ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 10, с. 1436–1440

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.968.23

ОБ ОДНОМ ВЫРОЖДАЮЩЕМСЯ ОСОБОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ ОПЕРАТОРЕ

© 2021 г. А. А. Полосин

Проведена регуляризация одного вырождающегося особого интегрального оператора с переменными коэффициентами.

DOI: 10.31857/S0374064121100162

Рассмотрим уравнение

$$xf(x) - \frac{1}{\pi i}\int\limits_0^{+\infty}\frac{f(t)\,dt}{t+x} = g(x), \quad 0 < x < +\infty. \tag{1}$$

Это вырождающееся сингулярное (особое) интегральное уравнение с переменными коэффициентами. Сингулярные интегральные уравнения играют важную роль в различных областях математики, им посвящена обширная литература (см., например, [1–6]). Уравнение (1) связано, в частности, с так называемым уравнением "плавного перехода" [3].

В дальнейшем считаем, что $0 < x < +\infty$. Будем предполагать, что функция $g(x)$ принадлежит классу $C^2[0, +\infty)$ и такова, что интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{g(t)\,dt}{t+1}$$

существует.

Решение уравнения (1) будем искать в классе непрерывных при $0 < x < +\infty$ функций, возможно, имеющих особенность интегрируемого порядка в нуле, для которых существует интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} f(t)\,dt.$$

Определим классический сингулярный интегральный оператор

$$(Sf)(x) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_0^{+\infty}\frac{f(t)\,dt}{t-x}$$

и особый оператор

$$(Tf)(x) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_0^{+\infty}\frac{f(t)\,dt}{t+x}.$$

Несложно убедиться в том, что в рассматриваемом классе функций справедливо тождество

$$T^2 f = (S^2 - I)f,$$

где I – тождественный оператор.

Применяя оператор T к обеим частям уравнения (1), приходим к уравнению

$$(x^2-1+S^2)f(x)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_0^{+\infty}f(t)\,dt+(xI-T)g(x). \tag{2}$$

Обозначим

$$b(x)=\begin{cases}1/\sqrt{1-x^2}, & 0<x<1,\\ i/\sqrt{x^2-1}, & x>1.\end{cases}$$

Очевидно, что функция $b(x)$ допускает аналитическое продолжение с вещественной оси в верхнюю полуплоскость.

Запишем уравнение (2) в виде

$$(I-b^2(x)S^2)f(x)=-b^2(x)\biggl(\frac{1}{\pi i}\int\limits_0^{+\infty}f(t)\,dt+(xI-T)g(x)\biggr).$$

Факторизуем оператор, стоящий в левой части этого равенства, т.е. представим его главную часть в виде произведения сингулярных операторов, допускающих обращение в явном виде:

$$I-b^2S^2=(I+bS)(I-bS)+b[S,b]S,$$

где $[S,b]\equiv Sb-bS$, $b[S,b]S$ – регулярный оператор.

Обозначив

$$(I-bS)f=v, \tag{3}$$

$$w(x)=(b[S,b]Sf)(x)-b^2(x)\biggl(\frac{1}{\pi i}\int\limits_0^{+\infty}f(t)\,dt+(xI-T)g(x)\biggr),$$

представим уравнение (2) в виде

$$(I+bS)v=w. \tag{4}$$

Таким образом, регуляризация уравнения (2) сведена к последовательному решению уравнений (4) и (3). Это сингулярные интегральные уравнения с вырождением на конце.

Решим уравнение (4) стандартным методом сведения к задаче сопряжения аналитических функций [2, с. 97]. Пусть

$$F(z)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_0^{+\infty}\frac{v(t)\,dt}{t-z},$$

тогда уравнение (4) сводится к задаче сопряжения

$$F^+(x)=D(x)F^-(x)+2w(x)/(1+b(x)),$$

где

$$D(x)=\frac{1-b(x)}{1+b(x)}=\begin{cases}-x^2/(1+\sqrt{1-x^2})^2, & 0<x<1,\\ x^2/(i+\sqrt{x^2-1})^2, & x>1.\end{cases}$$

Определим каноническую функцию $X(z)$ условиями $X^+(x)=D(x)X^-(x)$, $X(\infty)=1$. Заметим, что $X(z)=\sqrt{1-1/z}X_0(z)$, где

$$X_0(z)=\exp\biggl(\frac{1}{\pi i}\int\limits_0^1\ln\frac{t}{\sqrt{1-t^2}+1}\frac{dt}{t-z}+\frac{1}{\pi i}\int\limits_1^{+\infty}\ln\frac{t}{\sqrt{t^2-1}+i}\frac{dt}{t-z}\biggr),$$

и

$$X^+(x) = \sqrt{x} X_0(x) \cdot \begin{cases} i\sqrt{1-x}/(\sqrt{1-x^2}+1), & 0 < x < 1, \\ \sqrt{x-1}/(\sqrt{x^2-1}+i), & x > 1, \end{cases}$$

$$X^-(x) = \frac{X_0(x)}{x^{3/2}} \cdot \begin{cases} -i\sqrt{1-x}(\sqrt{1-x^2}+1), & 0 < x < 1, \\ \sqrt{x-1}(\sqrt{x^2-1}+i), & x > 1, \end{cases}$$

$$X(-x) = \sqrt{\frac{x+1}{x}} X_0(-x).$$

Решая задачу сопряжения, получаем

$$v(x) = \frac{1}{1-b^2(x)} \left(w(x) - \frac{b(x)}{\pi i} \int\limits_0^{+\infty} \frac{1+b(x)}{1+b(t)} \frac{X^+(x)}{X^+(t)} \frac{w(t)\,dt}{t-x} \right). \tag{5}$$

Отметим некоторые свойства канонической функции.

Лемма 1. *Имеет место равенство*

$$\frac{1}{\pi i} \int\limits_0^{+\infty} \frac{b(t)/X^+(t)}{1+b(t)} \frac{dt}{t-x} = \frac{1/X^+(x)}{1+b(x)} - 1.$$

Доказательство проводится прямым вычислением:

$$\frac{1}{\pi i} \int\limits_0^{+\infty} \frac{b(t)/X^+(t)}{1+b(t)} \frac{dt}{t-x} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^{+\infty} \left(\left(\frac{1}{X^+(t)} - 1 \right) - \left(\frac{1}{X^-(t)} - 1 \right) \right) \frac{dt}{t-x} =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{X^+(x)} + \frac{1}{X^-(x)} - 2 \right) = \frac{1/X^+(x)}{1+b(x)} - 1.$$

Аналогично доказывается

Лемма 2. *Справедливо равенство*

$$\frac{1}{\pi i} \int\limits_0^{+\infty} \frac{1/X^+(s)}{1+b(s)} \left(\frac{1}{s-t} - \frac{1}{s-x} \right) ds =$$

$$= \frac{1}{b(t)} \left(\frac{1/X^+(t)}{1+b(t)} - 1 \right) - \frac{1}{b(x)} \left(\frac{1/X^+(x)}{1+b(x)} - 1 \right) + R(t) - R(x), \quad x, t > 0,$$

в котором

$$r(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < 1, \\ i(1/X^-(x) - 1)\sqrt{x^2-1}, & x > 1, \\ -i(1/X(x) - 1)\sqrt{x^2-1}, & x < -1, \end{cases} \qquad R(x) = r(x) + \frac{1}{\pi i} \int\limits_{|s|>1} \frac{r(s)\,ds}{s-x}.$$

Заметим, что функция $R(t)$ аналитична в окрестности нуля. В дальнейшем такие функции будем называть *регулярными*.

Вычисляя интегралы, содержащие каноническую функцию, как в леммах 1 и 2, преобразуем правую часть соотношения (5). В результате получим

$$v(x) = \frac{b(x)X^+(x)}{1-b(x)} \tilde{v}(x),$$

здесь

$$\tilde{v}(x) = g(x)R_1(x) - \frac{1}{\pi i}\int\limits_0^{+\infty} \frac{1-b(t)}{tX^+(t)}\frac{g(t)-g(x)}{t-x}\,dt + \frac{1}{\pi i}\int\limits_0^{+\infty} \frac{b(t)}{X(-t)}\frac{g(t)\,dt}{t+x} -$$

$$-\frac{1}{\pi i}\int\limits_0^{+\infty} \frac{R_2(x)-R_3(t)}{t+x}g(t)\,dt + \frac{1}{\pi i}\int\limits_0^{+\infty} R_4(x,t)f(t)\,dt,$$

где R_k, $k=\overline{1,4}$, – регулярные функции.

Найденное решение имеет особенность порядка выше единицы в нуле. Для устранения этой особенности потребуем соблюдения дополнительного условия (условия ортогональности):

$$\tilde{v}(0) = 0. \tag{6}$$

Заметим, что $\tilde{v}(x)-\tilde{v}(0) = O(x)$ при $x\to+0$ в силу равенства

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_0^{+\infty} \frac{b(t)}{X(-t)}\frac{g(t)\,dt}{t+x} = \frac{1}{\pi i}\int\limits_0^{+\infty} \frac{b(t)}{X(-t)}\frac{g(t)-g(0)}{t+x}\,dt + g(0)\frac{b(-x)}{X^-(x)} - \frac{g(0)}{\pi i}\int\limits_0^{+\infty} \frac{b(-t)}{X^-(t)}\frac{dt}{t-x}.$$

Перейдём к построению решения уравнения (3) с учётом условия (6).

Стандартный способ решения оказывается неприменим, поскольку получающаяся подынтегральная функция имеет особенность слишком высокого порядка в нуле. По этой причине сначала проведём некоторые преобразования.

Будем искать решение уравнения (3) в виде

$$f(x) = \frac{v(x)}{2} + \frac{b(x)/X^+(x)}{1+b(x)}\left(\frac{([S,b]Sf)(0)}{2} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{+\infty} f(t)\,dt + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{+\infty} X(-t)\frac{g(t)\,dt}{t+x}\right) + f_1(x).$$

Тогда в силу (4) и свойств канонической функции функция $f_1(x)$ должна удовлетворять уравнению

$$f_1(x) - \frac{b(x)}{\pi i}\int\limits_0^{+\infty} \frac{f_1(t)\,dt}{t-x} = v_1(x), \tag{7}$$

где

$$v_1(x) = b(x)\left(\frac{([S,b]Sf)(x) - ([S,b]Sf)(0)}{2} + \frac{1-b(x)}{2\pi i}\int\limits_0^{+\infty} f(t)\,dt - \frac{xb(x)}{2}g(x) + \frac{b(x)-1}{2}Tg(x)\right).$$

Решение уравнения (7) уже может быть построено стандартным образом:

$$f_1(x) = \frac{v_1(x)}{1-b^2(x)} + \frac{b(x)}{1+b(x)}\frac{1}{\pi i}\int\limits_0^{+\infty} \frac{X^+(t)}{X^+(x)}\frac{1}{1-b(t)}\frac{v_1(t)\,dt}{t-x}. \tag{8}$$

Так же, как и в случае уравнения (4), преобразуем правую часть соотношения (8), основываясь на свойствах канонической функции, аналогичных указанным в леммах 1 и 2:

$$f_1(x) = \frac{b(x)/X^+(x)}{1+b(x)}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{+\infty} R_5(x,t)f(t)\,dt - \frac{b(x)g(x)}{X^+(x)}R_6(x) -$$

$$-\frac{b(x)}{1+b(x)}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{+\infty}\frac{X^+(t)}{X^+(x)}\frac{tb^2(t)}{1-b(t)}\frac{g(t)-g(x)}{t-x}\,dt-\frac{b(x)}{2\pi i}\int\limits_0^{+\infty}\frac{1-b(t)}{1+b(x)}\frac{X(-t)}{X^+(x)}\frac{g(t)\,dt}{t+x}+$$

$$+\frac{b(x)/X^+(x)}{1+b(x)}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{+\infty}R_7(x,t)g(t)\,dt,$$

где $R_k,\ \ k=\overline{5,7}$, – регулярные функции.

Таким образом, уравнение (2) сведено к регулярному уравнению.

Автор благодарит академика Е.И. Моисеева за интерес к работе.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2019-1621 и при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 20-51-18006 Болг-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гохберг И.Ц., Крупник Н.Я.* Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов. Кишинев, 1973.
2. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М., 1977.
3. *Гахов Ф.Д., Черский Ю.И.* Уравнения типа свертки. М., 1978.
4. *Солдатов А.П.* Одномерные сингулярные операторы и краевые задачи теории функций. М., 1991.
5. *Солдатов А.П.* Об индексе операторов с концевым символом // Изв. РАН. Сер. мат. 1999. Т. 63. № 4. С. 171–206.
6. *Полосин А.А.* О разрешимости одного сингулярного интегрального уравнения с некарлемановским сдвигом // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 9. С. 1213–1220.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 16.06.2021 г.
После доработки 16.06.2021 г.
Принята к публикации 08.09.2021 г.