ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 10, с. 1407–1420

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.226+517.956.227

О ПОВЕДЕНИИ СПЕКТРА ВОЗМУЩЁННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ СТЕКЛОВА СО СЛАБОЙ СИНГУЛЯРНОСТЬЮ

© 2021 г. **А. Г. Чечкина**

Для уравнения Лапласа в ограниченной области пространства $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 3$, граница которой содержит кусок Γ гиперплоскости L, рассматривается краевая задача типа Стеклова с однородным условием Дирихле на одной части границы и условием Стеклова на другой. Вне Γ задано условие Дирихле. На Γ граничные условия задаются следующим образом. Пусть R_δ – $(n-1)$-мерная решётка с ребром δ в L, а $A_{\varepsilon\delta}$ и $A_{2\varepsilon\delta}$ – совокупности шаров с центрами в вершинах решётки R_δ радиусов $\varepsilon\delta$ и $2\varepsilon\delta$ соответственно, $B_{\varepsilon\delta}=A_{2\varepsilon\delta}\setminus A_{\varepsilon\delta}$, $\widetilde{A}_{\varepsilon\delta}=\Gamma\bigcap A_{\varepsilon\delta}$ и $\widetilde{B}_{\varepsilon\delta}=\Gamma\bigcap B_{\varepsilon\delta}$, где ε – малый параметр и $\delta=\delta(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$. На куске Γ условие Дирихле задано только на множестве $\widetilde{A}_{\varepsilon\delta}$. Вне этого множества задано спектральное условие Стеклова, коэффициент в котором вне множества $\widetilde{B}_{\varepsilon\delta}$ равен единице, а на множестве $\widetilde{B}_{\varepsilon\delta}$ он равен $(\varepsilon\delta)^{-m}$, где $m<2$. Для предельных (усреднённых) задач и исходной задачи получены отклонения их решений в норме соболевского пространства W_2^1, а также оценки отклонения собственных значений.

DOI: 10.31857/S0374064121100125

Введение. Исследования краевых задач в областях с сингулярно возмущённой плотностью были начаты более века назад (см., например, [1]).

В [2] авторы изучали случай одной сингулярности для обыкновенного дифференциального оператора. В работе [3] рассматривалось колебание тела, имеющего большой набор существенных сингулярностей, расположенных периодически вдоль границы (более общий случай см. [4]). Дальнейшее развитие эти задачи получили в работах [5–7]. Работы [8] и [9] посвящены изучению аналогичных задач для стационарой системы линейной теории упругости с непериодическими быстро меняющимися граничными условиями и большим количеством концентрированных масс около границы. В работах [10] и [11] детально изучено поведение собственных значений и собственных функций оператора Лапласа в областях с непериодическими слабыми сингулярностями (стохастический случай см. в [12] и [13]). В работе [14] применён “unfolding”-метод для изучения задач с сингулярностями. Отметим также работу [15], в которой обнаружены новые эффекты влияния одной массы на другую. В работах [16] и [17] построены асимптотики собственных значений задач с концентрированными массами, периодически расположенными вдоль части границы, причём расстояния между массами имеют тот же порядок, что и диаметр масс. Изучены “лёгкие”, “средние” и “тяжёлые” массы.

Задачи с краевым условием Стеклова исследовались во многих работах. В работе [18] проанализирована вся совокупность случаев, возникающих при быстрой смене условия Стеклова и условия Дирихле. Особенности асимптотики спектра задач Стеклова в областях с сингулярностями обнаружены в работах [19–24]. В работах [19–21] найдены асимптотики собственных значений и собственных функций задачи в области, разделённой перфорированным интерфейсом (так называемым “ситом”), на котором поставлено условие Стеклова. Работы [22–24] посвящены построению асимптотик собственных значений и собственных функций в областях с малой полостью при стремлении малого параметра, характеризующего размер полости, к нулю. В статье [25] рассматривается плоская задача с условием Стеклова, чередующимся с условием Дирихле, при этом предполагается, что размеры участков Дирихле и Стеклова имеют один и тот же порядок малости. Получены асимптотики собственных значений. Задачи с быстро меняющимся типом граничных условий изучались также в работах [26–31], в которых рассматривались в том числе и спектральные задачи.

Более подробно остановимся на недавних работах [32–34]. В работе [32] исследуется задача для системы теории упругости в анизотропной трёхмерной среде с условием Дирихле, которое чередуется со спектральным условием Винклера–Стеклова. В ней с помощью техники декомпозиции Флоке–Блоха строится семейство спектральных задач типа Винклера–Стеклова в полубесконечной призме, которое потом используется в доказательстве теорем о сходимости собственных значений и собственных функций исходной задачи. Масштабированные пределы собственных значений исходной задачи оказываются нижними гранями соответствующих семейств собственных значений задач в призме. Кроме низкочастотных колебаний рассмотрены также высокочастотные колебания и доказаны теоремы о сходимости соответствующих семейств собственных значений исходной задачи. В работах [33] и [34] рассматриваются спектральные задачи для системы теории упругости в ограниченной области с чередующимися условиями Винклера–Робэна (упругое закрепление) и однородного условия Неймана (нулевое напряжение). В зависимости от значений параметров (диаметра пятен, на которых задано условие Винклера–Робэна, и расстояния между ближайшими пятнами) и коэффициентов в условии Винклера–Робэна исходной задачи получены различные предельные краевые условия (однородные условия Винклера–Робэна, Неймана и Дирихле). При этом применена техника асимптотического анализа для построения усреднённого спектра и доказательства сходимости собственных значений и собственных функций.

В настоящей работе рассматривается многомерная задача (размерность больше или равна трём) с быстрой сменой однородного условия Дирихле и условия Стеклова со слабой сингулярностью. Предполагается, что размеры сингулярностей и расстояния между ними имеют различный порядок, что приводит к нетривиальному смещению спектра в критическом случае. В работе даются в соответствующих нормах оценки отклонения (оценки скорости сходимости) решений соответствующих краевых задач от решений предельных краевых задач при стремлении малого параметра к нулю, кроме этого аналогичные оценки получены для собственных значений соответствующей спектральной задачи.

В п. 1 работы ставится задача и даются определения нужных в дальнейшем понятий, а также формулируются основные её теоремы. В п. 2 доказываются вспомогательные утверждения. В п. 3 приводятся те результаты из монографии [35], которые используются в п. 4 при доказательстве основных утверждений работы.

1. Постановка задачи. Обозначим через $x = (x_1, \ldots, x_n)$ декартовы координаты в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$. Пусть Ω – область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей $\partial\Omega$. Предполагается, что $\partial\Omega = \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2$, где Γ_2 – область в гиперплоскости $x_n = 0$, состоящая из трёх частей α_ε, β_ε и γ_ε. Здесь $\gamma_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^{N_\delta} \gamma_\varepsilon^i$ – дизъюнктное объединение $(n-1)$-мерных шаров, а $\beta_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^{N_\delta} \beta_\varepsilon^i$ – дизъюнктное объединение $(n-1)$-мерных шаровых слоёв, $\alpha_\varepsilon = \Gamma_2 \setminus (\beta_\varepsilon \bigcup \gamma_\varepsilon)$. Обозначим $\Gamma_\varepsilon = \alpha_\varepsilon \bigcup \beta_\varepsilon$.

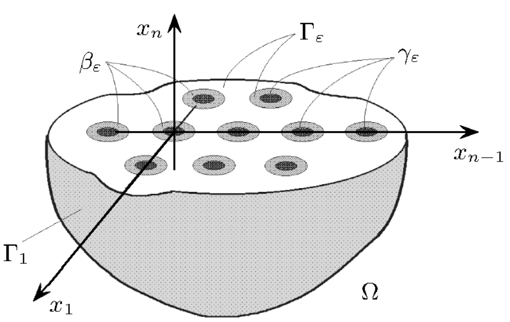

Рис. 1. Область с микронеоднородной структурой границы.

Поясним строение области Γ_2. Через $\xi = x/\delta$ обозначим “растянутые” координаты, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, а через γ_0 и β_0 – $(n-1)$-мерные шар

$$\{\xi : \|\xi\|_1^2 + \ldots\ldots + \xi_{n-1}^2 < \varepsilon^2, \quad \xi_n = 0\}$$

и шаровой слой

$$\{\xi : \varepsilon^2 < \xi_1^2 + \ldots + \xi_{n-1}^2 < 2\varepsilon^2, \quad \xi_n = 0\}$$

соответственно. Пусть γ и β – множества, полученные всевозможными сдвигами множеств γ_0 и β_0 на целочисленные векторы $(k_1, \ldots, k_{n-1}, 0)$, $k_i \in \mathbb{Z}$, $i = \overline{1, n-1}$, а $\widetilde{\gamma}_\varepsilon$ и $\widetilde{\beta}_\varepsilon$ – гомотетичные сжатия $\delta\gamma$ и $\delta\beta$ множеств γ и β соответственно. Тогда (рис. 1)

$$\gamma_\varepsilon = \widetilde{\gamma}_\varepsilon \bigcap \partial\Omega, \quad \beta_\varepsilon = \widetilde{\beta}_\varepsilon \bigcap \partial\Omega, \quad \alpha_\varepsilon = \Gamma_2 \setminus (\beta_\varepsilon \bigcup \gamma_\varepsilon).$$

Подчеркнём, что рассматривается случай, когда параметр $\delta(\varepsilon)$, определяющий характерное расстояние между шарами γ_ε^i, стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$. Отметим также, что $N_\delta = O(1/\delta^{n-1})$. В дальнейшем буквой C с нижними индексами или без них обозначаются постоянные.

Рассмотрим следующую спектральную задачу:

$$\begin{cases} \Delta u_\varepsilon^k = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \\ u_\varepsilon^k = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1 \bigcup \gamma_\varepsilon, \\ \dfrac{\partial u_\varepsilon^k}{\partial x_n} = \lambda_\varepsilon^k \rho^\varepsilon(x) u_\varepsilon^k \quad \text{на} \quad \Gamma_\varepsilon, \end{cases} \tag{1}$$

где

$$\rho^\varepsilon(x) = \begin{cases} (\varepsilon\delta)^{-m}, & \text{если} \ \ x \in \beta_\varepsilon, \\ 1, & \text{если} \ \ x \in \alpha_\varepsilon. \end{cases}$$

Изучается случай $m < 2$ (слабая сингулярность).

Собственные значения λ_ε^k, $k \in \mathbb{N}$, занумерованы в порядке неубывания, т.е. $\lambda_\varepsilon^1 \leqslant \lambda_\varepsilon^2 \leqslant \ldots \ldots \leqslant \lambda_\varepsilon^k \leqslant \ldots$, и повторяются с учётом кратности. При этом

$$\int\limits_{\Gamma_2} \rho^\varepsilon(\widehat{x}, 0) u_\varepsilon^k(\widehat{x}, 0) u_\varepsilon^l(\widehat{x}, 0)\, d\widehat{x} = \delta_{kl},$$

здесь $\widehat{x} = (x_1, \ldots, x_{n-1})$.

Для формулировки теорем нам понадобится следующая величина:

$$P := \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon^{n-2}}{\delta(\varepsilon)}.$$

Обозначим (рис. 2)

$$D = \{\xi \in \mathbb{R}^n : -1/2 < \xi_i < 1/2, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad \xi_n < 0\},$$

$$\Sigma = \{\xi \in \mathbb{R}^n : -1/2 < \xi_i < 1/2, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad \xi_n = 0\}.$$

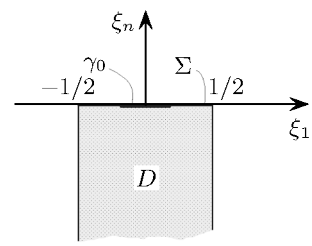

Рис. 2. Ячейка периодичности.

Пусть функция W^ε, периодическая по переменным $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$, является первой собственной функцией задачи с условием Стеклова

$$\begin{cases} \Delta W^\varepsilon = 0 \quad \text{в} \quad D, \\ W^\varepsilon = 0 \quad \text{на} \quad \gamma_0, \\ \dfrac{\partial W^\varepsilon}{\partial \xi_n} = \theta_\varepsilon W^\varepsilon \quad \text{на} \quad \Sigma \backslash \gamma_0. \end{cases}$$

Зададим функцию w_ε^δ формулой

$$w_\varepsilon^\delta(x) = 1 + \psi(x_n)(W^\varepsilon(x/\delta) - 1) \tag{2}$$

и продолжим её по периодичности относительно $\widehat{x}$. Здесь $\psi(t)$ – гладкая срезающая функция одной переменной, $0 \leqslant \psi \leqslant 1$, причём $\psi \equiv 1$ в некоторой достаточно малой окрестности области Γ_2. Свойства функции w_ε^δ приведены в лемме в начале следующего пункта и подробно изучены в работе [18].

Сформулируем далее основные результаты, которые будут доказаны в п. 4. Рассмотрим краевые задачи

$$\begin{cases} \Delta u^\varepsilon = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \\ u^\varepsilon = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1 \bigcup \gamma_\varepsilon, \\ \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_n} = \rho^\varepsilon(x) f(x) \quad \text{на} \quad \Gamma_\varepsilon; \end{cases} \tag{3}$$

и

$$
\begin{cases}
\Delta u^0 = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \\
u^0 = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \quad (P = +\infty), \\
\left[\begin{array}{c} \dfrac{\partial u^0}{\partial x_n} + P\dfrac{\sigma_n c_{\gamma_0}}{2} u^0 = f(x) \quad \text{на} \quad \Gamma_2, \\ u^0 = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1 \end{array}\right] \qquad (P < +\infty),
\end{cases} \tag{4}
$$

где σ_n – площадь единичной n-мерной сферы, а $c_{\gamma_0} := \operatorname{cap}\gamma_0$ – гармоническая ёмкость $(n-1)$-мерного шара γ_0.

Оценки решений этих задач даёт

Теорема 1. *Пусть u^ε и u^0 – обобщённые решения задач (3) и (4) соответственно. Если $P < +\infty$, то существует такая постоянная $C_1(f, \gamma_0, n)$, не зависящая от ε и δ, что для достаточно малых ε выполняется неравенство*

$$
\|u^0 w_\varepsilon^\delta - u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leqslant C_1(\varepsilon^{(n-2)/2} + |\varepsilon^{n-2}/\delta - P| + \varepsilon^{2-m}\delta^{2-m}).
$$

Если $P = +\infty$, то существует постоянная $C_2(f, \gamma_0, n)$ такая, что

$$
\|u^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C_2(\delta^{1/2}/\varepsilon^{(n-2)/2} + \varepsilon^{2-m}\delta^{2-m}).
$$

Теперь рассмотрим спектральную задачу

$$
\begin{cases}
\Delta u_0^k = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \\
u_0^k = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \quad (P = +\infty), \\
\left[\begin{array}{c} \dfrac{\partial u_0^k}{\partial x_n} + P\dfrac{\sigma_n c_{\gamma_0}}{2} u_0^k = \lambda_0^k u_0^k \quad \text{на} \quad \Gamma_2, \\ u_0^k = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1, \\ \displaystyle\int\limits_{\Gamma_2} u_0^k u_0^l \, d\widehat{x} = \delta_{kl}, \quad 0 < \lambda_0^1 \leqslant \lambda_0^2 \leqslant \ldots, \end{array}\right] \qquad (P < +\infty).
\end{cases} \tag{5}
$$

Связь между собственными значениями и собственными функциями задач (5) и (1) устанавливает

Теорема 2. *Пусть λ_0^k и λ_ε^k – k-е собственные значения задач (5) и (1) соответственно. Тогда*

$$
|\lambda_0^k - \lambda_\varepsilon^k| \leqslant C_3(\varepsilon^{(n-2)/2} + |\varepsilon^{n-2}/\delta - P| + \varepsilon^{2-m}\delta^{2-m}), \quad \text{если} \quad P < +\infty,
$$

$$
\lambda_\varepsilon^k \to +\infty \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0, \quad \text{если} \quad P = +\infty,
$$

где постоянная C_3 не зависит от ε.

Если кратность собственного значения λ_0^l задачи (5) равна r, т.е.

$$
\lambda_0^l = \lambda_0^{l+1} = \ldots = \lambda_0^{l+r-1},
$$

то для любой собственной функции u_0^l задачи (5), соответствующей собственному значению λ_0^l, $\|u_0^l\|_{L_2(\Omega)} = 1$, существует линейная комбинация $\overline{u^\varepsilon}$ собственных функций задачи (1), соответствующих собственным значениям $\lambda_\varepsilon^l, \ \ldots, \ \lambda_\varepsilon^{l+r-1}$, такая, что

$$
\|\overline{u^\varepsilon} - u_0^l\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C_4(\varepsilon^{(n-2)/2} + |\varepsilon^{n-2}/\delta - P| + \varepsilon^{2-m}\delta^{2-m}), \quad \text{если} \quad P < +\infty,
$$

$$
\|\overline{u^\varepsilon}\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C_5(\delta^{1/2}/\varepsilon^{(n-2)/2} + \varepsilon^{2-m}\delta^{2-m}), \quad \text{если} \quad P = +\infty,
$$

где постоянные C_4, C_5 не зависят от ε и u_0^l.

2. Вспомогательные утверждения. Будем изучать предельное поведение решений спектральной задачи (1) при ε, стремящемся к нулю. Существование и единственность решения u_ε^k задачи (1) в пространстве $H^1(\Omega,\gamma_\varepsilon)$ могут быть доказаны на основании леммы Лакса–Мильграма. Пространство $H^1(\Omega,\gamma_\varepsilon)$ определяем как пополнение по норме

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \equiv \left(\int\limits_\Omega (u^2 + |\nabla u|^2)\,dx\right)^{1/2}$$

множества функций из пространства $C^\infty(\overline{\Omega})$, обращающихся в нуль в окрестности множества $\Gamma_1 \bigcup \gamma_\varepsilon$. Пространство $H^1(D,\gamma_0)$ – замыкание по норме

$$\|u\|_1 \equiv \left(\int\limits_D |\nabla_\xi u|^2\,d\xi + \int\limits_\Sigma u^2\,d\widehat{\xi}\right)^{1/2}$$

множества 1-периодических по $\widehat{\xi} \equiv (\xi_1,\ldots,\xi_{n-1})$ функций из $C^\infty(\overline{D})$, обращающихся в нуль в окрестности шара γ_0 и обладающих конечным интегралом Дирихле по области D.

Пусть

$$\theta_\varepsilon = \inf_{v\in H^1(D,\gamma_0)\setminus\{0\}} \left(\int\limits_D |\nabla_\xi v|^2\,d\xi \Big/ \int\limits_\Sigma v^2\,d\widehat{\xi}\right). \tag{6}$$

В работе [27] исследовался вопрос поведения собственного значения θ_ε и установлена следующая его асимптотика (см. [27, формула (25)]).

Лемма 1. *Пусть σ_n – площадь единичной n-мерной сферы, а c_{γ_0} – гармоническая ёмкость шара γ_0. Тогда*

$$\theta_\varepsilon = \varepsilon^{n-2}\frac{\sigma_n}{2}c_{\gamma_0} + o(\varepsilon^{n-2}) \quad \text{при} \quad \varepsilon\to 0.$$

В работе [18] доказана

Лемма 2. *Существует гармоническая в D функция $W^\varepsilon(\xi)\in H^1(D,\gamma_0)$, на которой достигается нижняя грань в (6), т.е.*

$$\int\limits_D |\nabla_\xi W^\varepsilon|^2\,d\xi = \theta_\varepsilon, \quad \|W^\varepsilon\|_{L_2(\Sigma)} = 1,$$

причём граничное условие

$$\frac{\partial W^\varepsilon}{\partial\xi_n} = \theta_\varepsilon W^\varepsilon \quad \text{на} \quad \Sigma\setminus\gamma_0 \tag{7}$$

выполняется в следующем смысле:

$$\frac{\partial W^\varepsilon}{\partial\xi_n} v\,d\widehat{\xi} \to \theta_\varepsilon \int\limits_\Sigma W^\varepsilon v\,d\widehat{\xi} \quad \text{при} \ \rho\to 0 \ \text{для любой} \ v\in H^1(D,\gamma_0).$$

Здесь

$$\Sigma_\rho := \{\xi\in\mathbb{R}^n : 0<\xi_i<1, \quad i=\overline{1,n-1}, \quad \xi_n = -\rho\}.$$

В работе [18] подробно обсуждается вопрос о существовании таких функций и их свойствах.

Рассмотрим функцию $w_\varepsilon^\delta(x)$, определённую равенством (2). Заметим, что в силу условия (7) выполняется соотношение

$$\frac{\partial w_\varepsilon^\delta}{\partial x_n} = \frac{\theta_\varepsilon}{\delta} w_\varepsilon^\delta \quad \text{на} \quad \Gamma_\varepsilon.$$

Аналогично тому, как это сделано в [18], несложно получить следующую оценку:

$$\left| \iint\limits_{\Omega} \Delta w_\varepsilon^\delta v\, dx \right| \leqslant C_6 \theta_\varepsilon^{1/2} \|v\|_{H^1(\Omega,\gamma_\varepsilon)} \tag{8}$$

для любой функции $v \in H^1(\Omega,\gamma_\varepsilon)$.

Через $\mathfrak{C}_\varepsilon^j$ обозначим цилиндр с основанием $\gamma_\varepsilon^j \bigcup \beta_\varepsilon^j$ и высотой $\varepsilon\delta$, т.е. $\mathfrak{C}_\varepsilon^j = \{x \in \Omega : (\widehat{x}, 0) \in \in \gamma_\varepsilon^j \bigcup \beta_\varepsilon^j,\ \ -\varepsilon\delta < x_n < 0\}$.

Лемма 3. *Для функций* $v \in H^1(\Omega,\gamma_\varepsilon)$ *справедливо неравенство*

$$\int\limits_{\mathfrak{C}_\varepsilon^j} v^2\, dx \leqslant C(\varepsilon\delta)^2 \int\limits_{\mathfrak{C}_\varepsilon^j} |\nabla v|^2\, dx, \quad j = \overline{1, N_\delta}. \tag{9}$$

Доказательство. Доказательство этого неравенства типа Фридрихса проводится в два этапа. На первом этапе получаем классическое неравенство в растянутой области в координатах $\eta = x/(\varepsilon\delta)$, поскольку функции имеют нулевой след на фиксированной части границы растянутой области. Далее, делая обратную замену координат, замечаем, что в градиенте появляется множитель $\varepsilon\delta$ и, таким образом, получаем неравенство (9) (см. похожий приём в [35], а также неравенство Фридрихса в [36] и [37]).

Лемма 4. *Для функций* $v \in H^1(\Omega,\gamma_\varepsilon)$ *справедливо неравенство*

$$\int\limits_{\beta_\varepsilon^j} v^2\, d\widehat{x} \leqslant C_8(\varepsilon\delta)^2 \int\limits_{\mathfrak{C}_\varepsilon^j} |\nabla v|^2\, dx, \quad j = \overline{1, N_\delta}. \tag{10}$$

Доказательство. В растянутых координатах $\eta = x/(\varepsilon\delta)$ имеем неравенство для следов

$$\|v\|_{L_2(\partial\mathfrak{C})} \leqslant C\|v\|_{H^1(\mathfrak{C})},$$

где $\mathfrak{C} = \{\eta \in \mathbb{R}^n : \varepsilon\delta\eta \in \mathfrak{C}_\varepsilon^j\}$. Далее, используя лемму 3 и проводя обратную замену переменных, приходим к доказываемому неравенству.

Лемма 5. *Для последовательности функций* $\{v_\varepsilon\} \in H^1(\Omega,\gamma_\varepsilon)$ *выполняется равенство*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} (\varepsilon\delta)^{-2} \int\limits_{\beta_\varepsilon^i} |v_\varepsilon|^2\, dx = 0,$$

если $\|v_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leqslant C_9$, *где постоянная* C_9 *не зависит от* ε.

Доказательство. Пусть $v \in H^1(\Omega,\gamma_\varepsilon)$. Для любого числа $\varkappa > 0$ существует функция $v_\varkappa \in C^\infty(\Omega,\gamma_\varepsilon)$ такая, что

$$\sqrt{C_7}\|v - v_\varkappa\|_{H^1(\Omega)} < \varkappa,$$

где C_7 – постоянная из неравенства (9). Тогда, применяя оценки (9) и (10) к функции $v - v_\varkappa$, а также учитывая неравенство для следов и ограниченность градиента функции $v_\varkappa$, получаем

$$\Bigg(\int\limits_{\beta_\varepsilon^i} (\varepsilon\delta)^{-2}|v|^2\, dx\Bigg)^{1/2} \leqslant \Bigg(\int\limits_{\beta_\varepsilon^i} (\varepsilon\delta)^{-2}|v - v_\varkappa|^2\, dx\Bigg)^{1/2} + \Bigg(\int\limits_{\beta_\varepsilon^i} (\varepsilon\delta)^{-2}|v_\varkappa|^2\, dx\Bigg)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{C_7}\Bigg(\int\limits_{\Omega} |\nabla(v - v_\varkappa)|^2\, dx\Bigg)^{1/2} + C_\varkappa(\varepsilon\delta)^{-1+n/2} \leqslant \varkappa + C_\varkappa(\varepsilon\delta)^{-1+n/2}.$$

Так как $n \geqslant 3$, по определению предела завершаем доказательство леммы.

Лемма 6. *Для решения* $u^\varepsilon \in H^1(\Omega,\gamma_\varepsilon)$ *задачи (3) справедливо неравенство*

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla u^\varepsilon|^2\,dx \leqslant C_{10}\biggl(\int\limits_{\alpha_\varepsilon} f^2\,d\widehat{x} + (\varepsilon\delta)^{2-m}\int\limits_{\beta_\varepsilon} \rho^\varepsilon f^2\,d\widehat{x}\biggr).$$

Доказательство. Вследствие интегрального тождества, учитывая леммы 3, 4 и неравенство типа Фридрихса (см., например, [28, 30, 36]), получаем

$$\|\nabla u^\varepsilon\|^2_{L_2(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} |\nabla u^\varepsilon|^2\,dx = \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} \rho^\varepsilon f u^\varepsilon\,d\widehat{x} = \int\limits_{\alpha_\varepsilon} f u^\varepsilon\,d\widehat{x} + (\varepsilon\delta)^{-m}\int\limits_{\beta_\varepsilon} f u^\varepsilon\,d\widehat{x} \leqslant$$

$$\leqslant \biggl(\int\limits_{\alpha_\varepsilon} f^2\,d\widehat{x}\biggr)^{1/2}\biggl(\int\limits_{\alpha_\varepsilon} (u^\varepsilon)^2\,d\widehat{x}\biggr)^{1/2} + (\varepsilon\delta)^{-m}\biggl(\int\limits_{\beta_\varepsilon} f^2\,d\widehat{x}\biggr)^{1/2}\biggl(\int\limits_{\beta_\varepsilon} (u^\varepsilon)^2\,d\widehat{x}\biggr)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant C\biggl(\int\limits_{\alpha_\varepsilon} f^2\,d\widehat{x}\biggr)^{1/2}\|\nabla u^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} + C(\varepsilon\delta)^{-m+1}\biggl(\int\limits_{\beta_\varepsilon} f^2\,d\widehat{x}\biggr)^{1/2}\|\nabla u^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}$$

для разных постоянных C. Отсюда непосредственно вытекает доказываемое неравенство. Лемма доказана.

Пусть $f \in C(\Gamma_2)$. Если $u^0 \in H^1(\Omega)$ – обобщённое решение задачи (4), то, согласно теории регулярности решений эллиптических уравнений [38], $u^0 \in W^2_r(\Omega)$ для любого $r > 1$. Тогда в силу теорем вложения Соболева $u^0, \nabla_x u^0 \in C(\overline{\Omega})$; из первого уравнения задачи (4) следует, что $u^0 \in C(\overline{\Omega})$, причём

$$\|u^0\|_{C(\overline{\Omega})} + \|\nabla_x u^0\|_{C(\overline{\Omega})} + \|\Delta u^0\|_{C(\overline{\Omega})} \leqslant C_{11}\|f\|_{C(\Gamma_2)}. \tag{11}$$

Слабая сходимость u^ε к u^0 в $H^1(\Omega)$ при $\varepsilon \to 0$ доказана в [18].

Обозначим

$$p := \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon^{n-2}\sigma_n c_{\gamma_0}}{2\delta(\varepsilon)}, \quad \text{т.е.} \quad p = \frac{\sigma_n c_{\gamma_0}}{2}P.$$

Имеет место

Лемма 7. *Пусть* $f \in C(\Gamma_2)$, *а* u^ε *и* u^0 *– обобщённые решения задач (3) и (4) соответственно. Если* $p < +\infty$, *то существует постоянная* C_{12}, *не зависящая от* ε, δ *и* f, *такая, что для достаточно малых* ε *выполняется неравенство*

$$\|u^0 w^\delta_\varepsilon - u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leqslant C_{12}\|f\|_{C(\Gamma_2)}((\theta_\varepsilon)^{1/2} + |\theta_\varepsilon/\delta - p| + (\varepsilon\delta)^{2-m}).$$

Доказательство. Рассмотрим область

$$\Omega_\mu = \{x \in \Omega : x_n \leqslant -\mu\},$$

обозначим $\Gamma_{2\mu}$ – часть границы $\partial\Omega_\mu \setminus \partial\Omega$. С учётом гладкости функций u^0, w^δ_ε и u^ε (см., например, [38]), следующее интегральное выражение

$$\int\limits_{\Omega_\mu} (\nabla_x(u^0 w^\delta_\varepsilon - u^\varepsilon), \nabla_x v)\,dx$$

корректно для любой функции $v \in H^1(\Omega,\gamma_\varepsilon)$. Вычисляя этот интеграл по частям и учитывая, что $\Delta u^0 = 0$, получаем

$$\int\limits_{\Omega_\mu} (\nabla_x(u^0 w^\delta_\varepsilon - u^\varepsilon), \nabla_x v)\,dx = \int\limits_{\Omega_\mu} (\nabla_x(u^0 w^\delta_\varepsilon), \nabla_x v)\,dx - \int\limits_{\Gamma_{2\mu}} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_n} v\,d\widehat{x} =$$

$$= -\int\limits_{\Omega_\mu} \Delta(u^0 w_\varepsilon^\delta) v\,dx + \int\limits_{\Gamma_{2\mu}} \frac{\partial(u^0 w_\varepsilon^\delta)}{\partial x_n} v\,d\widehat{x} - \int\limits_{\Gamma_{2\mu}} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_n} v\,d\widehat{x} =$$

$$= -\int\limits_{\Omega_\mu} (2(\nabla_x u^0, \nabla_x (w_\varepsilon^\delta - 1)) + u^0 \Delta w_\varepsilon^\delta) v\,dx + \int\limits_{\Gamma_{2\mu}} \frac{\partial u^0}{\partial x_n} w_\varepsilon^\delta v\,d\widehat{x} + \int\limits_{\Gamma_{2\mu}} u^0 \frac{\partial w_\varepsilon^\delta}{\partial x_n} v\,d\widehat{x} - \int\limits_{\Gamma_{2\mu}} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_n} v\,d\widehat{x} =$$

$$= 2\int\limits_{\Omega_\mu} (w_\varepsilon^\delta - 1)(\nabla_x v, \nabla_x u^0)\,dx + \int\limits_{\Gamma_{2\mu}} \frac{\partial u^0}{\partial x_n} w_\varepsilon^\delta v\,d\widehat{x} + \int\limits_{\Gamma_{2\mu}} u^0 \frac{\partial w_\varepsilon^\delta}{\partial x_n} v\,d\widehat{x} -$$

$$- \int\limits_{\Gamma_{2\mu}} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_n} v\,d\widehat{x} - 2\int\limits_{\Gamma_{2\mu}} (w_\varepsilon^\delta - 1)\frac{\partial u^0}{\partial x_n} v\,d\widehat{x} - \int\limits_{\Omega_\mu} u^0 \Delta w_\varepsilon^\delta v\,dx. \tag{12}$$

Нетрудно видеть, что при $\mu \to 0$ имеют место сходимости

$$\int\limits_{\Omega_\mu} (w_\varepsilon^\delta - 1)(\nabla_x v, \nabla_x u^0)\,dx \to \int\limits_{\Omega} (w_\varepsilon^\delta - 1)(\nabla_x v, \nabla_x u^0)\,dx,$$

$$\int\limits_{\Gamma_{2\mu}} \frac{\partial u^0}{\partial x_n} w_\varepsilon^\delta v\,d\widehat{x} \to \int\limits_{\Gamma_2} \frac{\partial u^0}{\partial x_n} w_\varepsilon^\delta v\,d\widehat{x},$$

$$\int\limits_{\Gamma_{2\mu}} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_n} v\,d\widehat{x} \to \int\limits_{\Gamma_2} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_n} v\,d\widehat{x} = \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} \rho_\varepsilon f v\,d\widehat{x},$$

$$\int\limits_{\Omega_\mu} u^0 \Delta w_\varepsilon^\delta v\,dx \to \int\limits_{\Omega} u^0 \Delta w_\varepsilon^\delta v\,dx,$$

а

$$\int\limits_{\Gamma_{2\mu}} (w_\varepsilon^\delta - 1)\frac{\partial u^0}{\partial x_n} v\,d\widehat{x} \to \int\limits_{\Gamma_2} (w_\varepsilon^\delta - 1)\frac{\partial u^0}{\partial x_n} v\,d\widehat{x}.$$

В силу свойств функции w_ε^δ, заданной равенством (2), заключаем, что

$$\int\limits_{\Gamma_{2\mu}} u^0 \frac{\partial w_\varepsilon^\delta}{\partial x_n} v\,d\widehat{x} \to \frac{\theta_\varepsilon}{\delta} \int\limits_{\Gamma_2} u^0 w_\varepsilon^\delta v\,d\widehat{x} \quad \text{при} \quad \mu \to 0.$$

Перейдём в (12) к пределу при $\mu \to 0$. Вследствие граничного условия задачи (4), т.е. условия $\partial u^0/\partial x_n = -pu^0 + f$ на Γ_2, получаем

$$\int\limits_{\Omega} (\nabla_x (u^0 w_\varepsilon^\delta - u^\varepsilon), \nabla_x v)\,dx = 2\int\limits_{\Omega} (w_\varepsilon^\delta - 1)(\nabla_x v, \nabla_x u^0)\,dx + \left(d\frac{\theta_\varepsilon}{\delta} - p\right) \int\limits_{\Gamma_2} u^0 w_\varepsilon^\delta v\,d\widehat{x} -$$

$$- \int\limits_{\Gamma_2} (w_\varepsilon^\delta - 1) f v\,d\widehat{x} - \int\limits_{\beta_\varepsilon} ((\varepsilon\delta)^{-m} - 1) f v\,d\widehat{x} + 2\int\limits_{\Gamma_2} (w_\varepsilon^\delta - 1) p u^0 v\,d\widehat{x} - \int\limits_{\Omega} u^0 \Delta w_\varepsilon^\delta v\,dx. \tag{13}$$

Оценим интегралы, стоящие в правой части равенства (13). Для первого интеграла имеем

$$\left| \int\limits_{\Omega} (w_\varepsilon^\delta - 1)(\nabla_x v, \nabla_x u^0)\,dx \right| = \|w_\varepsilon^\delta - 1\|_{L_2(\Omega)} \left(\int\limits_{\Omega} (\nabla_x u^0, \nabla_x v)^2\,dx \right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant C(\theta_\varepsilon \delta)^{1/2} \|f\|_{C(\Gamma_2)} \|v\|_{H^1(\Omega, \gamma_\varepsilon)}$$

в силу свойств функций u^0 и w_ε^δ (см. (11) и лемму 2). Используя неравенства (11) и (8), для последнего интеграла в (13) получаем оценку

$$\left|\int\limits_{\Omega} u^0\Delta w_\varepsilon^\delta v\,dx\right| \leqslant C_6\theta_\varepsilon^{1/2}\|u^0v\|_{H^1(\Omega)} \leqslant C_6'\theta_\varepsilon^{1/2}\|u^0\|_{C^1(\overline{\Omega})}\|v\|_{H^1(\Omega)} \leqslant C_6''\theta_\varepsilon^{1/2}\|f\|_{C(\Gamma_2)}\|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Далее, воспользовавшись неравенством (11) и свойствами функции w_ε^δ (см. [18]), второй интеграл в (13) оценим следующим образом:

$$\left|(\theta_\varepsilon/\delta-p)\int\limits_{\Gamma_2} u^0(w_\varepsilon^\delta-1)v\,d\widehat{x}+(\theta_\varepsilon/\delta-p)\int\limits_{\Gamma_2} u^0v\,d\widehat{x}\right|\leqslant$$

$$\leqslant|\theta_\varepsilon/\delta-p|C_{11}'\theta_\varepsilon^{1/2}\|v\|_{H^1(\Omega,\gamma_\varepsilon)}\|f\|_{C(\Gamma_2)}+C_{11}''|\theta_\varepsilon/\delta-p|\|v\|_{H^1(\Omega,\gamma_\varepsilon)}\|f\|_{C(\Gamma_2)}\leqslant$$
$$\leqslant C_{11}'''|\theta_\varepsilon/\delta-p|\|v\|_{H^1(\Omega,\gamma_\varepsilon)}\|f\|_{C(\Gamma_2)}.$$

Оставшиеся интегралы допускают следующие оценки:

$$\left|\int\limits_{\partial\Omega}(w_\varepsilon^\delta-1)pu^0v\,ds\right|\leqslant C\theta_\varepsilon^{1/2}\|v\|_{H^1(\Omega,\gamma_\varepsilon)}\|f\|_{C(\Gamma_2)},$$

$$\left|\int\limits_{\partial\Omega}(w_\varepsilon^\delta-1)fvds\right|\leqslant C\theta_\varepsilon^{1/2}\|v\|_{H^1(\Omega,\gamma_\varepsilon)}\|f\|_{C(\Gamma_2)},$$

$$\left|\int\limits_{\beta_\varepsilon}((\varepsilon\delta)^{-m}-1)fv\,d\widehat{x}\right|\leqslant C(\varepsilon\delta)^{m-2}\|v\|_{H^1(\Omega,\gamma_\varepsilon)}\|f\|_{C(\Gamma_2)}$$

для разных постоянных C ввиду неравенства (11), леммы 4 и свойств функции w_ε^δ (см. [18]). Окончательно имеем

$$\left|\int\limits_{\Omega}(\nabla_x(u^0w_\varepsilon^\delta-u^\varepsilon),\nabla_xv)\,dx\right|\leqslant C\|f\|_{C(\Gamma_2)}\Big(\theta_\varepsilon^{1/2}+|\theta_\varepsilon/\delta-p|+(\varepsilon\delta)^{m-2}\Big)\|v\|_{H^1(\Omega,\gamma_\varepsilon)} \qquad (14)$$

для произвольной функции $v\in H^1(\Omega,\gamma_\varepsilon)$.

Положим $v=u^0w_\varepsilon^\delta-u^\varepsilon$. На основании оценки (14), применяя неравенство типа Фридрихса, получаем нужную оценку. Лемма доказана.

Лемма 8. *Пусть* $f\in C(\Gamma_2)$. *Если* $p=+\infty$, *то существует постоянная* C_{13} *такая, что*

$$\|u^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}\leqslant C_{13}\|f\|_{C(\Gamma_2)}((\delta/\theta_\varepsilon)^{1/2}+(\varepsilon\delta)^{2-m}).$$

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 7 с использованием результатов работы [18].

3. Предварительные замечания. Поведение собственных значений и собственных функций задачи (1) будем изучать основываясь на общей схеме, предложенной в монографии [35].

Пусть H_ε, H_0 – сепарабельные гильбертовы пространства со скалярными произведениями $(u,v)_\varepsilon$, $(u,v)_0$ и нормами $\|u\|_\varepsilon$, $\|u\|_0$ соответственно, ε – малый положительный параметр. Пусть также $A_\varepsilon\in\mathcal{L}(H_\varepsilon)$, $A_0\in\mathcal{L}(H_0)$ – линейные непрерывные операторы, причём $\operatorname{Im}A_0\subset$ $\subset V\subset H_0$; где V – линейное подпространство в H_0.

Будем предполагать, что выполнены следующие условия C1–C4.

C1. Существуют линейные непрерывные операторы $R_\varepsilon: H_0\to H_\varepsilon$ такие, что для любого элемента $f\in V$ имеет место сходимость $(R_\varepsilon f,R_\varepsilon f)_\varepsilon\to\kappa(f,f)_0$ при $\varepsilon\to 0$, где $\kappa=\mathrm{const}>0$ не зависит от f.

C2. Операторы A_ε и A_0 являются положительными, компактными и самосопряжёнными в пространствах H_ε и H_0 соответственно, причём

$$\sup_\varepsilon \|A_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(H_\varepsilon)} < \infty.$$

C3. Для любого элемента $f \in V$ имеет место сходимость $\|A_\varepsilon R_\varepsilon f - R_\varepsilon A_0 f\|_\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

C4. Семейство операторов A_ε равномерно компактно в следующем смысле. Из любой последовательности $\{f^\varepsilon\}$, $f^\varepsilon \in H_\varepsilon$, такой, что $\sup\limits_\varepsilon \|f^\varepsilon\|_\varepsilon < \infty$, можно выбрать подпоследовательность $\{f^{\varepsilon'}\}$ и найти функцию $w \in V$ такие, что

$$\|A_{\varepsilon'} f^{\varepsilon'} - R_{\varepsilon'} w\|_{\varepsilon'} \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon' \to 0.$$

Для операторов A_ε и A_0 рассмотрим следующие спектральные задачи:

$$A_\varepsilon u_\varepsilon^k = \mu_\varepsilon^k u_\varepsilon^k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (u_\varepsilon^i, u_\varepsilon^j) = \delta_{ij}, \tag{15}$$

$$A_0 u_0^k = \mu_0^k u_0^k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (u_0^i, u_0^j) = \delta_{ij}, \tag{16}$$

где δ_{ij} – символ Кронекера, а собственные значения μ_ε^k и μ_0^k занумерованы в порядке невозрастания, причём каждое собственное значение повторяется столько раз, какова его кратность.

Теорема (Олейник–Иосифьян–Шамаев). *Пусть выполнены условия С1–С4. Тогда справедлива оценка*

$$|\mu_\varepsilon^k - \mu_0^k| \leqslant M_\varepsilon \sup_f \|A_\varepsilon R_\varepsilon f - R_\varepsilon A_0 f\|_\varepsilon, \quad k \in \mathbb{N},$$

в которой μ_ε^k *и* μ_0^k – k*-е собственные значения задач (15) и (16) соответственно, верхняя грань берётся по всем функциям* $f \in N(\mu_0^k, A_0) = \{v \in H_0 : A_0 v = \mu_0^k v\}$ *таким, что* $\|f\|_0 = 1$, *а постоянные* M_ε *удовлетворяют условиям*

$$\sup\{M_\varepsilon : 0 < \varepsilon \leqslant 1\} < +\infty$$

и $M_\varepsilon \to \text{const} > 0$ *при* $\varepsilon \to 0$.

Пусть $k \in \mathbb{Z}_+$, $l \in \mathbb{N}$ *и кратность собственного значения* μ_0^{k+1} *задачи (16) равна* l, *т.е.*

$$\mu_0^{k+1} = \ldots = \mu_0^{k+l}.$$

Тогда для любой функции $u_0 \in N(\mu_0^{k+1}, A_0)$ *существует линейная комбинация* $\overline{u}_\varepsilon$ *собственных функций* $u_\varepsilon^{k+1}, \ \ldots, \ u_\varepsilon^{k+l}$ *задачи (15) такая, что*

$$\|\overline{u}_\varepsilon - R_\varepsilon u_0\|_\varepsilon \leqslant M_k \|A_\varepsilon R_\varepsilon u_0 - R_\varepsilon A_0 u_0\|_\varepsilon,$$

где постоянная M_k *не зависит от* ε.

Для того чтобы воспользоваться схемой исследования, дающей возможность применять сформулированную теорему, нужно подходящим образом ввести пространства H_0, H_ε, V, операторы A_0, A_ε, R_ε и проверить для них выполнимость условий С1–С4.

Отождествим пространства H_ε и H_0 с пространством $L_2(\Gamma_2)$, в котором заданы скалярные произведения

$$(h^\varepsilon, g^\varepsilon)_{H_\varepsilon} \equiv \int\limits_{\Gamma_2} \rho^\varepsilon h^\varepsilon g^\varepsilon \, d\widehat{x} \quad \text{и} \quad (h^0, g^0)_{H_0} \equiv \int\limits_{\Gamma_2} h^0 g^0 \, d\widehat{x}$$

соответственно. В качестве V возьмём пространство $L_2(\Gamma_2)$. Положим $R_\varepsilon f = f$ для любого $f \in H_0$.

Если $f\in V,$ то при $\varepsilon\to 0$ имеем

$$(R_\varepsilon f,R_\varepsilon f)_{H_\varepsilon}=\int\limits_{\alpha_\varepsilon} f^2\,d\widehat{x}+(\varepsilon\delta)^{-m}\int\limits_{\beta_\varepsilon} f^2\,d\widehat{x}\to\int\limits_{\Gamma_2} f^2\,d\widehat{x}=(f,f)_{H_0}$$

в силу леммы 5. Действительно, имеем

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon\delta)^{-m}\int\limits_{\beta_\varepsilon} f^2\,d\widehat{x}=\lim_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon\delta)^{2-m}\int\limits_{\beta_\varepsilon} f^2(\varepsilon\delta)^{-2}\,d\widehat{x},$$

но

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon\delta)^{-2}\int\limits_{\beta_\varepsilon} f^2\,d\widehat{x}=0,$$

а $m<2.$ Это означает, что справедливо условие C1 при $\kappa=1.$

Обозначим через $A_\varepsilon:H_\varepsilon\to H_\varepsilon$ оператор, ставящий в соответствие функции $f\in H_\varepsilon$ след $u^\varepsilon|_{\Gamma_2}$ решения $u^\varepsilon\in H^1(\Omega,\gamma_\varepsilon)$ задачи (3). Через $A_0:H_0\to H_0$ обозначим оператор, переводящий $f\in H_0$ в след $u^0|_{\Gamma_2}$ решения $u^0\in H^1(\Omega,\Gamma_1)$ задачи (4).

Нетрудно проверить, что операторы A_ε и A_0 являются положительными, компактными и самосопряжёнными в пространствах H_ε и H_0 соответственно (см. [18]). Равномерная ограниченность семейства операторов в соответствующей операторной норме

$$\sup_\varepsilon \|A_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(H_\varepsilon)}<M$$

вытекает из леммы 6, поскольку при $m<2$ в силу лемм 4 и 6 и неравенства типа Фридрихса получаем

$$\|A_\varepsilon f\|^2_{H_\varepsilon}=\int\limits_{\Gamma_2}\rho^\varepsilon(u^\varepsilon)^2\,d\widehat{x}\leqslant\biggl(\int\limits_{\alpha_\varepsilon}(u^\varepsilon)^2\,d\widehat{x}+(\varepsilon\delta)^{-2}\int\limits_{\beta_\varepsilon}(u^\varepsilon)^2\,d\widehat{x}\biggr)\leqslant C\int\limits_{\Omega}|\nabla u^\varepsilon|^2\,dx\leqslant$$

$$\leqslant C\biggl((\varepsilon\delta)^{2-m}\int\limits_{\beta_\varepsilon}\rho^\varepsilon f^2\,d\widehat{x}+\int\limits_{\alpha_\varepsilon}\rho^\varepsilon f^2\,d\widehat{x}+\int\limits_{\beta_\varepsilon} f^2\,d\widehat{x}\biggr)\leqslant C\biggl(\int\limits_{\alpha_\varepsilon}\rho^\varepsilon f^2\,d\widehat{x}+\int\limits_{\beta_\varepsilon}\rho^\varepsilon f^2\,d\widehat{x}\biggr)=C_6\|f\|^2_{H_\varepsilon}.$$

Таким образом, условие C2 имеет место.

Докажем выполнимость условия C3. Пусть $f\in H_0.$ Тогда

$$A_\varepsilon R_\varepsilon f=u^\varepsilon|_{\Gamma_2},\quad R_\varepsilon A_0 f=u^0|_{\Gamma_2},$$

где u^ε – решение задачи (3), а u^0 – решение задачи (4). Пользуясь леммой 3 и неравенством Фридрихса, устанавливаем, что

$$\|A_\varepsilon R_\varepsilon f-R_\varepsilon A_0 f\|^2_{H_\varepsilon}=\int\limits_{\Gamma_\varepsilon}\rho^\varepsilon|u^\varepsilon-u^0|^2\,d\widehat{x}\leqslant\int\limits_{\alpha_\varepsilon}|u^\varepsilon-u^0|^2\,d\widehat{x}+\int\limits_{\beta_\varepsilon}(\varepsilon\delta)^{-m}|u^\varepsilon-u^0|^2\,d\widehat{x}\leqslant$$

$$\leqslant C\int\limits_{\Omega}|\nabla(u^\varepsilon-u^0)|^2\,dx+C(\varepsilon\delta)^{2-m}\int\limits_{\mathfrak{C}_\varepsilon}|\nabla(u^\varepsilon-u^0)|^2\,dx\leqslant C\int\limits_{\Omega}|\nabla(u^\varepsilon-u^0)|^2\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{\Omega}|\nabla(u^\varepsilon-u^0w^\delta_\varepsilon)|^2\,dx+\int\limits_{\Omega}\Bigl(|\nabla u^0|^2(1-w^\delta_\varepsilon)^2+(u^0)^2|\nabla(1-w^\delta_\varepsilon)|^2\Bigr)\,dx\to 0$$

при $\varepsilon\to 0.$ Здесь мы воспользовались свойствами функций u^0 и $w^\delta_\varepsilon,$ а также леммами 5, 7 и 8. Таким образом, условие C3 проверено.

Докажем справедливость условия C4. Если $\sup\limits_{\varepsilon}\|f\|_{H_\varepsilon} < \infty$, то из леммы 6 и неравенства Фридрихса вытекает, что
$$\sup_{\varepsilon}\|u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega,\gamma_\varepsilon)} < \infty,$$
где u^ε – решение задачи (3). Следовательно, по теореме Реллиха найдутся $U^* \in V$ и подпоследовательность $\varepsilon' \to 0$, для которых
$$u^{\varepsilon'} \to U^* \quad \text{слабо в } \ H^1(\Omega) \ \text{ и сильно в } \ L_2(\Omega).$$
При этом из единственности решения предельной задачи с помощью интегрального тождества несложно показать (аналогично [31]), что
$$u^{\varepsilon'} \to U^* \quad \text{сильно в } \ H^1(\Omega). \tag{17}$$
Поэтому, пользуясь леммой 3, получаем оценки
$$\|A_\varepsilon f - R_\varepsilon U^*\|^2_{H_\varepsilon} = \int\limits_{\Omega} \rho^\varepsilon(x)|u^\varepsilon - U^*|^2\,dx \leqslant \int\limits_{\alpha_\varepsilon} |u^\varepsilon - U^*|^2\,d\widehat{x} + (\varepsilon\delta)^{-m}\int\limits_{\beta_\varepsilon} |u^\varepsilon - U^*|^2\,d\widehat{x} \leqslant$$
$$\leqslant C\biggl(\int\limits_{\Omega} |\nabla(u^\varepsilon - U^*)|^2\,dx + (\varepsilon\delta)^{2-m}\int\limits_{\Omega} |\nabla(u^\varepsilon - U^*)|^2\,dx\biggr),$$
где $u^\varepsilon = A_\varepsilon f$ и постоянная C не зависит от ε. Отсюда следует соотношение из условия C4, так как $m < 2$ и имеет место сходимость (17).

Таким образом, выполнены условия C1–C4 и мы можем применить теорему Олейник–Иосифьяна–Шамаева о сходимости спектров последовательности операторов, заданных в разных гильбертовых пространствах.

Задача на собственные значения для оператора A_0 имеет вид (16), где $\mu_0^k = 1/\lambda_0^k$, а λ_0^k – собственные значения задачи (5).

Итак, имеет место

Теорема 3. *Пусть λ_0^k и λ_ε^k – k-е собственные значения задач (5) и (1) соответственно. Тогда*
$$|\lambda_0^k - \lambda_\varepsilon^k| \leqslant C_{14}((\theta_\varepsilon)^{1/2} + (\varepsilon\delta)^{2-m} + |\theta_\varepsilon/\delta - p|), \quad \textit{если} \quad p < +\infty,$$
$$\lambda_\varepsilon^k \to +\infty \quad \textit{при} \quad \varepsilon \to 0, \quad \textit{если} \quad p = +\infty,$$
где постоянная C_{14} не зависит от ε.

Если кратность собственного значения λ_0^l задачи (5) равна r, т.е.
$$\lambda_0^l = \lambda_0^{l+1} = \ldots\ldots = \lambda_0^{l+r-1},$$
то для любой собственной функции u_0^l задачи (5), соответствующей собственному значению λ_0^l, $\|u_0^l\|_{L_2(\Omega)} = 1$, существует линейная комбинация $\overline{u^\varepsilon}$ собственных функций задачи (1), соответствующих собственным значениям $\lambda_\varepsilon^{l+1}$, $\ldots$, $\lambda_\varepsilon^{l+r-1}$, такая, что
$$\|\overline{u^\varepsilon} - u_0^l\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C_{15}((\theta_\varepsilon)^{1/2} + (\varepsilon\delta)^{2-m} + |\theta_\varepsilon/\delta - p|), \quad \textit{если} \quad p < +\infty,$$
$$\|\overline{u^\varepsilon}\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C_{16}((\delta/\theta_\varepsilon)^{1/2} + (\varepsilon\delta)^{2-m}), \quad \textit{если} \quad p = +\infty,$$
где постоянные C_{15}, C_{16} не зависят от ε и u_0^l.

4. Доказательство основных утверждений. Воспользовавшись леммами 1, 7, 8 и теоремой 3 с учётом асимптотики (6), получаем утверждения теорем 1 и 2.

Автор выражает благодарность рецензенту, замечания которого позволили существенно улучшить представление результатов работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Крылов А.Н.* О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах // Изв. Николаевской морской академии. 1913. Вып. 2. С. 325–348.
2. *Головатый Ю.Д., Назаров С.А., Олейник О.А., Соболева Т.С.* О собственных колебаниях струны с присоединенной массой // Сиб. мат. журн. 1988. Т. 29. № 5. С. 71–91.
3. *Lobo M., Pérez E.* Asymptotic behavior of the vibrations of a body having many concentrated masses near the boundary // Comp. Rend. Acad. Sci. Paris. Série II. 1992. V. 314. P. 13–18.
4. *Sanchez-Palencia É., Tchatat H.* Vibration de systemes elastiques avec masses concentrees // Rend. del Semi. mat. della Univer. e politecnico di Torino. 1984. V. 42. № 3. P. 43–63.
5. *Gómez D., Lobo M., Pérez E.* On the eigenfunctions associated with the high frequencies in systems with a concentrated mass // J. Math. Pures Appl. 1999. V. 78. P. 841–865.
6. *Chechkin G.A.* On vibration of partially fastened membrane with many “light” concentrated masses on the boundary // Comp. Rend. Mécanique. 2004. V. 332. № 12. P. 949–954.
7. *Чечкин Г.А.* Расщепление кратного собственного значения в задаче о концентрированных массах // Успехи мат. наук. 2004. Т. 59. Вып. 4. С. 205–206.
8. *Доронина Е.И., Чечкин Г.А.* О собственных колебаниях тела с большим количеством непериодически расположенных концентрированных масс // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова РАН. 2002. Т. 236. С. 158–166.
9. *Rybalko V.* Vibration of elastic systems with a large number of tiny heavy inclusions // Asymptot. Anal. 2002. V. 32. № 1. P. 27–62.
10. *Перес М.Е., Чечкин Г.А., Яблокова (Доронина) Е.И.* О собственных колебаниях тела с “лёгкими” концентрированными массами на поверхности // Успехи мат. наук. 2002. Т. 57. Вып. 6. С. 195–196.
11. *Chechkin G.A., Pérez M.E., Yablokova E.I.* Non-periodic boundary homogenization and “light” concentrated masses // Indiana Univ. Math. J. 2005. V. 54. № 2. P. 321–348.
12. *Chechkin G.A., Chechkina T.P.* Asymptotic behavior of spectrum of an elliptic problem in a domain with aperiodically distributed concentrated masses // Comp. Rend. Mécanique. 2017. V. 345. № 10. P. 671–677.
13. *Chechkin G.A., Chechkina T.P.* Random homogenization in a domain with light concentrated masses // Mathematics. 2020. V. 8. № 5. Art. 788.
14. *Chechkin G.A., Cioranescu D., Damlamian A., Piatnitski A.L.* On boundary value problem with singular inhomogeneity concentrated on the boundary // J. de Math. Pures et Appl. 2012. V. 98. № 2. P. 115–138.
15. *Cainzos J., Pérez M.E., Vilasanchez M.* Asymptotics for the eigenelements of the Neumann spectral problem with concentrated masses // Indiana Univ. Math. J. 2007. V. 56. № 4. P. 1939–1987.
16. *Nazarov S.A., Pérez M.E.* New asymptotic effects for the spectrum of problems on concentrated masses near the boundary // Comp. Rend. Mécanique. 2009. V. 337. № 8. P. 585–590.
17. *Nazarov S.A., Pérez M.E.* On multi-scale asymptotic structure of eigenfunctions in a boundary value problem with concentrated masses near the boundary // Rev. Mat. Commpl. 2018. V. 31. № 1. P. 1–62.
18. *Чечкина А.Г.* Усреднение спектральных задач с сингулярным возмущением условия Стеклова // Изв. РАН. Сер. Мат. 2017. Т. 81. № 1. С. 203–240.
19. *Amirat Y., Bodart O., Chechkin G.A., Piatnitski A.L.* Asymptotics of a spectral-sieve problem // J. of Math. Anal. and Appl. 2016. V. 435. № 2. P. 1652–1671.
20. *Гадыльшин Р.Р., Пятницкий А.Л., Чечкин Г.А.* О спектральной задаче с условием Стеклова на тонком перфорированном интерфейсе // Докл. РАН. 2016. Т. 466. № 4. С. 389–394.
21. *Гадыльшин Р.Р., Пятницкий А.Л., Чечкин Г.А.* Об асимптотическом поведении собственных пар краевой задачи в плоской области типа сита Стеклова // Изв. РАН. 2018. Т. 82. № 6. С. 37–64.
22. *Gryshchuk S., Lanza de Cristoforis M.* Simple eigenvalues for the Steklov problem in a domain with a small hole. A functional analytic approach // Math. Meth. Appl. Sci. 2014. V. 37. № 12. P. 1755–1771.
23. *Назаров С.А.* Моделирование сингулярно возмущенной спектральной задачи при помощи самосопряженных расширений операторов предельных задач // Функц. анализ и его прил. 2015. Т. 49. № 1. С. 31–48.
24. *Chiado Piat V., Nazarov S.A.* Steklov spectral problems in a set with a thin toroidal hole // Partial Differ. Equat. in Appl. Math. 2020. V. 1. P. 100007.
25. *Pérez M.E.* On periodic Steklov type eigenvalue problems on half-band and the spectral homogenization problem // Discrete Contin. Dyn. Systems. Ser. B. 2007. V. 7. № 4. P. 859–883.
26. *Chechkin G.A.* On vibration of partially fastened membrane with many “light” concentrated masses on the boundary // Comp. Rend. Mécanique. 2004. V. 332. № 12. P. 949–954.

27. *Гадыльшин Р.Р., Чечкин Г.А.* Краевая задача для Лапласиана с быстро меняющимся типом граничных условий в многомерной области // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40. № 2. С. 271–287.
28. *Олейник О.А., Чечкин Г.А.* О краевых задачах для эллиптических уравнений с быстро меняющимся типом граничных условий // Успехи мат. наук. 1993. Т. 48. Вып. 6. С. 163–164.
29. *Беляв А.Ю., Чечкин Г.А.* Усреднение операторов с мелкомасштабной структурой граничных условий // Мат. заметки. 1999. Т. 65. Вып. 4. С. 496–510.
30. *Oleinik O.A., Chechkin G.A.* Solutions and eigenvalues of the boundary value problems with rapidly alternating boundary conditions for the system of elasticity // Rend. Lincei: Math. Appl. Ser. 9. 1996. V. 7. № 1. P. 5–15.
31. *Gadyl'shin R.R., Chechkin G.A.* On boundary-value problems for the laplacian in bounded domains with micro inhomogeneous structure of the boundaries // Acta Math. Sinica. 2007. V. 23. № 2. P. 237–248.
32. *Gómes D., Nazarov S.A., Pérez M.E.* Homogenization of Winkler–Steklov spectral conditions in three-dimensional linear elasticity // Zeitschr. für Angew. Math. und Physik. 2018. Bd. 69. № 2. S. 35.
33. *Gómes D., Nazarov S.A., Pérez–Martinez M.E.* Spectral homogenization problems in linear elasticity with large reaction terms concentrated in small regions of the boundary // Computational and Analytic Methods in Science and Engineering. Cham, 2020. P. 121–143.
34. *Gómes D., Nazarov S.A., Pérez–Martinez M.E.* Asymptotics for spectral problems with rapidly alternating boundary conditions on a strainer Winkler foundation // J. of Elasticity. 2020. V. 142. P. 89–120.
35. *Олейник О.А., Иосифьян Г.А., Шамаев А.С.* Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. М., 1990.
36. *Chechkin G.A., Koroleva Yu.O., Persson L.-E.* On the precise asymptotics of the constant in the Friedrich's inequality for functions, vanishing on the part of the boundary with microinhomogeneous structure // J. of Inequalities and Appl. 2007. V. 2007. Art. ID 34138.
37. *Chechkin G.A., Koroleva Yu.O., Meidell A., Persson L.-E.* On the Friedrichs inequality in a domain perforated along the boundary. Homogenization procedure. Asymptotics in parabolic problems // Rus. J. of Math. Phys. 2009. V. 16. № 1. P. 1–16.
38. *Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л.* Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы. М., 1962.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 30.08.2020 г.
После доработки 23.05.2021 г.
Принята к публикации 08.09.2021 г.