

УДК 517.957+517.958

# ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ТРЁХ СОБОЛЕВСКИХ УРАВНЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ПСЕВДОЛАПЛАСИАНЫ ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА

© 2021 г. А. И. Аристов

Построено несколько классов точных решений для трёх нелинейных, содержащих псевдо-лапласианы четвёртого порядка, соболевских уравнений, описывающих квазистационарные процессы в полупроводниках с учётом отрицательной дифференциальной проводимости.

DOI: 10.31857/S0374064121100137

**Введение.** Работа посвящена построению классов точных решений следующих уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta u + u \frac{\partial u}{\partial x} = \Delta_4 u, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta u = \Delta_4 u, \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta u + \Delta u = \Delta_4 u. \quad (3)$$

В (1)–(3) функция  $u$  зависит от трёхмерного вектора пространственных  $\omega = (x, y, z)$  и временной  $t > 0$  переменных, а через  $\Delta_p u$  (здесь  $p = 4$ ) обозначен псевдолапласиан порядка  $p$ , т.е.  $\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$ . Операторы  $\nabla$  и  $\Delta$  действуют только по пространственным переменным.

В монографии [1, гл. 7, § 2] для уравнения (1) и более общих, чем (2) и (3), уравнений (содержащих псевдолапласианы произвольного порядка; при этом в ней подчёркивалось, что  $p = 4$  – это “физически важный случай”) изучалась разрешимость (локальная и глобальная) начально-краевых задач и в случае только локальной разрешимости получены оценки времени существования их решений. Уравнения, подобные (1)–(3), описывают квазистационарные процессы в полупроводниках с учётом отрицательной дифференциальной проводимости.

Отметим, что существуют обширные исследования в области качественной теории соболевских уравнений, в которых изучаются вопросы существования и единственности решений, их разрушения и асимптотики (например, [1–3]), но в литературе о точных решениях уравнений в частных производных (например, [4–6]) такие уравнения встречаются редко.

В данной работе построено несколько классов точных решений уравнений (1)–(3), выражающихся через элементарные и специальные функции.

В дальнейшем через  $c, c_1, c_2, \dots$  обозначаются, вообще говоря, произвольные действительные постоянные, через  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  – произвольный постоянный ненулевой трёхмерный вектор, через  $k(\cdot), k_1(\cdot), k_2(\cdot), \dots$  – произвольные дифференцируемые функции скалярного аргумента. Для векторов  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  и  $\omega = (x, y, z)$  их скалярное произведение обозначаем через  $\langle \alpha, \omega \rangle$ , т.е.  $\langle \alpha, \omega \rangle = \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z$ . Далее считаем, что для рассматриваемых параметров, переменных и функций выполняемые с ними действия и преобразования корректны.

Введём функцию

$$\chi(w; c) = \frac{1}{c^2} \left( \frac{1}{6} \ln \frac{(w+c)^2}{w^2 - cw + c^2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2w-c}{c\sqrt{3}} \right) \quad (4)$$

переменной  $w$  (для  $c \neq 0$ ). Несложно убедиться, что

$$\int \frac{dw}{w^3 + c^3} = \chi(w; c) + \text{const.}$$

**1. Построение решения уравнения (1).** Построим два класса точных решений уравнения (1). Для построения используем метод бегущей волны и поиск автомодельных решений.

1. Построим решение типа бегущей волны. Пусть  $u(\omega; t) = v(\xi)$ , где  $\xi = \langle \alpha, \omega \rangle + t$ . Подставив эту функцию в уравнение (1), получим

$$\langle \alpha, \alpha \rangle v'''(\xi) + \alpha_1 v(\xi) v'(\xi) = \langle \alpha, \alpha \rangle^2 ((v'(\xi))^3)', \quad \text{или} \quad v'' + \frac{\alpha_1}{2\langle \alpha, \alpha \rangle} v^2 - \langle \alpha, \alpha \rangle (v')^3 = c.$$

Положив  $v'(\xi) = w(v)$ , откуда  $v''(\xi) = w dw/dv$ , придём к уравнению

$$w \frac{dw}{dv} - \langle \alpha, \alpha \rangle w^3 + \frac{\alpha_1}{2\langle \alpha, \alpha \rangle} v^2 = c. \quad (5)$$

Замена  $w = 1/y$  приводит уравнение (5) к уравнению Абеля первого рода (см. [7, гл. 1, § 4.10]). В частности, если  $\alpha_1 = 0$  и  $c \neq 0$ , то, выполнив такую замену и проинтегрировав с учётом равенства (4) полученное уравнение, после обратной замены будем иметь неявное соотношение  $\chi(1/w; \sqrt[3]{\langle \alpha, \alpha \rangle / c}) = -cv + c_1$ . При  $\alpha_1 = c = 0$ , непосредственно решая уравнение (5) и возвращаясь к исходным переменным, получаем, что рассматриваемые решения уравнения (1) выражаются через элементарные функции и разрушаются за конечное время:  $v = c_2 \pm \sqrt{c_1 - 2\langle \alpha, \alpha \rangle^{-1}(\langle \alpha, \omega \rangle + t)}$ .

2. Положим  $u(\omega; t) = v(\xi; t)$ , где  $\xi = \langle \alpha, \omega \rangle$ . Здесь, не нарушая общности, можем считать, что  $|\alpha| = 1$ . Подставив эту функцию в уравнение (1), получим после упрощений:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial t} + \frac{\alpha_1}{2} v^2 - \left( \frac{\partial v}{\partial \xi} \right)^3 - k(t) = 0.$$

Построим автомодельные решения этого уравнения. Пусть  $v = t^a f(\theta)$ , где  $\theta = \xi t^b$ . Вычислив нужные производные, подставим их в уравнение. Затем, заменив входящую в него переменную  $\xi$  на  $\theta t^{-b}$ , придём к следующему уравнению:

$$t^{a+b-1}((a+b)f' + b\theta f'') + \frac{\alpha_1}{2} t^{2a} f^2 - t^{3(a+b)} f'^3 = k(t).$$

Поделив его левую и правую части на  $t^{a+b-1}$ , видим, что в уравнении останутся только следующие зависящие от  $t$  коэффициенты:  $t^{-b+1}$ ,  $t^{2(a+b)+1}$ ,  $t^{1-a-b}k(t)$ . Для того чтобы они были постоянными, нужно наложить условия:

$$a - b + 1 = 0, \quad 2(a + b) + 1 = 0, \quad t^{1-a-b}k(t) = \text{const.}$$

Следовательно,  $a = -3/4$ ,  $b = 1/4$ ,  $k(t) = ct^{-3/2}/4$ . Таким образом,

$$u(\omega; t) = t^{-3/4} f(\langle \alpha, \omega \rangle t^{1/4}),$$

где функция  $f(\cdot)$  – решение уравнения  $\theta f''(\theta) - 2f'(\theta) - 4f'^3(\theta) + 2\alpha_1 f^2(\theta) = c$ .

**2. Построение решения уравнения (2).** Для построения решения уравнения (2) используем методы бегущей волны, неполной бегущей волны, метод мультипликативного разделения переменных и поиск сферически-симметричных решений.

1. Пусть  $u(\omega; t) = v(\xi)$ , где  $\xi = \langle \alpha, \omega \rangle + t$ . Подставив эту функцию в уравнение (2), получим

$$v'''(\xi) = \langle \alpha, \alpha \rangle ((v'(\xi))^3). \quad (6)$$

Проинтегрируем уравнение (6) почленно, взяв для удобства постоянную интегрирования в виде  $\langle \alpha, \alpha \rangle c^3$ , и введём переменную  $w(\xi) = v'(\xi)$ . В результате придём к уравнению

$$\frac{dw}{d\xi} = \langle \alpha, \alpha \rangle (w^3 + c^3). \quad (7)$$

Возможны только следующие два случая.

1.1. Пусть  $c = 0$ . Интегрируя уравнение (7), получаем  $-w^{-2}/2 = \langle \alpha, \alpha \rangle \xi - c_1/2$ , откуда  $w = \pm(c_1 - 2\langle \alpha, \alpha \rangle \xi)^{-1/2}$ . Возвращаясь к исходной переменной, находим, что

$$v = \pm(c_1 - 2\langle \alpha, \alpha \rangle \xi)^{1/2} / \langle \alpha, \alpha \rangle + c_2.$$

1.2. Пусть  $c \neq 0$ . Интегрируя уравнение (7) и учитывая равенство (4), получаем неявное соотношение

$$\chi(w; c) = \langle \alpha, \alpha \rangle \xi + c_1.$$

2. Под решениями типа *неполной бегущей волны* понимаются решения вида  $u(\omega; t) = v(\xi; t)$ , где  $\xi = \langle \alpha, \omega \rangle$ . Такие решения мы уже рассматривали для уравнения (1). Как и выше, не нарушая общности, можем считать, что  $|\alpha| = 1$ . Подставив функцию искомого вида в уравнение (2), получим

$$\frac{\partial^3 v}{\partial t \partial \xi^2} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \left( \frac{\partial v}{\partial \xi} \right)^3 \right), \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial \xi} = \left( \frac{\partial v}{\partial \xi} \right)^3 + k(t).$$

Положив  $w = \partial v / \partial \xi$ , придём к уравнению первого порядка

$$\frac{\partial w}{\partial t} = w^3 + k(t). \quad (8)$$

Ограничимся рассмотрением трёх частных случаев.

2.1. Пусть  $k(t) = 0$ . Интегрируя уравнение (8), находим, что  $w = \pm(k_1(\xi) - 2t)^{-1/2}$ , откуда для  $v(\cdot)$  получаем квадратуру

$$v = \int \frac{d\xi}{\sqrt{k_1(\xi) - 2t}}.$$

2.2. Пусть  $k(t) = \text{const} = c^3 \neq 0$ . Интегрирование уравнения (8) даёт неявную формулу

$$\chi(w; c) = t + k_1(\xi).$$

2.3. Пусть  $k(\cdot)$  – пока произвольная дифференцируемая функция скалярного аргумента. Построим обобщённо-автомодельные решения уравнения (8) и найдём достаточные условия на функцию  $k(\cdot)$ , при которых такие решения существуют.

Пусть  $w = \varphi(t)f(\theta)$ ,  $\theta = \xi\psi(t)$ . Подставив эти выражения в уравнение (8) и заменив  $\xi$  на  $\theta/\psi(t)$ , придём к равенству

$$\varphi'(t)f(\theta) + \varphi(t)\psi'(t)\frac{\theta}{\psi(t)}f'(\theta) = \varphi^3(t)f^3(\theta) + k(t),$$

откуда

$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi^3(t)}f(\theta) + \frac{\psi'(t)}{\varphi^2(t)\psi(t)}\theta f'(\theta) = f^3(\theta) + \frac{k(t)}{\varphi^3(t)}.$$

Для того чтобы получить обыкновенное дифференциальное уравнение для  $f(\theta)$ , потребуем, чтобы коэффициенты, зависящие от  $t$ , были постоянными:

$$\varphi^{-3}(t)\varphi'(t) = c_1, \quad \varphi^{-2}(t)\psi^{-1}(t)\psi'(t) = c_2, \quad \varphi^{-3}(t)k(t) = c_3. \quad (9)$$

Во-первых, пусть  $c_1 \neq 0$ . Из первого уравнения в (9) находим  $\varphi(t) = \pm(c_4 - 2c_1 t)^{-1/2}$ . Не нарушая общности, можем выбрать  $c_1 = 1/2$  и знак “плюс”: это соответствующим образом масштабирует  $f$ . Тогда из второго уравнения в (9) получаем, что  $\psi(t) = c_5(c_4 - t)^{-c_2}$ , а из третьего следует равенство  $k(t) = c_3(c_4 - t)^{-3/2}$ . Уравнение для  $f(\cdot)$  примет следующий вид:  $f(\theta)/2 + c_2\theta f'(\theta) = f^3(\theta) + c_3$ . Переобозначая  $c_5$  через  $c_1$ , а  $2c_3$  – через  $c_3$ , получаем, что  $w = (c_4 - t)^{-1/2}f(c_1\xi(c_4 - t)^{-c_2})$ , где  $f(\cdot)$  – решение уравнения

$$f(\theta) + 2c_2\theta f'(\theta) = 2f^3(\theta) + c_3.$$

Во-вторых, пусть  $c_1 = 0$ . Из первого уравнения в (9) вытекает, что  $\varphi(t) = \text{const}$ . Не нарушая общности, возьмём  $\varphi(t) = 1$ . Тогда второе и третье уравнения дадут соответственно  $\psi(t) = c_3 t^{c_2}$  и  $k(t) = c_3$ . Таким образом,  $w = f(c_3 \xi t^{c_2})$ , а  $f(\cdot)$  – решение уравнения

$$c_2 \theta f'(\theta) = f^3(\theta) + c_3, \quad \text{т.е.} \quad c_2 \int \frac{df}{f^3 + c_3} = \ln |\theta| + c_4.$$

Пусть  $c_3 \neq 0$  (иначе –  $\psi(t) = 0$ ). Тогда с учётом равенства (4) получим неявную формулу

$$c_2 \chi(f; \sqrt[3]{c_3}) = \ln |\theta| + c_4.$$

3. Пусть  $u(\omega; t) = f(\omega)g(t)$ , где  $f(\cdot)$  и  $g(\cdot)$  – пока произвольные ненулевые функции соответственно от трёхмерного вектора и от скалярного аргумента. Подставив это выражение в уравнение (3), получим  $\Delta f \cdot g'(t) = g^3(t)\Delta_4 f$ , откуда  $g^{-3}(t)g'(t)\Delta f = \Delta_4 f$ . Для того чтобы получить уравнение только для  $f(\omega)$ , потребуем, чтобы множитель, зависящий от  $t$ , был постоянным. Не нарушая общности, считаем эту постоянную единицей:  $g^{-3}(t)g'(t) = 1$ , откуда  $g(t) = (c - 2t)^{-1/2}$ . Таким образом,  $u(\omega; t) = (c - 2t)^{-1/2}f(\omega)$ , где функция  $f(\cdot)$  – решение уравнения  $\Delta f = \Delta_4 f$ . Этому уравнению удовлетворяет, например, любая линейная функция.

Важным свойством так построенных решений является то, что они разрушаются за конечное время, поскольку  $\lim_{t \rightarrow c/2} u = \infty$ .

4. Положим  $u(\omega; t) = f(\rho; t)$ , где  $\rho = x^2 + y^2 + z^2$ . Вычислив нужные производные, подставив их в уравнение (2) и введя переменную  $g(\rho; t) = \partial f / \partial \rho$ , получим

$$2\rho \frac{\partial^2 g}{\partial t \partial \rho} + 3 \frac{\partial g}{\partial t} = 20\rho g^3 + 24\rho^2 g^2 \frac{\partial g}{\partial \rho}.$$

Построим автомодельные решения: пусть  $g = t^a h(\theta)$ , где  $\theta = \rho t^b$ . Рассуждая так же, как при поиске автомодельных решений уравнения (1), получаем уравнение

$$2\theta((3a+1)h' + (2a+1)\theta h'') + 3(ah + (2a+1)\theta h') = 20\theta h^3 + 24\theta^2 h^2 h'. \quad (10)$$

Здесь  $a$  – числовой параметр. В частности, при  $a = -1/2$  уравнение (10) можно упростить. Запишем его в следующем виде:

$$Pd\theta + Qdh = 0, \quad P = 40\theta h^3 + 3h, \quad Q = 48\theta^2 h^2 + 2\theta.$$

Заметим, что оно инвариантно относительно преобразования  $\bar{\theta} = e^{-2\varepsilon}\theta$ ,  $\bar{h} = e^\varepsilon h$ , которому соответствует инфинитезимальный оператор  $X = \xi \partial / \partial \theta + \eta \partial / \partial h$ , где  $\xi = -2\theta$ ,  $\eta = h$ . Тогда, как известно из [8, с. 198], это уравнение имеет интегрирующий множитель вида  $\mu = (P\xi + Q\eta)^{-1}$ . Здесь  $\mu = (-32\theta^2 h^3 - 4\theta h)^{-1}$ . Для удобства умножим его на  $-4$ :  $\mu = (8\theta^2 h^3 + \theta h)^{-1}$ . Таким образом, уравнение можно записать в виде  $d\Phi = 0$ , где функция  $\Phi$  удовлетворяет условиям  $\partial \Phi / \partial \theta = P\mu$ ,  $\partial \Phi / \partial h = Q\mu$ .

Из уравнения  $\partial \Phi / \partial h = Q\mu$  найдём, что  $\Phi = 2 \ln h + 2 \ln(8\theta h^2 + 1) + k(\theta)$ . Подставив это выражение в равенство  $\partial \Phi / \partial \theta = P\mu$ , определим функцию  $k(\cdot)$ :

$$\frac{16h^2}{8\theta h^2 + 1} + k'(\theta) = \frac{40\theta h^2 + 3}{8\theta^2 h^2 + \theta}, \quad \text{или} \quad k'(\theta) = \frac{3}{\theta},$$

откуда  $k(\theta) = 3 \ln |\theta| + c$ .

Значит, уравнение (10) при  $a = -1/2$  имеет общее решение  $\Phi = \text{const}$ , которое приводится к виду  $h^2(8\theta h^2 + 1)^2 \theta^3 = c/8$ . Решая это кубическое относительно  $h^2$  алгебраическое уравнение по формуле Кардано, находим, что

$$h(\theta) = \pm \sqrt{(3R(\theta) - 2)/(24\theta)},$$

где

$$R = \sqrt[3]{\frac{1}{81} + \frac{c}{2\theta^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{81} + \frac{c}{2\theta^2}\right)^2 - \frac{1}{729}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{81} + \frac{c}{2\theta^2} - \sqrt{\left(\frac{1}{81} + \frac{c}{2\theta^2}\right)^2 - \frac{1}{729}}}.$$

Заметим, что если  $u = v(\omega; t)$  – решение уравнения (2), то  $u = v(\omega; t) + k(t)$  – тоже его решение. Значит, “классическое” решение задачи Коши для этого уравнения может не быть единственным.

Приведённые построения показывают, что верна

**Теорема 1.** Уравнения (1) и (2) имеют решения, выражающиеся через элементарные функции и разрушающиеся за конечное время (т.е. существующие локально по времени, но не глобально).

### 3. Построение решения уравнения (3).

**Теорема 2.** Если  $u = v(\omega; t)$  – решение уравнения (2), то  $u = e^{-t}v(\omega; e^{2t}/2)$  – решение уравнения (3).

**Доказательство.** Уравнение (3) сводится к уравнению (2) заменой переменных. Положим сначала  $u = ve^{-t}$ . Тогда уравнение (3) принимает вид

$$\frac{1}{e^{2t}} \frac{\partial \Delta v}{\partial t} = \Delta_4 v.$$

Перейдя теперь к переменной  $\tau = e^{2t}/2$ , получим уравнение (2) с переменной  $\tau$  вместо  $t$  и функцией  $v$  вместо  $u$ .

Следовательно, если  $u = v(\omega; t)$  – решение уравнения (2), то  $u = e^{-t}v(\omega; e^{2t}/2)$  – решение уравнения (3). Теорема доказана.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 18-29-10085мк) и частичной финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках реализации программы Математического центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2019-1621.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М., 2007.
2. Корпусов М.О. Разрушение в неклассических нелокальных уравнениях. М., 2010.
3. Hayashi N., Kaikina E., Naumkin P., Shishmarev I. Asymptotics for Dissipative Nonlinear Equations. Berlin; Heidelberg, 2006.
4. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Жуков А.И. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М., 2005.
5. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики. М., 2002.
6. Кудряшов Н.А. Методы нелинейной математической физики. Долгопрудный, 2010.
7. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 1971.
8. Ибрагимов Н.Х. Практический курс дифференциальных уравнений и математического моделирования. М., 2012.

Московский государственный университет  
им. М.В. Ломоносова,  
Московский центр фундаментальной  
и прикладной математики

Поступила в редакцию 06.06.2021 г.  
После доработки 28.06.2021 г.  
Принята к публикации 08.09.2021 г.