п. 2]) записываются в виде

$$0\longrightarrow \mathrm{D}_2(E_{k-1,p-1})\xrightarrow{S_2}\mathrm{D}_1(E_{k,p})\xrightarrow{S_1}E_{k+1,p+1}\longrightarrow 0,\quad k\geqslant 0,\quad p\geqslant 0, \tag{6}$$

и представляют собой факторизации Diff-комплексов Спенсера. Именно, если элемент $\xi\in\mathrm{D}_2(E_{k-1,p-1})$ (или $\xi\in\mathrm{D}_1(E_{k,p})$) – фактор-элемент элемента $\alpha\in\mathrm{D}_2(G_{p-1})$ ($\alpha\in\mathrm{D}_1(G_p)$) в представлении (5), то $S_2(\xi)$ – фактор-элемент элемента $S_2(\alpha)\in\mathrm{D}_1(G_p)$ ($S_1(\alpha)\in G_{p+1}$ соответственно).

Отметим, что мы используем отличные от обычных обозначения и нумерацию элементов E^0, потому что для дальнейших рассуждений удобно иметь нумерацию, симметричную относительно p, k. Для доказательства симметричности $E_{k,p}$ используем следующий известный факт.

Теорема Нётер об изоморфизме (см. [8, гл. 4, введение, § 4]). *Пусть X и Y – некоторые подмодули A-модуля Z, и пусть $X+Y$ – подмодуль, порождённый множеством $X\bigcup Y$. Тогда вложение $X\subset X+Y$ переводит $X\bigcap Y$ в Y и индуцирует изоморфизм A-модулей*

$$\frac{X}{X\bigcap Y}\longrightarrow\frac{X+Y}{Y}.$$

Обозначим $X=G_p\bigcap F_k$ и $Y=G_p\bigcap F_{k-1}+G_{p-1}$. Так как $F_{k-1}\subset F_k$, то

$$X+Y=G_p\bigcap F_k+G_{p-1},\quad X\bigcap Y=G_p\bigcap F_{k-1}+G_{p-1}\bigcap F_k.$$

Применяя теорему Нётер, получаем симметричную относительно k и p формулу

$$E_{k,p}=\frac{G_p\bigcap F_k}{G_p\bigcap F_{k-1}+G_{p-1}\bigcap F_k},\quad p,k\geqslant 0. \tag{7}$$

Используя известные факты о размерностях пространств (модулей), в окрестности d-регулярной точки получаем

$$\dim E_{k,p}=\dim(G_p\bigcap F_k)-\dim(G_p\bigcap F_{k-1}+G_{p-1}\bigcap F_k)=$$

$$= d_{k,p} - \dim(G_p \bigcap F_{k-1}) - \dim(G_{p-1} \bigcap F_k) + \dim(G_p \bigcap F_{k-1} \bigcap G_{p-1} \bigcap F_k) =$$

$$= d_{k,p} - d_{k-1,p} - d_{k,p-1} + d_{k-1,p-1} = \varkappa_{k,p}.$$

По построению $F_k \subset G_{k+l}$ для $l = \operatorname{ord}\Delta$, $k \geqslant 0$. Поэтому применимы рассуждения, приведённые выше, с заменой Δ на Δ^{-1}. Так как модуль $\operatorname{Diff}_k^+(A,P)$ изоморфен модулю F_k, а модуль

$$\{\alpha \in \operatorname{Diff}_{p+L}^+(A,P) : \alpha = \Delta^{-1} \circ \beta, \quad \beta \in \operatorname{Diff}_p^+(A,Q)\}$$

– модулю G_p для $p, k \geqslant 0$, то мы получим те же элементы $E_{k,p}$, только с заменой p на k и k на p (этим и объясняется такое представление элементов E^0).

Рассмотрим теперь для разных k и p модули гомологий комплекса (6) (они составляют член E^1 спектральной последовательности, см. [8, гл. 9, § 1, п. 2]). Так как $F_{-1} = 0$, то $E_{-1,p} = 0$ и поэтому модуль гомологий в члене $E_{0,p}$ совпадает с $E_{0,p} = G_p \bigcap F_0 / G_{p-1} \bigcap F_0$ для любого $p \geqslant 0$. Так как $F_0 \subset G_l$, то $E_{0,p} = 0$ при $p > l$. Аналогично, модуль гомологий в члене $E_{k,0}$ совпадает с $E_{k,0} = G_0 \bigcap F_k / G_0 \bigcap F_{k-1}$, $k \geqslant 0$, и $E_{k,0} = 0$ при $k > L$.

Отметим, что если $E_{0,0} \neq 0$, то существует такой подмодуль P_0 модуля P, что ограничение оператора Δ на P_0 представляет собой дифференциальный оператор нулевого порядка (изоморфизм ввиду обратимости Δ). Выберем в окрестности d-регулярной точки какой-либо базис $\mathcal{B}_0$ модуля P_0. Образ $\Delta(P_0)$ является подмодулем модуля Q, а образ базиса $\mathcal{B}_0$ – базисом в $\Delta(P_0)$. Дополним базисы $\mathcal{B}_0$ и $\Delta(\mathcal{B}_0)$ до базисов в P и Q соответственно. В этих базисах матрица оператора Δ имеет блочный вид (2), и мы можем рассматривать обратимый оператор с матрицей M меньшей размерности. Поэтому далее считаем, что $E_{0,0} = 0$.

Последовательно для $p = \overline{l,1}$ в окрестности d-регулярной точки рассмотрим базисы модулей $E_{0,p}$ и какие-либо элементы из $G_p \bigcap F_0$, факторами которых они являются. Обозначим их через $\beta_1, \ldots, \beta_m$. Получим базис модуля F_0.

По определению модуль гомологий в члене $\mathrm{D}_2(E_{k-1,p-1})$ совпадает с ядром S_2, а значит, является подмодулем в $\mathrm{D}_2(E_{k-1,p-1})$. Модуль гомологий в члене $\mathrm{D}_1(E_{k,p})$ представляет собой фактор-модуль ядра S_1 по образу S_2. Наконец, модуль гомологий в члене $E_{k+1,p+1}$ – это фактор-модуль модуля $E_{k+1,p+1}$ по образу S_1. Из соотношений (3) и (7) следуют равенства

$$\mathrm{D}_i(E_{k,p}) = \frac{\mathrm{D}_i(G_p \bigcap F_k)}{\mathrm{D}_i(G_p \bigcap F_{k-1} + G_{p-1} \bigcap F_k)}, \quad i = 1, 2.$$

Таким образом, элементы гомологий комплексов (6) представляют собой факторы элементов из $\mathrm{D}_i(G_p \bigcap F_k)$, $i = 1, 2$, или из $G_p \bigcap F_k$. Далее фактор элемента $\beta \in \mathrm{D}_i(G_p \bigcap F_k)$ в $\mathrm{D}_i(E_{k,p})$, $i = 1, 2$, (или $\beta \in G_p \bigcap F_k$ в $E_{k,p}$) будем обозначать через $[\beta]$. При этом элемент β может быть определён или не определён, но определён фактор-элемент.

Отметим, что если $[\alpha]$ – ненулевой элемент модуля гомологий в члене $\mathrm{D}_2(E_{k-1,p-1})$, то $\alpha \in \mathrm{D}_2(G_{p-1} \bigcap F_{k-1})$, $\alpha \notin \mathrm{D}_2(G_{p-2} \bigcap F_{k-1})$, $\alpha_1 = S_2(\alpha) \in \mathrm{D}_1(G_i \bigcap F_k + F_{k-1})$ для некоторого $i \leqslant p-1$ и $S_1[\alpha_1] = 0$, поскольку $S_1 \circ S_2 = 0$. Но так как $\alpha \notin \mathrm{D}_2(G_{p-2} \bigcap F_{k-1})$, то $[\alpha_1] \notin S_2(\mathrm{D}_2(E_{k-1,i-1}))$, а значит, $[\alpha_1]$ – элемент модуля гомологий в члене $\mathrm{D}_1(E_{k,i})$. Таким образом, S_2 отображает элемент модуля гомологий в члене $\mathrm{D}_2(E_{k-1,p-1})$ в элемент модуля гомологий в члене $\mathrm{D}_1(E_{k,i})$. Аналогично S_1 отображает каждый ненулевой элемент $[\alpha_2]$ модуля гомологий в члене $\mathrm{D}_1(E_{k,p})$ в элемент модуля гомологий в члене $E_{k+1,i+1}$ для некоторого номера $i \leqslant p-1$, зависящего от $[\alpha_2]$.

С другой стороны, используя известные свойства спектральных последовательностей [8, гл. 9, § 1, п. 2], несложно доказать, что любой ненулевой элемент $[\alpha_1]$ модуля гомологий в члене $\mathrm{D}_1(E_{k,p})$ представляет собой образ относительно S_2 некоторого элемента $[\alpha]$ модуля гомологий в члене $\mathrm{D}_2(E_{k-1,i-1})$, $i > p$. Аналогично любой ненулевой элемент модуля гомологий в члене $E_{k+1,p+1}$ является образом относительно S_1 некоторого элемента модуля гомологий в члене $\mathrm{D}_1(E_{k,i})$, $i > p$.

Покажем, как в окрестности d-регулярной точки выбрать элементы из $E_{k,p}$, $p, k \geqslant 0$, порождающие над A модули гомологии комплексов (6), и как получить все возможные дифференциальные соотношения на них. Используем для этого индукцию по k. Случай $k = 0$

мы уже рассмотрели: фактор-элементы $[\beta_1], \ldots, [\beta_m]$ порождают A-модули $E_{0,p}$, $p \geqslant 0$, а значит, и модули гомологии в членах $\mathrm{D}_2(E_{0,p})$, $\mathrm{D}_1(E_{0,p})$, $E_{0,p}$, $p \geqslant 0$.

Предположим, что элементы $[\beta_1], \ldots, [\beta_{m_1}]$ $(m_1 \geqslant m)$ порождают модули гомологий в членах $\mathrm{D}_2(E_{i,p})$, $\mathrm{D}_1(E_{i,p})$, $E_{i,p}$, $i = \overline{0, k-1}$, $p \geqslant 0$. Для каждого $p \geqslant 0$ рассмотрим базисы модулей гомологий в членах $\mathrm{D}_2(E_{k,p})$, $\mathrm{D}_1(E_{k,p})$, $E_{k,p}$. Базисный элемент гомологий из $\mathrm{D}_2(E_{k,p})$ имеет вид $[\nabla_1]\partial_1 + [\nabla_2]\partial_2$, где $[\nabla_1], [\nabla_2] \in E_{k,p}$, а базисный элемент гомологий из $\mathrm{D}_1(E_{k,p})$ – вид $[\nabla]\partial_1 \wedge \partial_2$, $[\nabla] \in E_{k,p}$. Таким образом, все указанные базисные элементы порождаются набором элементов из $E_{k,p}$. Выберем в окрестности d-регулярной точки какой-либо базис этого набора и проделаем эту процедуру для каждого $p \geqslant 0$. Получим элементы $[\beta_{m_1+1}], \ldots, [\beta_{m_2}]$ из $E_{k,p}$, $p \geqslant 0$ $(m_2 \geqslant m_1)$.

Найдём теперь дифференциальные соотношения на $[\beta_1], \ldots, [\beta_{m_2}]$. Рассмотрим какой-либо элемент $[\beta_l]$, $l = \overline{m_1+1, m_2}$. По построению этот элемент порождает гомологию или в члене $E_{k,p}$, или в члене $\mathrm{D}_1(E_{k,p})$ для некоторого $p \geqslant 0$. В первом случае, как отмечалось выше, существует такой элемент $[\alpha_2] = [\nabla_1]\partial_1 + [\nabla_2]\partial_2$ модуля гомологий в члене $\mathrm{D}_1(E_{k-1,i})$ для некоторого $i > p$, что $S_1[\alpha_2] = [\nabla_1] \circ \partial_1 + [\nabla_2] \circ \partial_2 = [\beta_l]$. По предположению шага индукции имеем $[\nabla_s] = \sum_{j=1}^{m_1}[\beta_j] \circ a_{sj}$, $a_{sj} \in A$, $s = 1, 2$, а значит,

$$[\beta_l] = \sum_{j=1}^{m_1}[\beta_j] \circ \nabla_{lj}, \tag{8}$$

где ∇_{lj} – скалярные дифференциальные операторы. Во втором случае существует элемент $[\alpha] = [\nabla]\partial_1 \wedge \partial_2$ модуля гомологий в члене $\mathrm{D}_2(E_{k-1,i-1})$, $i > p$, такой, что элемент $S_2[\alpha] = ([\nabla] \circ \partial_1)\partial_2 - ([\nabla] \circ \partial_2)\partial_1$ равен или $[\beta_l]\partial_1 + [\beta_0]\partial_2$, или $[\beta_0]\partial_1 + [\beta_l]\partial_2$ для некоторого $[\beta_0] \in E_{k,p}$. Таким образом, в обоих случаях имеем соотношения (8).

Результатом этих рассуждений для всех k является набор $[\beta_l]$, $l = \overline{1, m_0}$ $(m_0 \geqslant m)$, и соотношения вида

$$[\beta_l] = \sum_{j=1}^{l-1}[\beta_j] \circ \nabla_{lj}, \quad l = \overline{m+1, m_0}. \tag{9}$$

Выберем какие-либо представители $\beta_1, \ldots, \beta_m$ из классов эквивалентностей $[\beta_1], \ldots, [\beta_m]$. Тогда в силу соотношений

$$\beta_l = \sum_{j=1}^{l-1}\beta_j \circ \nabla_{lj}, \quad l = \overline{m+1, m_0}, \tag{10}$$

получаем представителей $\beta_{m+1}, \ldots, \beta_{m_0}$ из классов эквивалентностей $[\beta_{m+1}], \ldots, [\beta_{m_0}]$.

Соотношения (10) можно записать в матричном виде

$$-\beta^{(1)}M_1 + \beta^{(23)}(E - M_2) = 0,$$

где $\beta^{(1)}$ – матрица, составленная из столбцов $\beta_1, \ldots, \beta_m$, а $\beta^{(23)}$ – матрица, составленная из столбцов $\beta_{m+1}, \ldots, \beta_{m_0}$, матрицы M_1 и M_2 определяются равенствами $M_1 = (\nabla_{lj})$, где $l = \overline{m+1, m_0}$, $j = \overline{1, m}$, $M_2 = (\nabla_{lj})$, где $l = \overline{m+1, m_0}$, $j = \overline{m+1, m_0}$, причём $\nabla_{lj} = 0$ при $j \geqslant l$. Из последнего равенства следует, что матрица $E - M_2$ является верхнетреугольной с единицами на диагонали. Поэтому соответствующий оператор является треугольным обратимым.

Последовательно для $k = \overline{l, L}$ в окрестности d-регулярной точки найдём базисы модулей $E_{k,0}$ и какие-либо элементы из $G_0 \bigcap F_k$, факторами которых они являются. Обозначим их через $e_1, \ldots, e_m$. Получим базис модуля F_0. Операторы $\beta_1, \ldots, \beta_m$, $e_1, \ldots, e_m$ линейно независимы над A и являются A-линейными комбинациями операторов $\beta_1, \ldots, \beta_{m_0}$. Среди элементов β_l, $l = \overline{m+1, m_0}$, выберем такие, которые вместе с $\beta_1, \ldots, \beta_m$, $e_1, \ldots, e_m$ образуют базис A-линейной оболочки $\mathrm{span}_A\{\beta_1, \ldots, \beta_{m_0}\}$. Обозначим матрицу, составленную из этих элементов, через $\beta^{(3)}$, а матрицу, составленную из элементов $e_1, \ldots, e_m$, через $\beta^{(2)}$. Тогда матрица $\beta^{(23)}$ представляется в виде

$$\beta^{(23)} = \beta^{(1)}T_2 + (\beta^{(2)}\beta^{(3)})T_1,$$

где $(\beta^{(2)}\beta^{(3)})$ – блочная матрица, составленная из матриц $\beta^{(2)}$ и $\beta^{(3)}$, а T_2 и T_1 – матрицы элементов из A, матрица T_1 обратима. Соотношения (10) записываются в блочно-матричном виде

$$\beta^{(1)}M_3 + (\beta^{(2)}\beta^{(3)})\Delta_1 = 0, \tag{11}$$

где $M_3 = T_2(E-M_2)-M_1$, а $\Delta_1 = T_1(E-M_2)$ – матрица треугольного обратимого оператора по определению. Отметим также, что каждое соотношение в (11) представляет собой A-линейную комбинацию соотношений (10) и наоборот.

Аналогично, меняя в рассуждениях местами $\{F_k\}$ и $\{G_p\}$, получаем элементы $[\tilde\beta_l]$, $l = \overline{1, m_0}$, и соотношения вида (9) на них. Так как и $[\beta_l]$, $l = \overline{1, m_0}$, и $[\tilde\beta_l]$, $l = \overline{1, m_0}$, порождают модули гомологий одних и тех же комплексов (6), то A-линейные оболочки $\{[\beta_l]\}$ и $\{[\tilde\beta_l]\}$ совпадают, а значит, наборы $\mathcal{B} = ([\beta_1], \ldots, [\beta_{m_0}])$ и $\tilde{\mathcal{B}} = ([\tilde\beta_1], \ldots, [\tilde\beta_{m_0}])$ образуют разные базисы одного и того же модуля. Пусть T – матрица перехода от базиса $\mathcal{B}$ к базису $\tilde{\mathcal{B}}$. Тогда T – обратимая матрица элементов из A, т.е. обратимый дифференциальный оператор нулевого порядка, и $\tilde{\mathcal{B}} = T\mathcal{B}$. Дифференциальные соотношения на $[\tilde\beta_1], \ldots, [\tilde\beta_{m_0}]$ аналогичны соотношениям (9), но матрицы $\beta^{(1)}$ и $\beta^{(2)}$ меняются местами. Рассуждая аналогично предыдущему, получаем соотношения вида

$$\beta^{(2)}N_3 + (\beta^{(1)}\beta^{(3)})\Delta_2 = 0, \tag{12}$$

где Δ_2 – матрица треугольного обратимого оператора.

Так как соотношения (12) и (11) определяются гомологиями одних и тех же комплексов (6), то соотношения (12) дифференциальным образом выражаются через соотношения (11), и наоборот, соотношения (11) выражаются через соотношения (12). Это означает, что существует обратимый дифференциальный оператор с матрицей Δ_3 такой, что соотношения (12) совпадают с соотношениями

$$\beta^{(1)}M_3\Delta_3 + (\beta^{(2)}\beta^{(3)})\Delta_1\Delta_3 = 0. \tag{13}$$

Отметим также, что соотношения и из (11), и из (12) разбиваются на две группы: 1) соответствующие гомологиям в членах $E_{k,p}$ и 2) соответствующие гомологиям в членах $\mathrm{D}_1(E_{k,p})$. Соотношения первой группы из (12) выражаются A-линейным образом через соотношения первой группы из (11). А соотношения второй группы из (12) определяются с точностью до образа S_2, а значит, выражаются A-линейным образом через соотношения второй группы из (11) и дифференциальным образом через соотношения первой группы из (11). Поэтому Δ_3 является матрицей треугольного обратимого оператора.

Кроме того, так как столбцы матрицы $\beta^{(1)}$ составляют базис модуля F_0, то $\beta^{(1)}$ – матрица оператора Δ в соответствующих базисах модулей P и Q. Аналогично столбцы матрицы $\beta^{(2)}$ составляют базис модуля G_0, а значит $\beta^{(2)}$ – единичная матрица. Учитывая это, в силу соотношений (12) получаем, что матрица N_3 представляется в виде произведения блочной матрицы $(-\Delta - \beta^{(3)})$ и матрицы Δ_2.

Умножая соотношения (12) справа на матрицу Δ_2^{-1}, получаем

$$(\beta^{(1)}\beta^{(2)}\beta^{(3)}) \begin{pmatrix} E & 0 \\ -\Delta & -\beta^{(3)} \\ 0 & E \end{pmatrix} = 0. \tag{14}$$

Аналогично умножая соотношения (13) справа на матрицу Δ_2^{-1}, будем иметь

$$\beta^{(1)}M_3\Delta_3\Delta_2^{-1} + (\beta^{(2)}\beta^{(3)})\Delta_1\Delta_3\Delta_2^{-1} = 0. \tag{15}$$

Так как соотношения (12) и (13) совпадают между собой, то совпадают между собой и соотношения (14) и (15), а значит, матрица $\Delta_1\Delta_3\Delta_2^{-1}$ имеет блочный вид

$$\begin{pmatrix} -\Delta & -\beta^{(3)} \\ 0 & E \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что

$$\begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} = \Delta_4 \begin{pmatrix} -\Delta & -\beta^{(3)} \\ 0 & E \end{pmatrix}, \quad \Delta_4 = \begin{pmatrix} -E & -\beta^{(3)} \\ 0 & E \end{pmatrix}.$$

Поэтому имеем разложение

$$\begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} = \Delta_4\Delta_1\Delta_3\Delta_2^{-1}. \tag{16}$$

Следовательно, оператор $\Delta \bigoplus \mathrm{id}_R$ представляется в виде композиции треугольных обратимых операторов с матрицами Δ_4, Δ_1, Δ_3 и Δ_2^{-1}. Теорема доказана.

Из сформулированных результатов и доказательства теоремы вытекает, что для разложения обратимых линейных дифференциальных операторов в композицию треугольных можно применять следующий

Алгоритм.

Шаг 1. Последовательно для $k = \overline{0, L}$ найти образующие модулей $E_{k,p}$ и модулей гомологий комплекса (6) для $p \geqslant 0$. Получить набор $\beta_1, \ \ldots, \ \beta_{m_0}$ и соотношения вида (10) на них.

Шаг 2. Преобразовать соотношения вида (10) к виду (11) и вычислить матрицу Δ_1.

Шаг 3. Поменять модули G_p и F_k местами и преобразовать соотношения вида (10) к виду (12), вычислить матрицы Δ_2 и Δ_2^{-1}.

Шаг 4. Найти матрицу Δ_3.

Шаг 5. Записать представление (16).

Пример 2. Применим данный алгоритм к оператору Δ из примера 1. Для этого введём следующие обозначения для операторов:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \beta_1 = \Delta \circ e_1, \quad \beta_2 = \Delta \circ e_2.$$

На шаге $k = 1$ алгоритма получаем элемент β_3 и соотношение

$$\beta_3 = \beta_1 \circ \partial_2 + \beta_2 \circ \partial_1 = \begin{pmatrix} -\partial_1^3 + \partial_2 \\ \partial_1 \end{pmatrix}, \tag{17}$$

на шаге $k = 3$ – элемент β_4 и соотношения

$$\beta_4 = \beta_3 \circ \partial_2^2 - \beta_2 = \begin{pmatrix} \partial_1^2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad e_1 = \beta_3 \circ \partial_1\partial_2 + \beta_1,$$

а на шаге $k = 5$ – соотношение

$$e_2 = e_1 \circ \partial_1^2 - \beta_4.$$

Поменяв модули G_p и F_k местами, приходим к тем же соотношениям, кроме соотношения (17). Вместо него получаем соотношение

$$\beta_3 = e_1 \circ \partial_2 - \beta_4 \circ \partial_1. \tag{18}$$

Разность между равенствами (17) и (18) даёт соотношение $(\beta_1 - e_1) \circ \partial_2 + (\beta_2 + \beta_4) \circ \partial_1 = 0$, которое является следствием остальных соотношений. Вычисляя матрицы Δ_3, Δ_1, Δ_2, Δ_2^{-1} и Δ_4, получаем искомое разложение:

$$\begin{pmatrix} 1 - \partial_1\partial_2^2 + \partial_1^4\partial_2 & \partial_2^3 - \partial_1^2 - \partial_1^3\partial_2^2 & 0 & 0 \\ -\partial_1^2\partial_2 & 1 + \partial_1\partial_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \partial_1^3 - \partial_2 & -\partial_1^2 \\ 0 & -1 & -\partial_1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \circ$$

$$\circ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -\partial_1^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -\partial_2^2 & -\partial_1\partial_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \partial_1 & 1 & 0 & 0 \\ -\partial_2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -\partial_1\partial_2 & \partial_2^2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ \partial_1^2\partial_2 & -1 - \partial_1\partial_2^2 & -\partial_1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Заключение. В работе доказано, что обратимые линейные дифференциальные операторы с двумя независимыми переменными разлагаются в композицию треугольных обратимых операторов. В качестве следствия доказательства этого результата сформулирован алгоритм разложения, который продемонстрирован на примере. Основой приведённого доказательства является использование δ-последовательности Спенсера, определяемой для любого количества переменных. Поэтому обобщение полученных результатов на большее количество переменных представляется вполне возможным.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект 0705-2020-0047) и Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 19-07-00817 и 20-07-00279).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Громов М.* Дифференциальные соотношения с частными производными. М., 1990.
2. *Виноградов А.М., Красильщик И.С., Лычагин В.В.* Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений. М., 1986.
3. *Chetverikov V.N.* Invertible linear differential operators on two-dimensional manifolds. Preprint of the Erwin Schrodinger Intern. Inst. for Math. Physics. Vienna, 1993. № 55.
4. *Четвериков В.Н.* Анализ и синтез обобщённых обратимых дифференциальных операторов с одной независимой переменной// Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 11. С. 1534–1544.
5. *Chetverikov V.N.* Invertible linear ordinary differential operators // J. of Geom. and Phys. 2017. V. 113. P. 10–27.
6. *Chetverikov V.N.* Invertible linear ordinary differential operators and their generalizations // J. of Geom. and Phys. 2020. V. 151. Art. 103617.
7. *Хьюзмоллер Д.* Расслоенные пространства. М., 1970.
8. *Спеньер Э.* Алгебраическая топология. М., 1971.

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана

Поступила в редакцию 09.06.2021 г.
После доработки 09.06.2021 г.
Принята к публикации 08.09.2021 г.