ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 10, с. 1431–1435

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.983.35

ОБ ОДНОМ ОБРАТИМОМ РАСШИРЕНИИ НЕСАМОСОПРЯЖЁННОГО СИНГУЛЯРНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА НА ПОЛУОСИ

© 2021 г. Л. К. Кусаинова, Я. Т. Султанаев, А. С. Касым

Рассматривается дифференциальный оператор, порождаемый в классе финитных функций на положительной полуоси несамосопряжённым дифференциальным выражением $-a_2(x)f''+a_1(x)f'+a_0(x)f$ с коэффициентами, локально интегрируемыми по Лебегу. Не исключаются случаи, когда $a_j(x)$ $(j=0,1)$ являются знакопеременными или могут иметь бесконечные пределы при $x\to\infty$ (с любым знаком). Даны описания внутренних связей между коэффициентами a_j $(j=0,1,2)$, при которых рассматриваемый оператор допускает замкнутое обратимое расширение в пространстве $L_2(0,\infty)$.

DOI: 10.31857/S0374064121100150

В работе рассматривается несамосопряжённый оператор

$$\mathrm{L}_0 f \equiv -a_2(x)f''+a_1(x)f'+a_0(x)f, \tag{1}$$

заданный на классе $C_0^\infty(I)$ бесконечно дифференцируемых и финитных функций f, определённых на полуоси $I=(0,\infty)$. Будем предполагать, что коэффициенты a_j $(j=1,2)$ принадлежат классу $L_{2,\mathrm{loc}}(I)$, а коэффициент a_0 – классу $L_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+)$ (здесь и ниже $\mathbb{R}^+=[0,\infty)$), кроме того, считаем, что коэффициент a_2 положителен на I и что $a_2^{-1}=1/a_2\in L_2(I)$, а коэффициенты a_j $(j=0,1)$ невырождены на ∞, т.е. $|a_{j,(t)}|>0$ для любого $t>0$, где $a_{j,(t)}=\{x\geqslant t : a_j(x)\neq 0\}$. Выше и в дальнейшем через $|G|$ для измеримого множества $G\subset\mathbb{R}=(-\infty,\infty)$ обозначается его мера Лебега, а через $L_p(G)$ и $L_{p,\mathrm{loc}}(G)$ – соответственно пространство Лебега функций $g\colon G\to\mathbb{R}$ с нормой

$$\|g\|_{L_p(G)}=\|g;L_p(G)\|=\bigg(\int\limits_G |g(x)|^p\,dx\bigg)^{1/p}$$

и пространство всех функций g, принадлежащих для любого $[a,b]\subset G$ классу $L_p([a,b])$.

Известно, что к исследованию сингулярных дифференциальных операторов, порождаемых несамосопряжёнными дифференциальными выражениями, не существует общих подходов. В данной работе коэффициенты не являются гладкими, $a_j(\cdot)$ при $j=\overline{0,1}$ могут менять знак в любой окрестности $+\infty$, в частности, не исключается случай, когда $\overline{\lim\limits_{x\to\infty}}\,a_0(x)=-\infty$. В ней решается одна из основных задач теории операторов – задача о существовании замкнутого обратимого расширения минимального оператора L_0. Для решения этой задачи применяется метод локальных оценок на “характеристических” промежутках. Для этого строится односторонняя двухвесовая модификация “бегущих средних” Отелбаева (см. [1]). В работе выявлены внутренние связи между коэффициентами a_j $(j=0,1,2)$, при которых минимальный оператор L_0 допускает существование обратимого расширения. Исследование публикаций показало, что поставленная задача при принятых в работе условиях на переменные коэффициенты решалась впервые.

Перейдём к построению характеристического размера. Обозначим через $L^+_{\mathrm{loc}}(I)$ класс невырожденных локально суммируемых в I функций $f\geqslant 0$ (весовых функций). Пусть $x\geqslant 0$, $h>0$, $\Delta=[x,x+h]$, $\Re_{x,h}$ – совокупность всех аффинных функций $R(t)=c_0+c_1t$ $(c_0,c_1\in\mathbb{R})$, для которых $\|R;L_2(\Delta)\|=1$. Далее, пусть $v\in L^+_{\mathrm{loc}}(I)$, $\rho(\cdot)>0$ в I и $\rho^{-1}=1/\rho\in L_1(I)$.

Положим

$$S^{\#}(x,h;v)=\inf_{R\in\Re_{x,h}}\|vR^2;L_1(\Delta)\|,$$

$$M^{\#}(x,h;\rho,v)=(h^3\|\rho^{-1};L_1(\Delta)\|S^{\#}(x,h;v))^{1/2}.$$

Заметим, что $R(t)\equiv h^{-1/2}\in\Re_{x,h}$. Поэтому $S^{\#}(x,h;v)\leqslant h^{-1}\|v;L_1(\Delta)\|$.

Произвольную функцию $h(x)>0,\ \ x\geqslant 0$, будем называть *функцией длины* (ф.д.) в $\mathbb{R}^+$. Скажем, что пара (ρ,v) удовлетворяет *условию* $(\Pi^{\#})$ *относительно ф.д.* $h(\cdot)$, если

$$M^{\#}(x,h(x);\rho,v)\geqslant 1\quad \text{для любого}\quad x\geqslant 0.$$

Запись: $(\rho,v)\in\Pi^{\#}$ относительно ф.д. $h(\cdot)$. Для заданной ф.д. $h(\cdot)$ примем обозначение $\Delta(x)=[x,x+h(x)]$ и будем называть такой отрезок *характеристическим.*

Будем говорить, что вес $v\in L^+_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+)$ удовлетворяет *условию регулярности* $(\Re)$ *относительно ф.д.* $h(\cdot)$, если существует такое $\eta\in(0,1)$, что

$$\eta h(x)^{-1}\|v;L_1(\Delta)\|\leqslant S^{\#}(x,h(x);v). \tag{2}$$

Запись: $v\in(\Re)$ относительно ф.д. $h(\cdot)$.

На промежутках $\Delta\subset\mathbb{R}^+$ положим

$$\|f;W^l_p(\Delta;\rho,v)\|=\|\rho^{1/p}f^{(l)};L_p(\Delta)\|+\|v^{1/p}f;L_p(\Delta)\|\quad (l\in\mathbb{N},\quad 1\leqslant p<\infty).$$

Обозначим через $\overset{\circ}{W}{}^l_p(\rho,v)$ пополнение класса $C^\infty_0(I)$ по норме $\|f;W^l_p(I;\rho,v)\|$. Далее для $w\in L^+_{\mathrm{loc}}(I)$ и $r=0,1$ обозначим

$$K_r(x,h;\rho,w)=h^{1-r}(\|\rho^{-1};L_1(\Delta)\|\|w;L_1(\Delta)\|)^{1/2}.$$

Лемма 1. *Пусть* $(\rho,v)\in\Pi^{\#}$ *и* $v\in(\Re)$ *относительно ф.д.* $h(\cdot)$. *Существует такая постоянная* $c=c(r)>0$, *что для всех* $f\in W^2_2(\Delta(x);\rho,v)$ справедливо неравенство

$$\|w^{1/2}f^{(r)};L_2(\Delta(x))\|\leqslant cK_r(x,h(x);\rho,w)\|f;W^2_2(\Delta(x);\rho,v)\|. \tag{3}$$

Неравенство (3) представляет собой простое следствие из основного неравенства на характеристических отрезках $\Delta(x)$:

$$c(\eta)h(x)^{-3/2}\|f;L_2(\Delta(x))\|\leqslant\int\limits_{\Delta(x)}|f''|dt+\left[\int\limits_{\Delta(x)}\rho^{-1}dt+\int\limits_{\Delta(x)}|f|^2v(t)dt\right]^{1/2}, \tag{4}$$

где $c(\eta)=\sqrt{\eta}/2(1+\sqrt{\eta})$. Неравенство (4) несложно вывести из доказательств основных неравенств для “односторонней бегущей средней” [1] и “двухвесовой бегущей средней” [2, § 1.6; 3].

Пример 1. Функция $v(x)=(1+x)^{2m}$ $(m\in\mathbb{N})$ удовлетворяет условию $(\Re)$ относительно произвольной функции длины $h(\cdot)$ в $\mathbb{R}^+$.

Пример 2. Если функция v удовлетворяет условию (2) и $|v_{(t)}|>0$ для всех $t>0$, то функция

$$h^{\#}(x)=h^{\#}(x;\rho,v)=\sup\{h>0: M^{\#}(x,h;\rho,v)\leqslant 1\}$$

конечна и положительна в $\mathbb{R}^+$. При этом пара $(\rho,v)\in\Pi^{\#}$ относительно ф.д. $h^{\#}(\cdot)$, а именно справедливо

Утверждение 1. *Пусть* $h^{\#}=h^{\#}(x;\rho,v)$. *Тогда* $M^{\#}(x,h^{\#};\rho,v)=1$.

Лемма 2. *Пусть* $(a_2^2,\ a_0^2)\in\Pi^{\#}$ *и* $a_0^2\in(\Re)$ *относительно ф.д.* $h(\cdot)$, $W=\overset{\circ}{W}{}^2_2(a_2^2,a_0^2)$ *и*

$$K(a_2,a_0)=\sup_{x\geqslant 0}\max_{r=0,1}\{h(x)^{-r+3/2}\|a_2^{-1};L_2(\Delta(x))\|\}<\infty, \tag{5}$$

$$N(a_2, a_1) = \sup_{x \geqslant 0} \|a_1; L_2(\Delta(x))\| \|a_2^{-1}; L_2(\Delta(x))\| < \infty. \tag{6}$$

Тогда для каждой фундаментальной по норме $\|\cdot\|_W = \|\cdot; \overset{\circ}{W}{}_2^2(a_2^2, a_0^2)\|$ *последовательности* $\{f_k\} \subset C_0^\infty(I)$ *справедливы следующие утверждения:*

a) последовательность имеет в $L_2(I)$ *предел* $f = \|\cdot\|_{L_2(I)}\text{-}\lim f_k$, *при этом функция* f *имеет непрерывную в* I *производную* $f' = \|\cdot\|_{L_2(I)}\text{-}\lim f_k'$ *и п.в. конечную в* I *производную* $f''(x) = \|\cdot\|_{L_1(I)}\text{-}\lim f_k''$; *кроме того,* $a_r f^{(r)} = \|\cdot\|_{L_2(I)}\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} a_r f_k^{(r)}$, $r = 0, 1, 2$;

b) для предельной функции f *выполняется оценка*

$$\|f; L_2(I)\| \leqslant cK(a_2, a_0)\|f\|_W.$$

Доказательство утверждения a) леммы 2 опирается на оценки леммы 1. При этом используются свойства пределов $\lim f_k^{(r)}$ $(r = 0, 1, 2)$ в $L_{p,\mathrm{loc}}(I)$ $(1 \leqslant p < \infty)$. Для доказательства утверждения b) леммы 1 возьмём представление

$$\|f; L_2(I)\|^2 = \sum_{j \geqslant 1} \|f; L_2(\Delta_j)\|^2,$$

в котором $\Delta_j = [x_j, x_{j+1})$, $x_{j+1} = x_j + h(x_j)$, $x_1 = 0$. Затем к каждому слагаемому $\|f; L_2(\Delta_j)\|^2$ применим оценку (3) при $r = 0$ и $w \equiv 1$.

Теорема 1. *Пусть* $(a_2^2, a_0^2) \in \Pi^\#$ *и* $a_0^2 \in (\Re)$ *относительно ф.д.* $h(\cdot)$. *Пусть, кроме того, выполнены условия (5) и (6). Тогда оператор* L_0 *допускает замкнутое расширение*

$$\mathrm{L} : L_2(I) \to L_2(I), \quad D(\mathrm{L}) \subset W. \tag{7}$$

Доказательство теоремы 1 следует из леммы 2, в силу которой $D(\mathrm{L}) \subset W$ и имеет место импликация

$$\{f_k\} \subset C_0^\infty(I), \quad \|f_k\|_W \to 0, \quad \|\mathrm{L}_0 f_k - z; L_2(I)\| \to 0 \;\Rightarrow\; z = 0.$$

Теорема 2. *Пусть* a_i $(i = 0, 2)$ *удовлетворяют условиям теоремы 1. Если к тому же*

$$A(a_0, a_1, a_2) = \sup_{x \geqslant 0} \left(x \int_x^\infty w_-(t)\,dt \right)^{1/2} < \frac{1}{2\sqrt{2}}, \tag{8}$$

где $w_-(x) = \max\{0, -(2a_0(x)a_2(x) - a_1^2(x))/a_2^2(x)\}$, *то оператор* L *в (7) обратим.*

Доказательство. Допустим, что найдётся такая функция $f = \|\cdot\|_W\text{-}\lim f_k \neq 0$ $(f_k \in \in C_0^\infty(I))$ из области определения $D(\mathrm{L})$ оператора L, для которой

$$\mathrm{L} f = 0. \tag{9}$$

Справедливо неравенство $\|f'\|_{L_2(I)} = \lim \|f'\|_{L_2(I)} > \delta > 0$, иначе в силу непрерывности функции f' имели бы $f'(x) \equiv 0$ в I, а значит, $f(x) \equiv c > 0$ в I и $\|f\|_{L_2(I)} = \infty$. Пусть

$$\|f_k'\|_{L_2(I)} > 2^{-1}\delta \quad (k \geqslant N_\delta). \tag{10}$$

Равенство (9) равносильно равенству $\widetilde{\mathrm{L}} f = 0$ для оператора

$$\widetilde{\mathrm{L}} f \equiv -f'' + b_1(x) f' + b_0(x) f, \quad b_r = a_r a_2^{-1} \quad (r = 0, 1).$$

Поэтому

$$-(f'', f_k) + \sum_{r=0,1} (b_r f^{(r)}, f_k) = (\widetilde{\mathrm{L}} f, f_k) = 0, \tag{11}$$

где $(\cdot\,,\cdot)$ – скалярное произведение в $L_2(I)$. Последовательно применяя оценки леммы 1 на каждом характеристическом отрезке Δ_j при $\rho = a_2^2$, $v = a_0^2$, получаем

$$|(f'', f_k) - (f_k'', f_k)| \leqslant c_1(\eta) C(K(a_2, a_0))^2 \|a_2 f'' - a_2 f_k''; L_2(I)\| (\to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty),$$

где $C = \sup\limits_{k \geqslant 0} \|f_k\|_W < \infty$. Далее,

$$(b_r f^{(r)}, f_k) = (a_r f^{(r)}, a_2^{-1} f_k), \quad k \geqslant 1.$$

Пусть $w(x) = 2b_0(x) - b_1^2(x)$, $w_+(x) = \max\{0, w(x)\}$, $w_-(x) = \max\{0, -w(x)\}$. Применяя оценку (10), показываем, что для достаточно больших $k \in \mathbb{N}$ справедливы неравенства

$$\lambda_k = (\widetilde{\mathrm{L}} f_k, f_k) \geqslant 2^{-1} \|f_k'; L_2(I)\|^2 + 2^{-1} (\|w_+^{1/2} f_k; L_2(I)\|^2 - \|w_-^{1/2} f_k; L_2(I)\|^2) \geqslant$$

$$\geqslant 2^{-1} (\|f_k'; L_2(I)\|^2 - \|w_-^{1/2} f_k; L_2(I)\|^2) \geqslant \frac{\delta}{8}. \tag{12}$$

Для вывода последнего неравенства в (12) мы использовали оценку

$$\|w_-^{1/2} f_k; L_2(I)\| \leqslant 2A(a_0, a_1, a_2) \|f_k'; L_2(I)\|$$

(см. [4, § 1.3]). Далее равенство (11) запишем как $0 = \lambda_k + \mu_k$. Так как $\mu_k \to 0$ при $k \to \infty$, то в силу (12) при достаточно больших k имеем $0 = \lambda_k + \mu_k \geqslant \lambda_k - |\mu_k| \geqslant \delta/16$. Следовательно, допущение (9) при $f \neq 0$ места не имеет. Теорема доказана.

Пример 3. Пусть $m \in \mathbb{N}$ и

$$A = \sup_{x \geqslant 0} x \int\limits_x^\infty (2(1+t)^m a_2^{-1}(t) - a_2^{-2}(t))\, dt \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Тогда оператор

$$\mathrm{L}_0 y \equiv -a_2(x) y'' + y' - (1+x)^m y$$

имеет инъективное замкнутое расширение

$$\mathrm{L} : L_2(I) \to L_2(I), \quad D(\mathrm{L}) \subset \overset{\circ}{W}{}_2^2(I; a_2, (1+x)^{2m}).$$

В силу утверждения 1 пара (a_2^2, a_0^2), $a_0(t) = -(1+t)^m$, удовлетворяет условиям теоремы 1 относительно ф.д. $h(x) = h^{\#}(x; a_2^2, a_0^2)$. Обратимся к условиям (5), (6) теоремы 1, где

$$K(a_2, a_0) = \sup_{x \geqslant 0} \{\max_{r=0,1} K_r(x, h(x); a_2^2)\},$$

$$[K_0(x, h(x); a_2^2)]^2 = h(x)^3 \int\limits_x^{x+h(x)} a_2^{-2} dt = \frac{1}{S^{\#}(x, h(x); a_0^2)} \leqslant \frac{1}{\eta},$$

$$[K_1(x, h(x); a_2^2)]^2 = h(x) \int\limits_x^{x+h(x)} a_2^{-2} dt \leqslant \min\{\|a_2^{-1}; L_2(I)\|^2, \eta^{-1}\} \leqslant \eta^{-1} + \|a_2^{-1}; L_2(I)\|^2,$$

$$N(a_2, a_1) = \sup_{x \geqslant 0} K_1(x; h(x), a_2^2) \leqslant (\eta^{-1} + \|a_2^{-1}; L_2(I)\|^2)^{1/2}.$$

Осталось заметить, что $w_-(x) = 2(1+x)^m a_0^{-1}(x) + a_2^{-2}(x)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Республики Казахстан (проект AP08856104 – Л.К. Кусаинова, Я.Т. Султанаев, А.С. Касым) и финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2019-1621 (Я.Т. Султанаев).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Отелбаев М.О., Кусаинова Л.К., Булабаев А.* Оценки спектра одного класса дифференциальных операторов // Збiрник праць Iнституту математики НАН Украiни. 2009. Т. 6. № 1. С. 165–190.
2. *Кусаинова Л.К.* Теоремы вложения и интерполяция весовых пространств Соболева: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Караганда, 1998.
3. *Кусаинова Л.К., Султанаев Я.Т., Мурат Г.К.* Аппроксимативные оценки для одного дифференциального оператора в весовом гильбертовом пространстве // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 12. С. 1644–1651.
4. *Мазья В.Г.* Пространства Л.С. Соболева. Л., 1985.

Евразийский национальный университет
им. Л.Н. Гумилева, г. Нур-Султан, Казахстан,
Башкирский государственный педагогический
университет им. М. Акмуллы, г. Уфа

Поступила в редакцию 13.05.2021 г.
После доработки 13.05.2021 г.
Принята к публикации 08.09.2021 г.