ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 10, с. 1426–1430

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.968.72

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ПОЛУГРУПП, ПОРОЖДАЕМЫХ ВОЛЬТЕРРОВЫМИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ С СИНГУЛЯРНЫМИ ЯДРАМИ

© 2021 г. В. В. Власов, Н. А. Раутиан

В сепарабельном гильбертовом пространстве изучаются заданные на положительной полуоси абстрактные линейные неоднородные вольтерровы интегро-дифференциальные уравнения второго порядка с операторными коэффициентами, имеющие ядра с интегрируемыми особенностями. Рассматриваемые уравнения представляют собой операторные модели задач, возникающих в теории вязкоупругости. Приводится метод свед́ения начальной задачи для изучаемого уравнения к задаче Коши для линейного дифференциального уравнения в расширенном функциональном пространстве. Найдены достаточные условия, которым должны удовлетворять ядра интегральных операторов интегро-дифференциального уравнения, чтобы у соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения в расширенном пространстве существовала сжимающая и экспоненциально устойчивая полугруппа. Получены оценки решений задачи Коши для линейного уравнения в расширенном пространстве. Рассматривается пример использования полученных результатов в случае дробно-экспоненциальных ядер (функции Работнова) интегральных операторов.

DOI: 10.31857/S0374064121100149

Введение. В работе рассматриваются абстрактные интегро-дифференциальные уравнения с операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве. Эти абстрактные интегро-дифференциальные уравнения могут быть реализованы как интегро-дифференциальные уравнения в частных производных, которые возникают в теории линейной вязкоупругости (см. [1, с. 130; 2, с. 54; 3, с. 477]). К рассматриваемому классу уравнений относятся также интегро-дифференциальные уравнения Гуртина–Пипкина, описывающие процесс распространения тепла в средах с памятью (см. [4–6]). В качестве ядер интегральных операторов могут быть рассмотрены, в частности, суммы дробно-экспоненциальных функций (функций Работнова) с положительными коэффициентами, имеющие широкое применение в теории вязкоупругости (см. [7, с. 29]). Результаты, представленные в данной работе, являются продолжением и развитием исследований, опубликованных в работах [8–10], посвящённых спектральному анализу оператор-функций, являющихся символами вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений.

1. Определения. Обозначения. Постановка задачи. Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство, A – самосопряжённый положительный, $A^* = A \geqslant \kappa_0 I$ $(\kappa_0 = \mathrm{const} > 0)$, оператор, действующий в пространстве H и имеющий ограниченный обратный. Пусть B – симметрический оператор, $(Bx, y) = (x, By)$, действующий в пространстве H, с областью определения $\operatorname{Dom} B$ $(\operatorname{Dom} A \subseteq \operatorname{Dom} B)$, неотрицательный, $(Bx, x) \geqslant 0$ для любых $x, y \in \operatorname{Dom} B$, и удовлетворяющий неравенству $\|Bx\| \leqslant \kappa \|Ax\|$, $0 < \kappa = \mathrm{const} < 1$, для любого $x \in \operatorname{Dom} A$; тождественный оператор в пространстве H обозначаем через I.

Рассмотрим в пространстве H следующую задачу для интегро-дифференциального уравнения второго порядка на положительной полуоси $\mathbb{R}_+ := (0, \infty)$:

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + (A+B)u(t) - \sum_{k=1}^{N} \int_0^t R_k(t-s)(a_k A + b_k B)u(s)\, ds = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{1}$$

$$u(+0) = \varphi_0, \quad u^{(1)}(+0) = \varphi_1. \tag{2}$$

Предположим, что функции $R_k : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ удовлетворяют следующим условиям:

$$R_k(t) \text{ – положительные невозрастающие функции, } R_k(t) \in L_1(\mathbb{R}_+), \quad k = \overline{1, N}. \tag{3}$$

Замечание 1. Из условий (3) следует, что $\lim\limits_{t\to+\infty} R_k(t) = 0, \ \ k = \overline{1, N}$.

Кроме того, будем предполагать, что выполнены условия

$$\sum_{k=1}^{N} \bigg(a_k \int\limits_0^{+\infty} R_k(s)\, ds \bigg) < 1, \quad \sum_{k=1}^{N} \bigg(b_k \int\limits_0^{+\infty} R_k(s)\, ds \bigg) < 1. \tag{4}$$

Пусть

$$A_0 := \bigg(1 - \sum_{k=1}^{N} \bigg(a_k \int\limits_0^{+\infty} R_k(s)\, ds \bigg)\bigg) A + \bigg(1 - \sum_{k=1}^{N} \bigg(b_k \int\limits_0^{+\infty} R_k(s)\, ds \bigg)\bigg) B, \quad A_k := a_k A + b_k B.$$

Из известных результатов (см. [11, с. 361]) вытекает, что операторы A_0 и A_k, $k = \overline{1, N}$, являются самосопряжёнными и положительными.

Превратим область определения $\operatorname{Dom} A_0^{\beta}$ оператора A_0^{β}, $\beta > 0$, в гильбертово пространство H_β, введя на $\operatorname{Dom} A_0^{\beta}$ норму, эквивалентную норме его графика.

Замечание 2. Из свойств операторов A и B следует, что операторы A_0 и A_k, $k = \overline{1, N}$, являются обратимыми. Кроме того, из неравенства Гайнца (см. [12, с. 177–178]) вытекает, что операторы $Q_k := A_k^{1/2} A_0^{-1/2}$ допускают ограниченное замыкание в H для всех $k = \overline{1, N}$, и что A_0^{-1} – ограниченный оператор.

Определение 1. Назовём вектор-функцию $u(t)$ *классическим решением* задачи (1), (2), если $u(t) \in C^2(\mathbb{R}_+, H)$, $Au(t), Bu(t) \in C(\mathbb{R}_+, H)$ и $u(t)$ удовлетворяет уравнению (1) при всех $t \in \mathbb{R}_+$ и начальному условию (2).

2. Полугруппа в расширенном функциональном пространстве. Через Ω_k обозначим весовое пространство $L^2_{r_k}(\mathbb{R}_+, H)$ вектор-функций на полуоси $\mathbb{R}_+$ со значениями в H, снабжённое нормой

$$\|u\|_{\Omega_k} = \bigg(\int\limits_0^{+\infty} r_k(s) \|u(s)\|_H^2\, ds \bigg)^{1/2}, \quad r_k(\tau) := 1/R_k(\tau) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, \quad k = \overline{1, N}.$$

Рассмотрим сильно непрерывную полугруппу $L_k(t)$ левых сдвигов в пространстве Ω_k (см. [13, с. 33]): $L_k(t)\xi(\tau) = \xi(t + \tau)$, $t > 0$. Известно, что линейный оператор $\mathbb{T}_k \xi(\tau) = \partial \xi(\tau)/\partial \tau$ в пространстве Ω_k с областью определения $\operatorname{Dom} \mathbb{T}_k = \{\xi \in \Omega_k : \partial\xi(\tau)/\partial\tau \in \Omega_k\}$ является генератором полугруппы $L_k(t)$ (см. [13, с. 66]).

Введём операторы $\mathbb{B}_k : H \to \Omega_k$ и $\mathbb{B}_k^* : \Omega_k \to H$ $(k = \overline{1, N})$, действующие следующим образом:

$$\mathbb{B}_k v = R_k(\tau) Q_k v, \quad \mathbb{B}_k^* \xi(\tau) = Q_k^* \int\limits_0^{\infty} \xi(\tau) d\tau, \quad k = \overline{1, N}, \quad \tau \in \mathbb{R}_+,$$

а также гильбертово пространство $\mathbb{H} = H \bigoplus H \bigoplus \big(\bigoplus_{k=1}^{N} \Omega_k \big)$, снабжённое нормой

$$\|(v, \xi_0, \xi_1(\tau), \ldots, \xi_N(\tau))\|_{\mathbb{H}}^2 = \|v\|_H^2 + \|\xi_0\|_H^2 + \sum_{k=1}^{N} \|\xi_k\|_{\Omega_k}^2, \quad \tau \in \mathbb{R}_+,$$

которое будем называть *расширенным* гильбертовым пространством.

Зададим в расширенном пространстве $\mathbb{H}$ линейный оператор $\mathbb{A}$ с областью определения

$$\mathrm{Dom}\,\mathbb{A} = \bigg\{(v, \xi_0, \xi_1(\tau), \ldots, \xi_N(\tau)) \in \mathbb{H} : v \in H_{1/2},$$

$$\xi_0 + \sum_{k=1}^{N} \mathbb{B}_k^* \xi_k(\tau) \in H_{1/2}, \quad \xi_k(\tau) \in \mathrm{Dom}\,(\mathbb{T}_k), \quad k = \overline{1, N}\bigg\},$$

действующий следующим образом:

$$\mathbb{A}(v, \xi_0, \xi_1(\tau), \ldots, \xi_N(\tau)) = \bigg(-A_0^{1/2}\bigg(\xi_0 + \sum_{k=1}^{N} \mathbb{B}_k^* \xi_k(\tau)\bigg),\ A_0^{1/2} v,\ \mathbb{B}_k v + \mathbb{T}_k \xi_k(\tau), \quad k = \overline{1, N}\bigg).$$

Введём $(2+N)$-компонентные векторы вида

$$Z(t) = (v(t), \xi_0(t), \xi_1(t, \tau), \ldots, \xi_N(t, \tau)) \in \mathbb{H}, \quad z = (v_0, \xi_{00}, \xi_{10}(\tau), \ldots, \xi_{N0}(\tau)) \in \mathbb{H}.$$

В расширенном пространстве $\mathbb{H}$ рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\frac{d}{dt} Z(t) = \mathbb{A} Z(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{5}$$

$$Z(0) = z. \tag{6}$$

Определение 2. Вектор-функция $Z(t) = (v(t), \xi_0(t), \xi_1(t, \tau), \ldots, \xi_N(t, \tau))$, $t \in [0, \infty)$, принимающая значения в пространстве $\mathbb{H}$, называется *классическим решением* задачи (5), (6), если $v(t), \xi_0(t) \in C^1([0, \infty))$, $\xi_k(t, \tau) \in C^1([0, \infty), H)$ при каждом $\tau \in \mathbb{R}_+$ и любом $k = \overline{1, N}$, $Z(t) \in C([0, \infty), D(\mathbb{A}))$ и вектор-функция $Z(t)$ удовлетворяет уравнению (5) при всех $t \in \mathbb{R}_+$ и начальному условию (6).

Теорема 1. *Оператор* $\mathbb{A}$ *в пространстве* $\mathbb{H}$ *с плотной областью определения* $\mathrm{Dom}\,\mathbb{A}$ *является максимально диссипативным, т.е.* $\mathrm{Re}\,(\mathbb{A}x, x) \leqslant 0$ *при* $x \in \mathrm{Dom}\,\mathbb{A}$ *и оператор* $\mathbb{A}$ *не имеет нетривиальных диссипативных расширений.*

Теорема 2. *Линейный оператор* $\mathbb{A}$ *является генератором сжимающей* C_0*-полугруппы* $S(t) = e^{t\mathbb{A}}$ *в пространстве* $\mathbb{H}$, *при этом решение задачи (5), (6) представимо в виде* $Z(t) = S(t)z$, $t \in \mathbb{R}_+$, *и для любого* $z \in \mathrm{Dom}\,\mathbb{A}$ *справедливо энергетическое равенство*

$$\frac{d}{dt}\|S(t)z\|_{\mathbb{H}}^2 = -\sum_{k=1}^{N}\bigg(\lim_{\tau\to 0+} r_k(\tau)\|\xi_k(t, \tau)\|_H^2 + \int_0^{+\infty} r_k'(\tau)\|\xi_k(t, \tau)\|_H^2\, d\tau\bigg).$$

Замечание 3. Так как функции $r_k(\tau)$ являются монотонными, то, согласно теореме Лебега [14, с. 15], их производные $r_k'(\tau)$ существуют почти всюду при $\tau \in [0, \infty)$.

Доказательства теорем 1 и 2 приведены в работе [15].

3. Экспоненциальная устойчивость. Предположим, что ядра $R_k(\tau)$, $k = \overline{1, N}$, интегральных операторов удовлетворяют следующим условиям:

$$R_k'(\tau) + \gamma R_k(\tau) \leqslant 0 \tag{7}$$

для любого $\tau \in \mathbb{R}_+$ при некотором $\gamma > 0$. Условие (7) хорошо известно в литературе (см., например, монографию [3, с. 481], а также цитированную в ней литературу). Положим

$$M_k(t) = \int_t^{+\infty} R_k(s)\, ds = \int_0^{+\infty} R_k(t+s)\, ds, \quad k = \overline{1, N}.$$

Приведём результат об экспоненциальной устойчивости полугруппы $S(t)$, $t \geqslant 0$.

Теорема 3. *Пусть $S(t)z$ – решение задачи (5), (6) при $t \in \mathbb{R}_+$ и пусть функции $R_k(\tau)$ $(k = \overline{1,N})$ удовлетворяют условиям (3), (4) и условию (7) для некоторого $\gamma > 0$ и любого $\tau \in \mathbb{R}_+$. Тогда для любого $z \in \mathbb{H}$ справедливо неравенство*

$$\|S(t)z\|_{\mathbb{H}} \leqslant \sqrt{3}\|z\|_{\mathbb{H}} e^{-\omega t}.$$

При этом

$$\omega = \max_{\beta>0} \omega_\beta, \quad \omega_\beta = \frac{1}{6}\min\left\{\frac{\gamma}{\gamma_1(\beta)}, \frac{1}{\gamma_2(\beta)}\right\},$$

$$\gamma_1(\beta) := \max_{1\leqslant k\leqslant N}\left\{\frac{3}{2}\frac{M_k(0)}{M(\beta)}\left[\frac{1}{M_k(\beta)}\left(6\|Q_k^{-1}\|^2 + \frac{1}{\lambda_k\beta^2}\right) + N\left(\|Q_k^{-1}\|^2 + \left(1 + \frac{2}{3}M(\beta)\right)\|Q_k\|^2\right)\right] + \frac{1}{2}\right\},$$

$$\gamma_2(\beta) := \frac{3}{M(\beta)}\max\left\{1, N\max_{1\leqslant k\leqslant N}\left\{\frac{M_k(0)}{\lambda_k}\right\}\right\} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_0}},$$

$$\lambda_m = \inf_{\substack{\|x\|=1\\ x\in \operatorname{Dom} A_m}} (A_m x, x), \ \ m = \overline{0,N}, \ \ M_k(\beta) := \int\limits_\beta^{+\infty} R_k(s)\,ds, \ \ k = \overline{1,N}, \ \ M(\beta) := \sum_{k=1}^N M_k(\beta).$$

4. Корректная разрешимость. Рассмотрим задачу Коши для неоднородного уравнения

$$\frac{d}{dt}Z(t) = \mathbb{A}Z(t) + F(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{8}$$

$$Z(0) = z. \tag{9}$$

Относительно неоднородности $F(t)$ и начального вектора z будем предполагать, что они имеют вид $F(t) = (f_1(t), \underbrace{0,\ldots,0}_{N+1})$, где $f_1(t) = f(t) - \sum_{k=1}^N M_k(t)A_k\varphi_0$, и $z = (\varphi_1, A_0^{1/2}\varphi_0, \underbrace{0,\ldots,0}_{N})$ (свойства вектор-функции $f(t)$ и векторов φ_0, φ_1 указаны в формулировке теоремы 4).

На основании теоремы 6.5 из монографии [12, с. 166] получаем следующий результат.

Теорема 4. *Пусть функции $R_k(\tau) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $k = \overline{1,N}$, удовлетворяют условиям (3), (4), (7) и выполнено одно из следующих двух условий:*

1) вектор-функция $A_0^{1/2}f(t)$ принадлежит пространству $C([0,+\infty), H)$, функция $M_k(t)$ – пространству $C([0,+\infty))$, $k = \overline{1,N}$, а векторы φ_0 и φ_1 – пространствам $H_{3/2}$ и $H_{1/2}$ соответственно;

2) вектор-функция $f(t)$ принадлежит пространству $C^1([0,+\infty), H)$, функция $M_k(t)$ – пространству $C^1([0,+\infty))$, $k = \overline{0,N}$, а векторы φ_0 и φ_1 – пространствам H_1 и $H_{1/2}$ соответственно.

Тогда задача (8), (9) имеет единственное классическое решение

$$Z(t) = (v(t), \xi_0(t), \xi_1(t,\tau), \ldots, \xi_N(t,\tau)),$$

где $v(t) := u'(t)$, $\xi_0(t) := A_0^{1/2}u(t)$, а $u(t)$ – классическое решение задачи (1), (2), и справедлива следующая оценка:

$$E(t) := \frac{1}{2}(\|u'(t)\|_H^2 + \|A_0^{1/2}u(t)\|_H^2) \leqslant \frac{1}{2}\|Z(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \leqslant d\Bigg[(\|\varphi_1\|_H^2 + \|A_0^{1/2}\varphi_0\|_H^2)e^{-2\omega t} +$$

$$+ \left(\int\limits_0^t e^{-\omega(t-s)}\left\|f(s) - \sum_{k=1}^N\left(\left(\int\limits_s^{+\infty} R_k(p)dp\right)ds\right)A_k\varphi_0\right\|_H ds\right)^2\Bigg] \tag{10}$$

с постоянной d, не зависящей от вектор-функции F, векторов φ_0, φ_1 и постоянной ω, определённой в формулировке теоремы 3.

5. Пример. Рассмотрим ядра интегральных операторов следующего вида:

$$R_k(t) =: Э_{\alpha-1}(-\beta_k, t) := t^{\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta_k)^n t^{n\alpha}}{\Gamma[(n+1)\alpha]}, \quad k = \overline{1,N},$$

– функции Работнова (см. [7, с. 29]), где $0 < \alpha < 1$, $\beta_k > 0$, $k = \overline{1,N}$, $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция Эйлера.

Отметим, что условия (4) примут соответственно вид

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{a_j}{\beta_j} < 1, \quad \sum_{j=1}^{N} \frac{b_j}{\beta_j} < 1.$$

При этом оценка (10) переходит в оценку

$$E(t) := \frac{1}{2}(\|u'(t)\|_H^2 + \|A_0^{1/2}u(t)\|_H^2) \leqslant \frac{1}{2}\|Z(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \leqslant d\Bigg[(\|\varphi_1\|_H^2 + \|A_0^{1/2}\varphi_0\|_H^2)e^{-2\omega t} +$$

$$+ \Bigg(\int_0^t e^{-\omega(t-s)} \Bigg\| f(s) - \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \sum_{k=1}^{N} \Bigg(\int_0^{+\infty} \frac{e^{-s\tau}\,d\tau}{\tau(\tau^\alpha + 2\beta_k\cos(\pi\alpha) + \beta_k^2\tau^{-\alpha})}\Bigg) A_k\varphi_0 \Bigg\|_H ds\Bigg)^2\Bigg].$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках реализации программы Математического центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2019-1621 (теорема 3) и при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (теорема 4) (проект № 20-01-00288 А).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильюшин А.А., Победря Б.Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. М., 1970.
2. *Christensen R.M.* Theory of Viscoelasticity. An Introduction. New York; London, 1971.
3. *Amendola G., Fabrizio M., Golden J.M.* Thermodynamics of Materials with Memory. Theory and Applications. New York; Dordrecht; Heidelberg; London, 2012.
4. *Gurtin M.E., Pipkin A.C.* General theory of heat conduction with finite wave speed // Arch. Rat. Mech. Anal. 1968. V. 31. P. 113–126.
5. *Eremenko A., Ivanov S.* Spectra of the Gurtin–Pipkin type equations // SIAM J. Math. Anal. 2011. V. 43. № 5. P. 2296–2306.
6. *Лыков А.В.* Проблема тепло- и массообмена. Минск, 1976.
7. *Работнов Ю.Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М., 1977.
8. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений. М., 2016.
9. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Корректная разрешимость и представление решений интегро-дифференциальных уравнений, возникающих в теории вязкоупругости // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 4. С. 574–587.
10. *Vlasov V.V., Rautian N.A.* A study of operator models arising in problems of hereditary mechanics // J. of Math. Sci. (N.Y.). 2020. V. 244. № 2. P. 170–182.
11. *Като Т.* Теорема возмущений линейных операторов. М., 1972.
12. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховых пространствах. М., 1967.
13. *Engel K.J., Nagel R.* One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations. New York, 2000.
14. *Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. М., 1979.
15. *Раутиан Н.А.* Полугруппы, порождаемые вольтерровыми интегро-дифференциальными уравнениями // Дифференц. уравнения. 2020. Т 56. № 9. С. 1226–1244.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова,
Московский центр фундаментальной
и прикладной математики

Поступила в редакцию 14.06.2021 г.
После доработки 14.06.2021 г.
Принята к публикации 08.09.2021 г.